Aplicación del método general de resolución de ecuaciones de Viète en el aula con alumnado de bachillerato

Jacinto Ruiz-Catalán, María José Madrid y Alexander Maz-Machado

Se presenta un estudio basado en una experiencia didáctica llevada a cabo en el aula de matemáticas con alumnado de primer curso de Bachillerato. En ella, se ha utilizado un método histórico general de resolución de ecuaciones que deriva del antiguo método de extracción de raíces por expansión binomial, con la configuración del matemático español del siglo XVII José Zaragoza. De este modo, se ha buscado enriquecer tanto los conocimientos científicos como culturales sobre Historia de las Matemáticas del alumnado. Los resultados muestran que el alumnado ha aprendido el método, consiguiendo así ampliar el tipo de ecuaciones cuya resolución conoce.

Términos clave: Bachillerato; Historia de las Matemáticas en el aula; José Zaragoza; Método general de resolución de ecuaciones; Viète

Application of Viète's General Method of Solving Equations in the Classroom with High School Students

We present a study based on a didactic experience carried out in the mathematics classroom with high school students. For this, we have used a general historical method for solving equations derived from the ancient method of extracting roots by binomial expansion, with the configuration of the Spanish mathematician from the 17th century, José Zaragoza. By doing so, we have attempted to enrich both the students' scientific and cultural knowledge about the History of Mathematics. The results show that the students have learned the method, thus expanding the types of equations they know how to solve.

Keywords: General method of solving equations; High school; History of Mathematics in the classroom; José Zaragoza; Viète

Ruiz-Catalán, J., Madrid, M. J. y Maz-Machado, A. (2025). Aplicación del método general de resolución de ecuaciones de Viète en el aula con alumnado de bachillerato. *PNA, 19*(2), 159-185. https://doi.org/10.30827/pna.v19i2.30226

Aplicação do Método Geral de Resolução de Equações de Viète na Sala de Aula com Alunos do Ensino Secundario

É apresentado um estudo baseado em uma experiência didática realizada em sala de aula de matemática com alunos do Ensino Secundario. Nele foi utilizado um método histórico geral de resolução de equações que deriva do antigo método de extração de raízes por expansão binomial, com a configuração do matemático espanhol do século XVII, José Zaragoza. Desta forma, procurámos enriquecer o conhecimento científico e cultural sobre a História da Matemática dos alunos. Os resultados mostram que os alunos aprenderam o método, conseguindo assim ampliar o tipo de equações cuja resolução conhecem.

Palavras-chave: Ensino médio; História da Matemática na sala de aula; José Zaragoza; Método geral de resolução de equações; Viète

La introducción de la Historia de las Matemáticas en contextos educativos comienza aproximadamente a partir de mediados del siglo XIX (Maz-Machado, 2019). Aunque no fue hasta el último cuarto del siglo XX cuando el interés por esta aumentó, creándose organismos a nivel internacional para promover la inclusión de la Historia de las Matemáticas en estos contextos (Clark et al., 2016), como el grupo *International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics* (HPM), asociado al *International Commission on Mathematical Instrucion* (ICMI). A nivel español, y dentro de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), se creó el grupo Historia de las Matemáticas y Educación Matemática (HMEM) (Maz-Machado, 2019).

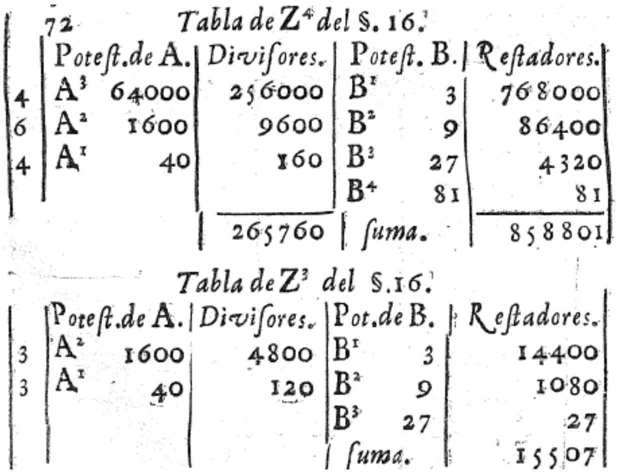
Este grupo dentro de la SEIEM supuso un impulso importante para el avance de esta línea de investigación en España. Ejemplo de ello son los trabajos presentados en el VII Simposio de la SEIEM, celebrado en Granada en 2003, como Puig (2003) que establece preguntas de investigación adecuadas en esta área, González-Astudillo y Sierra-Vázquez (2003) que presentan pautas para la investigación en la didáctica del análisis matemático, Gómez (2003) que desarrolla ideas para la investigación histórica en Didáctica de la Matemática o Furinghetti (2003) que discute ideas para aplicar la Historia de las Matemáticas con estudiantes. Estos estudios han continuado durante los últimos años (Gómez, 2018; Puig, 2004).

El problema de investigación que hemos planteado continúa con esta línea de trabajo y surge tras considerar que el alumnado de Bachillerato no siempre es consciente de no poseer los medios para resolver cualquier ecuación puesto que, para ecuaciones de grado superior a 2, en las aulas se suele emplear la regla de Ruffini. Sin embargo, esta regla permite encontrar sólo soluciones enteras de una ecuación y, además, si el término independiente tiene muchos divisores, la búsqueda de las soluciones se puede hacer inviable por su extensión. Debido a esto, las ecuaciones se suelen “preparar” previamente para que sea fácilmente aplicable la regla de Ruffini, enmascarando habitualmente la falta de generalidad de este método.

Considerando lo anterior, pretendemos enseñar al alumnado un método más general que la regla de Ruffini, para dotarlo de la capacidad para resolver una mayor variedad de ecuaciones, además de aportarle una visión histórica del método general de resolución de ecuaciones por expansión binomial. Para ello, el trabajo que presentamos se basa en una experiencia en el aula de Bachillerato acerca de la enseñanza de un método histórico de resolución de ecuaciones. Dicho método se basa en la expansión binomial para ir estimando los sucesivos dígitos de la solución (Rashed, 1994), se difundió por Europa durante el siglo XVII, y fue paulatinamente sustituido por otros métodos generales, como el de Newton-Raphson que supone una mejora, y alcanzó su configuración actual tras los cambios introducidos por Simpson (Ypma, 1995). Así mismo, el método general de resolución de ecuaciones (polinómicas) es una evolución de otro método antiguo que era usado en China para calcular raíces al menos diez siglos antes de Cristo (Rashed, 1994). Posteriormente este método pasa a los hindúes, apareciendo en el siglo XII en el *Līlāvati de Bhaskara* (Nordgaard, 1922). Su adaptación para la resolución de ecuaciones, según Rashed (1994), se hizo por parte de matemáticos árabes en los primeros siglos del segundo milenio, evidenciada por el matemático persa al-Tūsī (1135-1213) por primera vez.

En Europa este método aparece por primera vez en el libro del matemático francés Viète (1540-1603) De numerosa potestatum ad exegesim resolutione (Viète, 1600). Viète desarrolla, en unas 70 páginas, el método general de resolución de ecuaciones, usando un lenguaje retórico y ayudándose de tablas para contener las operaciones intermedias. Es notable la gran ausencia de símbolos, lo cual dificulta la comprensión del proceso. De Viète pasó, a lo largo del siglo XVII, al resto de Europa por medio de matemáticos como Harriot, Hume, Hérigone, Oughtred o Wallis (Nordgaard, 1922). Y en España tenemos constancia de que lo incluyeron en el siglo XVII matemáticos como Zaragoza (1669) y Puig (1672).

En concreto, el matemático valenciano José Zaragoza lo publicó en su libro Arithmetica Universal (Zaragoza, 1669), con una configuración que incluye más simbolismo y se ayuda de unas tablas bien estructuradas para contener la gran cantidad de operaciones intermedias necesarias (principalmente los divisores y restadores). Sin embargo, este método de resolución no permite encontrar soluciones negativas ni nulas ya que Zaragoza no las utilizaba. Considerando la adecuación para la enseñanza que presenta la configuración empleada por Zaragoza (desglosa los cálculos intermedios en tablas y usa simbología muy clara), hemos optado por utilizar este autor como referencia para nuestra experiencia en el aula. Como ejemplo en las figuras 1 y 2 pueden verse las tablas usadas en esta configuración, y que hemos empleado por su carácter pedagógico.



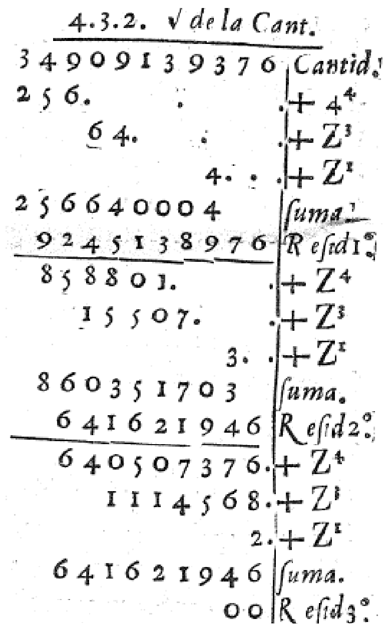
72 *Tabla de Z^4 del §. 16.*

	Poteſt. de A.		Diviſores.	Poteſt. B.		Reſtadores.
4	A^3	64000	256000	B^1	3	768000
6	A^2	1600	9600	B^2	9	86400
4	A^1	40	160	B^3	27	4320
				B^4	81	81
			265760	ſuma.		858801

Tabla de Z^3 del §. 16.

	Poteſt. de A.		Diviſores.	Pot. de B.		Reſtadores.
3	A^2	1600	4800	B^1	3	14400
3	A^1	40	120	B^2	9	1080
				B^3	27	27
				ſuma.		15507

Figura 1. Tablas para divisores y restadores (Zaragoza, 1669, p. 199)



4.3.2. √ de la Cant.

34909139376	Cantid.
256.	+ 4^4
64.	+ Z^3
4.	+ Z^2
256640004	ſuma.
9245138976	Reſid 1.º
858801.	+ Z^4
15507.	+ Z^3
3.	+ Z^2
860351703	ſuma.
641621946	Reſid 2.º
640507376.	+ Z^4
1114568.	+ Z^3
2.	+ Z^2
641621946	ſuma.
00	Reſid 3.º

Figura 2. Tabla para operaciones principales (Zaragoza, 1669, p. 198)

Con este trabajo, hemos realizado una actividad de enseñanza-aprendizaje utilizando el método general de resolución de ecuaciones por expansión binomial, con la configuración empleada por José Zaragoza. El objetivo ha sido que el alumnado conozca y aprenda a manejar este método de resolución. Posteriormente se analizará el grado de comprensión de la fundamentación teórica y de la técnica empleada por parte del alumnado de Bachillerato.

De esta manera, hemos pretendido ampliar el grado de comprensión de los métodos de resolución de ecuaciones y de la conexión de estos métodos generales de tipo algebraico con su origen aritmético como método de extracción de raíces. Con la adquisición de estos conocimientos, el alumnado de Bachillerato a través de la historia del álgebra profundiza en sus conocimientos algebraicos, en particular sobre la resolución de ecuaciones y de este modo, está mejor preparado para abordar el aprendizaje de métodos más modernos, como el de Newton-Raphson, que es una evolución del método general enseñado. Además, esta experiencia favorece que el alumnado conecte aritmética y álgebra.

En definitiva, consideramos que es una actividad beneficiosa para el alumnado según los aspectos indicados por Jankvist (2009, 2010), haciendo uso de la historia de las matemáticas como meta para conocer la evolución histórica de un concepto matemático, y como herramienta para aprender un nuevo método general de resolución de ecuaciones.

MARCO TEÓRICO

Distintos investigadores en el campo valoran el potencial de la inclusión de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza, como Fauvel y Van Maanen (2000), González Urbaneja (2004), Jankvist (2009, 2010), Torres et al. (2014), Chorlay (2016), Furinghetti (2020) o Kjeldsen et al. (2022). En particular, Fauvel y Van Maanen (2000) consideran que el estudio de la Historia de las Matemáticas debe estar incluido en el estudio de las mismas matemáticas, siendo un potencial recurso enriquecedor para su enseñanza. Fauvel (1991) considera variedad de argumentos por los que incluir la Historia de las Matemáticas en el aula. Entre ellos:

- Son una motivación para el alumnado.
- Enseñan la evolución de los conceptos.
- Indican a los profesores las dificultades que se encontraron en el pasado y que posiblemente se reproduzcan en el presente.

Nickel (2013, 2016) establece algunos usos de la Historia de las Matemáticas en el aula:

- Enseñanza de historias cortas que fomenten la afectividad hacia los personajes.
- Mostrar parte de la evolución de los conceptos.
- Enseñar otras formas ya desechadas de procesos matemáticos.

Pero también hay obstáculos a la hora de introducir la Historia de las Matemáticas en contextos educativos. Maza (1994) considera que uno de los obstáculos es la poca formación del profesorado en Historia de las Matemáticas y Santillán (2011) ve como uno de los grandes retos el adaptar los problemas que aparecen en los libros del pasado a contextos actuales.

En los últimos años variedad de trabajos han utilizado la Historia de las Matemáticas en contextos educativos, entre ellos podemos citar los de Arcavi (1987), Testa (1996), Jahnke et al. (2006), Haverhals y Roscoe (2010), Salinas-Herrera et al. (2011), Chorlay (2012), Jankvist (2014), Durand-Guerrier (2016), Salone (2016), Ying y Huang (2016), Madrid et al. (2021), Thomsen y Jankvist

(2022), Chorlay (2022), Demattè y Furinghetti (2022) o de Varent y Décamp (2022).

En el área del álgebra, tema de nuestro estudio, hay también trabajos en los que se utiliza la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico. Entre otros, los trabajos de Barnett et al. (2012), Michel-Pajus (2012), Goktepe y Ozdemir (2013), Delgado y Butto (2015), Yanjun y Ping (2016) o Fülöp (2020).

Deteniéndonos en estos últimos, encontramos trabajos que, como el que planteamos, utilizan fuentes históricas del pasado en el aula actual. Por ejemplo, Barnett et al. (2012) plantean una experiencia para alumnado de primer curso de álgebra universitaria, en el que se han llevado al aula fuentes primarias de libros sobre álgebra de Boole, mostrando la evolución de los conceptos a lo largo de la historia. Delgado y Butto (2015) realizan con alumnado de Bachillerato una experiencia consistente en que los estudiantes busquen expresiones algebraicas en los "Elementos" de Euclides. Yanjun y Ping (2016) utilizan problemas que aparecen en el famoso libro histórico chino Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático para despertar la curiosidad y el interés de estudiantes de entre 12 y 14 años.

En la línea de utilizar métodos o algoritmos del pasado, Goktepe y Ozdemir (2013) han realizado una experiencia en el aula con 21 estudiantes de entre 11 y 12 años, mostrando el método babilónico de extracción de raíces y concluyendo que ha sido una experiencia motivadora pero vista como de poca utilidad real por el alumnado. Michel-Pajus (2012) lleva a las aulas de secundaria una serie de experiencias basadas en el uso de algoritmos históricos, como los chinos e indios de extracción de raíces, o los de aproximación de Herón, Jordanus Nemoranius y Euler. Otro trabajo en esta línea es el de Fülöp (2020), que realiza un estudio con alumnado de entre 11 y 12 años acerca del paso de la aritmética al álgebra. En concreto utiliza el método histórico de la Regula Falsi para que los estudiantes perciban cómo dándole valores a una incógnita y calculando el error, sucesivamente el problema va tomando sentido.

También en España hay trabajos de investigación en los que se lleva al aula la Historia de las Matemáticas, como los de Santágueda-Villanueva y Lorenzo-Valentín (2019), Barreras y Oller-Marcén (2019) o León-Mantero y Madrid (2019). Santágueda-Villanueva y Lorenzo-Valentín (2019) realizan una experiencia con estudiantes de grado de maestro en la que ponen en valor la importancia que puede tener la inclusión de la Historia de las Matemáticas a la hora de enseñar y aprender matemáticas. La consecuencia fue que los futuros maestros fueron más conscientes del proceso histórico-evolutivo de las matemáticas y de sus aspectos más humanos y dinámicos. Barreras y Oller-Marcén (2019) realizan una experiencia con 48 profesores de educación secundaria en la que se recrea un problema aritmético que aparece en un libro de matemáticas del siglo XVI. León-Mantero y Madrid (2019) realizan una experiencia con futuros maestros en la que se utilizan libros de texto españoles del siglo XVIII para tratar diferentes aspectos de la relación del número pi con el cálculo del perímetro de la circunferencia y el área del círculo.

En definitiva, la revisión de la literatura realizada muestra cómo el uso de métodos históricos extraídos de libros del pasado plantea diferentes posibilidades en el aula de matemáticas y, considerando esto, planteamos nuestro estudio.

METODOLOGÍA

Se trata de una investigación exploratoria, descriptiva y ex post-facto (Bisquerra, 1989) en la que hemos tomado notas, recopilado documentos para, posteriormente, analizarlos y llegar a conclusiones que nos permitan mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para tomar datos y analizar los resultados de la experiencia se ha diseñado un cuestionario que el alumnado ha resuelto al final de la experiencia en el aula.

Población y muestra

La experiencia en el aula a partir de la cual se ha desarrollado este estudio se ha realizado con un total de 22 alumnos y alumnas de entre 16 y 17 años, que cursan 1º de Bachillerato en la modalidad de Ciencias y Tecnología en la asignatura de Matemáticas I. El alumnado cursa sus estudios en un instituto público de educación secundaria de la provincia de Córdoba, en Andalucía (España).

El grupo de estudiantes tiene un nivel académico medio-alto, con una gran predisposición para aprender, sobre todo en materias de tipo científico y tecnológico. El ambiente en el aula es bueno y suele haber colaboración entre el alumnado durante las sesiones a la hora de resolver los problemas.

Experiencia realizada

La actividad realizada en el aula se integra en el currículo actual español, ya que según el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril entre los objetivos del Bachillerato figura: “h/ Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social” (Real Decreto 243/2022, pp. 7-8). Además, uno de los Criterios de Evaluación es: “6.2 Analizar la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad, reflexionando sobre su contribución en la propuesta de soluciones a situaciones complejas y a los retos científicos y tecnológicos que se plantean en la sociedad” (Real Decreto 243/2022, p. 264).

En cuanto a los Saberes Básicos relacionados con nuestra experiencia en el aula, destacamos los siguientes (Real Decreto 243/2022):

- Sentido algebraico: modelización y resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas en diferentes contextos, comparando diferentes algoritmos.
- Sentido socioafectivo: tratamiento del error individual y colectivo como movilizador de conocimientos previos y generador de oportunidades.

Valoración de la contribución de las matemáticas y los matemáticos a lo largo de la historia en el avance de la ciencia y la tecnología.

La investigación siguió cuatro fases, siendo las tres primeras en contacto con el alumnado y la última de recopilación y análisis de los resultados. Las tres primeras fases tuvieron una duración conjunta de 6 sesiones de clase, de una hora cada una, desarrolladas en el primer trimestre del curso académico 2022-2023.

En la primera fase, durante una sesión en el aula situamos el método general de resolución en la época y en el contexto matemático en que se desarrolló. Para ello, en primer lugar, le mostramos al alumnado algunas ecuaciones en las que la aplicación de los métodos que conocen es inviable (por ejemplo, ecuaciones de tercer grado en las que el término independiente tiene muchos divisores y es inviable aplicar la regla de Ruffini). De esta forma, pusimos de manifiesto la necesidad de aplicar otras técnicas para aumentar el tipo de ecuaciones que pueden resolver.

Tras esta situación motivacional, y mediante una presentación en Powerpoint y un video obtenido en la web (Muller, 2021), introdujimos brevemente la evolución del álgebra a lo largo de la historia, hasta llegar a la época en la que se difunde el método que se explicó (siglo XVII). Además, se proporcionó un pequeño esquema del método de resolución con la configuración de José Zaragoza, y material adicional de consulta que amplía lo explicado previamente en la presentación.

La segunda fase se desarrolló durante 4 sesiones en las que explicamos detenidamente el método de cálculo de raíces y su adaptación para resolver ecuaciones. En esta fase realizamos ejercicios y problemas variados para que el alumnado adquiriese la técnica. Para ello, dos sesiones se dedicaron a aprender a calcular raíces y otras dos a aplicar el método para resolver ecuaciones.

Para explicar el método de resolución, comenzamos resolviendo en el aula una sencilla ecuación como ejemplo. Sea la ecuación

$$6x^3 - 2x^2 + 3x = 1492533.$$

El método general comienza separando en grupos de dígitos el término independiente de la ecuación, los grupos constan de tantos dígitos como grado de la ecuación, y se debe comenzar por la derecha.

$$1.492.533$$

Esta separación en grupos de dígitos nos indica el número de dígitos de la solución buscada. Así, en principio, la ecuación debería tener como solución un número de 3 dígitos pero como el coeficiente del monomio de mayor grado en la ecuación $(6x^3)$ es mayor que el grupo de números más a la izquierda, se unen los dos primeros grupos y por tanto, la solución tiene sólo dos dígitos.

$$6 > 1 \rightarrow Solución\ 2\ dígitos \rightarrow 1492.533$$

La solución entonces será de la forma $10A + B$, donde A es el dígito más significativo y B el menos significativo (decenas y unidades respectivamente).

Para la estimación del dígito más significativo se calcula la raíz cúbica (al tratarse de una ecuación cúbica) del grupo más a la izquierda entre el coeficiente del monomio de mayor grado, es decir $\sqrt[3]{\frac{1492}{6}}$, y tomamos su valor entero por defecto. Por tanto, $\sqrt[3]{\frac{1492}{6}} = 6{,}28839\ldots \approx 6$.

Como la solución de la ecuación debe ser de la forma $10A + B$, entonces:

$$6 \cdot (10A + B)^3 - 2 \cdot (10A + B)^2 + 3 \cdot (10A + B) = 1492533$$

Si desarrollamos los binomios:

$$6 \cdot (10A + B)^3 = 6 \cdot 10^3 A^3 + 6 \cdot 3 \cdot 10^2 A^2 B + 6 \cdot 3 \cdot 10 A B^2 + 6B^3$$

$$2 \cdot (10A + B)^2 = 2 \cdot 10^2 A^2 + 2 \cdot 2 \cdot 10AB + 2B^2$$

$$3 \cdot (10A + B) = 3 \cdot 10A + 3B$$

El primer sustractor (también llamado restador) son los términos que sólo contienen al primer dígito (ya estimado), y se lo restamos al término independiente, obteniendo el primer residuo.

$$\begin{aligned} R_1 &= 1492533 - 6 \cdot 10^3 A^3 + 2 \cdot 10^2 A^2 - 3 \cdot 10A \\ &= 1492533 - 1296000 + 7200 - 180 = 203553 \end{aligned}$$

Ahora, para estimar los sucesivos dígitos (en este caso sólo queda uno), hay autores que utilizan un divisor reducido y otros no. Esta decisión por supuesto tiene distintas implicaciones, por un lado, el tomar pocos términos para la estimación facilita los cálculos, pero, por otro lado, puede provocar una sobrestimación de los dígitos, con el consiguiente recálculo a la baja. Así mismo, si se utilizan muchos términos, hay una carga alta de cálculos, pero una mayor precisión, evitando en muchos casos los recálculos.

Zaragoza es muy versátil en este aspecto, ya que utiliza divisores reducidos cuando es muy improbable que se produzcan subestimaciones o sobrestimaciones. Sin embargo, en este caso, utiliza un divisor no reducido ya que la presencia de coeficientes en los diferentes términos de la ecuación hace que el divisor, si se reduce, provoque una subestimación en los cálculos, y por tanto sería necesario realizar un recálculo.

$$\begin{aligned} D_1 &= 6 \cdot 3 \cdot 10^2 A^2 B + 6 \cdot 3 \cdot 10AB^2 + 6B^3 - 2 \cdot 2 \cdot 10AB - 2B^2 \\ &\quad + 3B \; \{desestimando\ B\} \rightarrow D_1 \\ &= 64800 + 1080 + 6 - 240 - 2 + 3 = 65647 \end{aligned}$$

Estimamos B como la parte entera del cociente $\frac{R_1}{D_1} = \frac{203553}{65647} = 3{,}101 \ldots$ ...Es decir B=3

Ahora confeccionamos el restador o sustractor $S_1 = 6 \cdot 3 \cdot 10^2 A^2 B + 6 \cdot 3 \cdot 10AB^2 + 6B^3 - 2 \cdot 2 \cdot 10AB - 2B^2 + 3B = 194400 + 9720 + 162 - 720 - 18 + 9 = 203553$

Y, por último, el siguiente residuo.

$$R_2 = R_1 - S_1 = 203553 - 203553 = 0$$

Y como la solución tiene dos dígitos, que ya hemos calculado, y el residuo es 0, esto quiere decir que la solución es $10A + B = 10 \cdot 6 + 3 = 63$ y es exacta.

Podemos ver que la cantidad de cálculos es alta y es bastante probable equivocarse, por lo que es necesario organizar bien las operaciones para evitar errores.

La configuración que aporta José Zaragoza nos parece adecuada para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje ya que se ayuda de tablas en las que aparecen identificados los términos a calcular y operar. Hay una tabla general para las operaciones globales y, adicionalmente, una tabla por cada término de la ecuación en la que se sitúan las operaciones para obtener los divisores y los restadores. Ambas tablas las podemos ver en la figura 3 para este ejemplo y con un diseño propio (basado en el diseño de Zaragoza).

R_0	1	4	9	2	.5	3	3	63
$-$	1	2	9	6	.			$6A^3 = 1296$
$+$				7	2	.		$2A^2 = 216$
$-$					1	8	.	$3A = 18$
R_1		2	0	3	5	5	3	$B \approx \frac{203553}{65886 - 242 + 3} = \frac{203553}{65647} \approx 3$
$-$		2	0	4	2	8	2	
$+$					7	3	8	
$-$							9	
R_2							0	

$A = 60$

Número	*Coeficiente*	*Valor de A*	*Divisor*	*Valor de B*	*Restadores*
6	3	$A^2 = 3600$	64800	$B = 3$	194400
6	3	$A = 60$	1080	$B^2 = 9$	9720
6	1		6	$B^3 = 27$	162
			65886		204282

Número	*Coeficiente*	*Valor de A*	*Divisor*	*Valor de B*	*Restadores*
2	2	$A = 60$	240	$B = 3$	720
2	1		2	$B^2 = 9$	18
			242		738

Número	*Coeficiente*	*Valor de A*	*Divisor*	*Valor de B*	*Restadores*
3	1		3	$B = 3$	9
			3		9

Figura 3. Tablas para contener las operaciones globales y los divisores y restadores de cada término de la ecuación

La paulatina sustitución del método por la adaptación de Newton se debió a que en este los cálculos son más sencillos y no existe el inconveniente de la sobreestimación ni la subestimación, ya que se permite la suma y resta de valores, balanceándose el resultado alrededor de la solución, con mayor precisión en cada iteración. La mejora introducida por Rahpson es la introducción de iteraciones. Y la configuración actual se debe a Simpson, que introduce funciones y sus derivadas (Ypma, 1995).

Método de recopilación de datos

Por último, en la tercera fase, de una duración de una hora, el alumnado respondió individualmente un cuestionario, validado mediante una triangulación de expertos de las universidades de Córdoba y Pontificia de Salamanca, que constó de 10 preguntas sobre aspectos conceptuales e históricos del método de resolución y 2 ejercicios de resolución (uno de cálculo de una raíz cúbica y otro de la resolución de una ecuación de tercer grado) completos. Decidimos evaluar el cuestionario académicamente porque eso favorecía la motivación ya que, aunque muchos estudiantes tienen motivaciones internas (saber más, curiosidad, etc…), nos pareció conveniente favorecer las motivaciones externas (como el obtener una mejor calificación académica). Además, a la hora de contestar el cuestionario se permitió el uso de material adicional, ya que la intención no era que memorizasen nombres y fechas, sino que los conocieran, y además dominaran los métodos de cálculo con la interiorización de los procesos.

Las 4 primeras CE (Cuestiones Evaluables) consistían en preguntas acerca de conocimientos históricos que se explicaron durante la primera sesión, y que aparecen en el documento de ampliación que se proporcionó. Las cuestiones son:

- CE1: ¿En qué tres fases se ha desarrollado el lenguaje algebraico desde sus inicios hasta la actualidad?
- CE2: ¿Existe alguna fórmula para resolver ecuaciones de grado mayor a 4? En caso negativo, ¿quién lo demostró?
- CE3: Indica algún dato que recuerdes del matemático José Zaragoza. ¿Conoces a algún otro matemático español? En caso afirmativo, indícalo.
- CE4: ¿Qué matemático árabe del siglo XII es considerado el primero en utilizar una adaptación del método de cálculo de raíces para resolver ecuaciones?

Las cuestiones evaluables de la 5 a la 10 han sido diseñadas para indagar sobre aspectos conceptuales del método de resolución. Son las siguientes:

- CE5: José Zaragoza resuelve la siguiente ecuación:

  La diferẽcia de + y — es la *Cãtidad*. 49997584000.
  igual a $1Z^5 + 20Z^3 + 100Z^2 - 10Z^4 - 400Z^1$

  ¿Por qué no está ordenada según el grado de los monomios sino los términos sumados delante de los restados?
- CE6: Si a la hora de calcular un residuo este resulta negativo, ¿por qué ha ocurrido eso?, ¿qué habría que hacer en ese caso?

- CE7: Si a la hora de calcular un dígito se obtiene más de 9, ¿por qué ha ocurrido esto?, ¿qué habría que hacer en ese caso?
- CE8: ¿Se podría aplicar el método de resolución para ecuaciones con soluciones negativas?, ¿por qué?
- CE9: Indica el desarrollo binomial de $(A + B)^5$
- CE10: ¿Cuántos dígitos es probable que tenga la solución de la siguiente ecuación? ¿Por qué? $20x^3 + 6x^2 - 5x = 11234392125$

Por último, en la CE11 se les pidió que calcularan $\sqrt[3]{12812904}$ con el método aprendido y en la CE12 que resolvieran $x^3 - 2x^2 + 5x = 40600$ con dicho método.

Tratamiento de los datos

La última fase fue de trabajo de recopilación y análisis de los resultados por parte del investigador, realizando un análisis cualitativo de las diez primeras cuestiones y un análisis más técnico de los dos ejercicios resueltos, obteniendo como resultado una información que nos servirá para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La recopilación de los datos se realizó mediante una lectura de cada una de las cuestiones, comprobando si la respuesta dada por el alumnado es correcta o no. Se tuvo en cuenta el hecho de que las respuestas pueden estar redactadas de diferentes formas y ser más o menos precisas. El investigador decidió en cada caso si la respuesta puede considerarse correcta o no, anotando en algunos casos indicaciones acerca de detalles a tener en cuenta. Posteriormente se realizó un proceso de validación y consenso por expertos en didáctica de las matemáticas de la Universidad Córdoba y la Pontificia de Salamanca.

Para tratar los datos de manera global se utilizó una hoja de Excel, con tantas pestañas como cuestiones a analizar (12). Cada pestaña contiene un listado del alumnado y la respuesta dada a la cuestión concreta, además de observaciones a tener en cuenta.

RESULTADOS

La primera cuestión (CE1), de carácter histórico, en la que se preguntaba sobre las fases por las que ha pasado el lenguaje algebraico hasta llegar al actual, fue contestada de manera correcta por casi la totalidad del alumnado, aunque de diferentes maneras y profusión de detalles. Como se explicó en la primera sesión, las fases son las que estableció Nesselman (1842): retórica, sincopada y simbólica. De los 22 alumnos y alumnas, solamente un estudiante, el codificado como A1, dejó la pregunta en blanco, por lo que el 95% del alumnado contestó correctamente y el 5% no. Una de las respuestas es la siguiente:

Estudiante A2: Ha pasado por 3 fases: álgebra retórica (babilonios, egipcios, árabes), álgebra sincopada (desde Diofanto s. III, hasta Viète s. XVI) y álgebra simbólica (desde Viète hasta la actualidad).

En la CE2 se preguntaba si conocían alguna fórmula para resolver ecuaciones de grado mayor a 4 y si no la había, quién lo había demostrado. Esto también se explicó en la primera sesión. Fue en 1824 cuando el matemático noruego Abel demostró que no hay fórmulas para resolver ecuaciones de grado mayor a 4 (Rzedowski, 2016).

De los 22 alumnos y alumnas, 19 respondieron que no existía una fórmula y que lo demostró Abel. Algunos dieron más detalles que otros, pero la respuesta es similar. Hubo 3 estudiantes que contestaron con el método general de resolución, pero se les preguntó por una fórmula no por un método. Además, en la primera sesión se explicó que el método general tampoco resuelve todas las ecuaciones. Por lo que el 86% contestó correctamente y el 14% no.

Una de las respuestas dadas es la siguiente:

Estudiante A15: No la hay, a primeros del siglo XIX, Abel (1802-1829) demostró que no había ninguna fórmula polinómica para resolver ecuaciones polinómicas con grado mayor a 4.

En la CE3 se preguntó si conocían algún dato de José Zaragoza y si conocían a otro matemático español además de él. Todos respondieron con mayor o menor detalle sobre algún dato de Zaragoza, pero 4 de ellos no añadieron el nombre de ningún matemático español más, seguramente porque no leyeron correctamente la pregunta, ya que disponían de material para buscar e incluso podían utilizar Internet para ello. De los 18 que indicaron otro matemático más, 7 de ellos añadieron a Julio Rey Pastor, y el resto de nombres se repartió entre Andrés Puig, Juan Caramuel y otros, algunos de ellos buscados en internet por el alumnado, ya que no se habían mencionado en las sesiones previas. Como muestra, una de las respuestas:

Estudiante A16: Zaragoza: doctor en Filosofía por la Universidad de Valencia, profesor en diferentes colegios jesuitas. Pedro Abellanas: fue un matemático español, considerado una de las personalidades más influyentes de la matemática española durante la mitad del siglo XX.

La otra cuestión con carácter histórico es la CE4. La pregunta era si conocían al matemático árabe que en el siglo XII utilizó por primera vez (que sepamos) el método de cálculo de raíces para resolver ecuaciones. Tal y como se explicó en la primera sesión, el primero del que tenemos constancia fue el matemático persa al-Tūsī (Rashed, 1994). De los 22 alumnos y alumnas, 19 contestaron correctamente y 3 dijeron que era el otro matemático árabe al-Khwārizmī. Es decir, el 86% contestó el nombre correcto y el 14% no.

Las cuestiones CE5 a CE10 son de carácter conceptual y referentes al método de resolución. En la CE5 se les mostró una organización de los términos de una ecuación incluida en el texto de Zaragoza en la que estos no están ordenados de mayor a menor grado, sino que los sumados van delante de los restados, y se les preguntó por qué Zaragoza los ordenó así. Siendo la respuesta que esto lo hizo el autor porque no concebía restar de donde no hay. 13 de los 22 alumnos y alumnas respondieron correctamente a la cuestión, dando unas explicaciones más o menos extensas. Pero hay un porcentaje elevado, el 41% (9 estudiantes), que contestó en otro sentido. De los 9 que respondieron incorrectamente, 8 dieron razones que no se corresponden con la verdadera razón y uno lo dejó en blanco. Algunas de las respuestas incorrectas son las siguientes:

Estudiante A21: Porque no usaban números negativos, ya que aplicaban sus cálculos a objetos reales.

Estudiante A3: Porque en aquella época era inconcebible que ambos signos pudieran estar juntos. Se agrupaban los monomios positivos por una parte y los negativos por otra.

Estudiante A11: Porque no conocían los signos negativos, entonces no podían ordenarlos correctamente.

La CE6 es una cuestión más técnica, se pregunta qué tienen que hacer si al calcular un residuo se obtiene un valor negativo. Esto puede ocurrir si se ha sobreestimado el valor de un dígito de modo que, al restar al residuo, le estamos restando un valor superior al correcto y por eso se obtiene el residuo negativo. Cuando ocurre esto, se debe volver atrás, disminuir la estimación en una unidad y probar de nuevo hasta obtener un residuo positivo. Destacar en este caso que 21 de los 22 alumnos y alumnas respondieron correctamente a la pregunta y sólo 1 lo hizo de manera incorrecta, poniendo en la respuesta una explicación que incluye a la pregunta:

Estudiante A1: Porque hemos puesto el valor de A incorrecto. Tendría que revisar el valor de A.

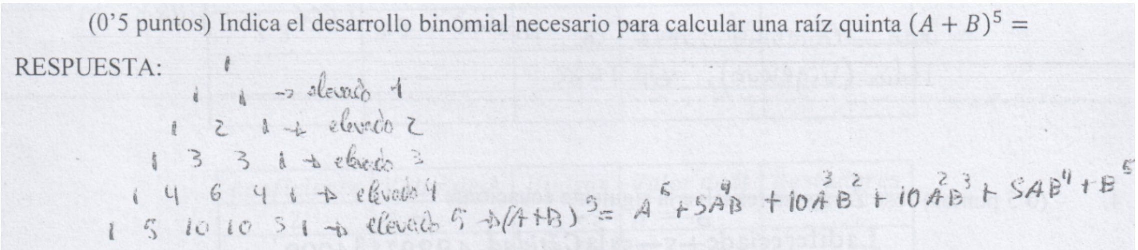
En la CE7 se preguntó por el caso contrario, cuando un dígito se estima por encima de 9, por qué ha ocurrido esto y qué se debe hacer. Esto ocurre porque se ha subestimado el valor del dígito anterior, por lo que habrá que volver atrás en los cálculos y estimar en una unidad superior el anterior dígito. La respuesta la dio correctamente el 77% del alumnado, por lo que hay 5 estudiantes que respondieron de manera incorrecta. Algunas de las respuestas erróneas fueron:

Estudiante A13: Es porque se ha dividido mal o al hacer la tabla te sale mal. Revisar las operaciones tanto en la tabla de los residuos como en la de los coeficientes, ya que a A puede faltarle 0 o algo más.

Estudiante A22: Posiblemente hayas cometido un fallo con los divisores o también es posible que a la hora de hallar B se haya olvidado quitar los 3 últimos números de R1 si posee un valor superior a 1000000.

En la CE8 se preguntó si se podía utilizar el método de resolución para resolver ecuaciones con soluciones negativas, y las respuestas fueron correctas en el 100% de los casos, algunas con más detalle que otras.

En la CE9 se les pidió que desarrollaran un binomio, tal y como se hace en el método de resolución y tal como se ha ido enseñando en las sesiones, utilizando el triángulo de Pascal-Tartaglia. Se trataba del binomio $(A + B)^5$. Para obtener los coeficientes han tenido que desarrollar el triángulo y configurar las potencias de los dos términos del binomio correctamente. Fueron 19 de los 22 alumnos y alumnas los que lo hicieron correctamente y 3 quienes se equivocaron en los exponentes de los términos. 7 de los que lo hicieron correctamente dibujaron incluso el triángulo, como el de la figura 4.


(0'5 puntos) Indica el desarrollo binomial necesario para calcular una raíz quinta $(A + B)^5 =$

RESPUESTA:

1
1 1 → elevado 1
1 2 1 → elevado 2
1 3 3 1 → elevado 3
1 4 6 4 1 → elevado 4
1 5 10 10 5 1 → elevado 5 → $(A+B)^5 = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5$

Figura 4. Respuesta dada por el estudiante A20 a la CE9

La CE10 les pedía que indicaran el número de dígitos de la solución a una ecuación, y por qué era ese número. Para saber el número de dígitos se debe separar el término independiente en grupos de tantos dígitos como grado tiene la ecuación (comenzando por la derecha) y luego comparar el grupo más a la izquierda con el valor del coeficiente del término de mayor grado. En caso de que el coeficiente sea menor que el grupo, se unirán los dos grupos más a la izquierda en uno sólo y la solución tendrá un dígito menos que el indicado inicialmente. Y esta es otra cuestión técnica que se enseñó a lo largo de las sesiones de trabajo. 16 estudiantes indicaron el número correcto y proporcionaron una explicación adecuada. Mientras que 3 indicaron el número correcto de dígitos, pero la explicación dada no era adecuada y otros 3 indicaron un número incorrecto de dígitos. Los 3 que dieron el número correcto de dígitos, pero cuya explicación era incorrecta, confundieron el número de separaciones con el número de dígitos (y claro, el número de separaciones es uno menor que el de dígitos, por lo que acertaron en el número, pero no en la explicación). Como muestra de uno de estos casos:

Estudiante A14: Es posible que salga 3. Debido a que tiene 3 partes el residuo.

Para los dos ejercicios de cálculo y resolución completos (CE11 y CE12) tuvieron la opción de, o bien crear las tablas a mano, o bien traerse unas plantillas elaboradas previamente con las tablas en blanco. Algunos utilizaron las plantillas y otros confeccionaron las tablas con regla o a mano directamente.

En el primer ejercicio, el CE11, se pidió que calcularan la raíz cúbica de 12812904 con el método aprendido. Sólo un estudiante (A1) se equivocó en la solución ya que, a pesar de obtener el dígito correcto, luego lo copió en otra parte incorrectamente, y los cálculos no fueron los correctos, de forma que no obtuvo un residuo final 0, que indicaría que la solución era la buscada. Pero todo el alumnado confeccionó las tablas correctamente y realizó los cálculos adecuados. Las únicas pequeñas diferencias fueron a la hora de posicionar los resultados intermedios, algunos utilizaron ceros para completar a la derecha y otros utilizaron el alineamiento de los dígitos (parecido al método de los puntos utilizado por Zaragoza). Son maneras diferentes de organizar los datos que aprendieron en las sesiones y cada estudiante decidió utilizar aquella que le resultaba más adecuada: la forma original de usar puntos, usar espacios en blanco a la derecha o utilizar ceros para completar a la derecha (en concreto 1 estudiante usó puntos, 9 espacios y 12 usaron ceros a la derecha). En la siguiente figura vemos las tres maneras de configurar los datos (figura 5).

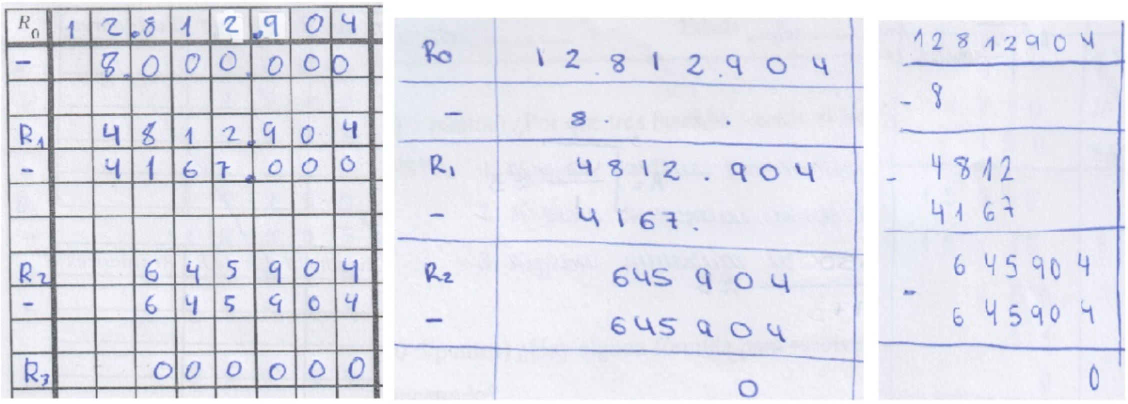
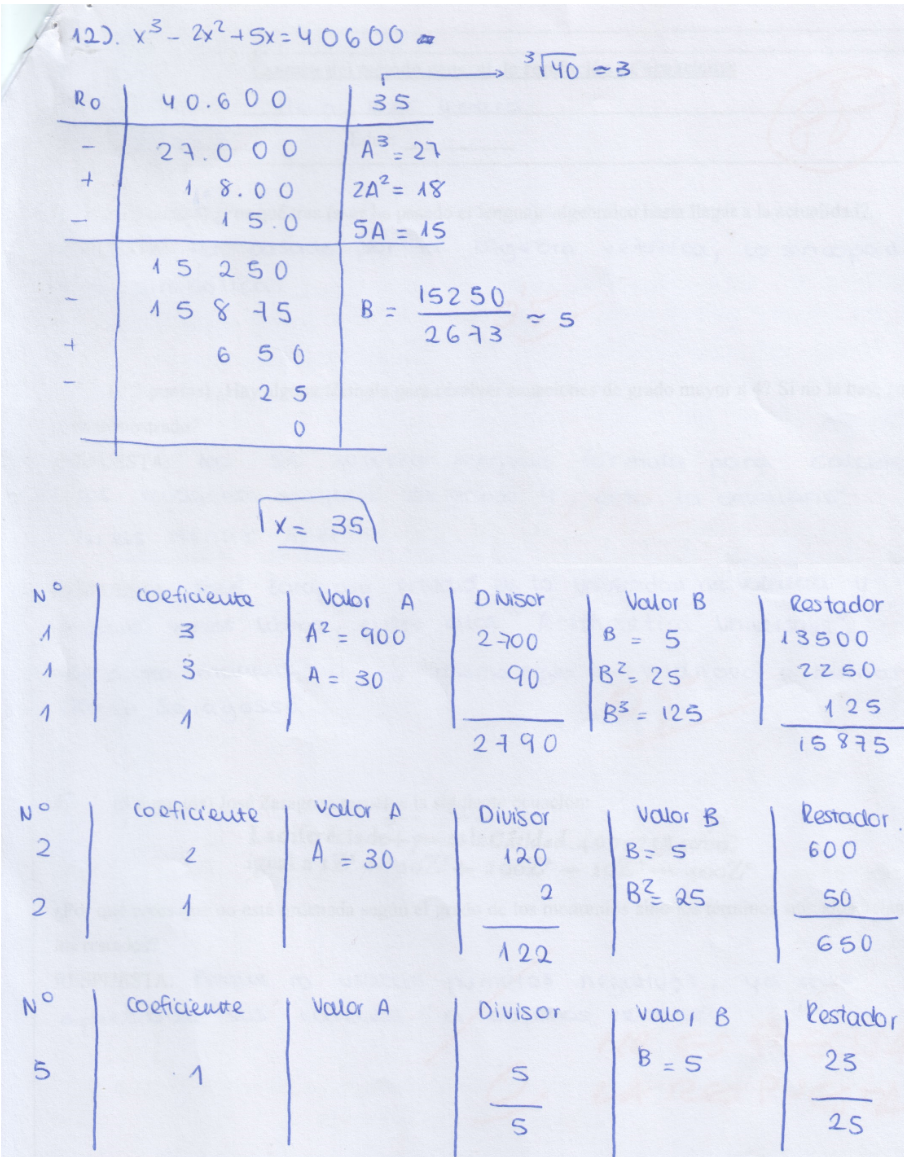


Figura 5. Configuración de ceros (A3), puntos (A17) o espacios (A22) dada para la CE11

Por último, en la CE12 se pedía resolver una ecuación de tercer grado. La solución tenía dos dígitos y solamente el mismo estudiante que falló en parte la CE11 dejó esta cuestión en blanco. El resto resolvió correctamente el ejercicio, empleando cada cual el sistema de posicionamiento (tal y como hizo en el ejercicio anterior) preferido. Utilizaron las tablas adecuadas y realizaron los cálculos correctamente. Como ejemplo, podemos ver la resolución realizada por el estudiante A21 (figura 6).



12). $x^3 - 2x^2 + 5x = 40600$

$\sqrt[3]{40} \approx 3$

Ro	40.600	35
−	27.000	$A^3 = 27$
+	18.00	$2A^2 = 18$
−	15.0	$5A = 15$
	15 250	
−	15 875	$B = \frac{15250}{2673} \approx 5$
+	650	
−	25	
	0	

$\boxed{x = 35}$

Nº	coeficiente	Valor A	Divisor	Valor B	Restador
1	3	$A^2 = 900$	2700	$B = 5$	13500
1	3	$A = 30$	90	$B^2 = 25$	2250
1	1			$B^3 = 125$	125
			2790		15875

Nº	coeficiente	Valor A	Divisor	Valor B	Restador
2	2	$A = 30$	120	$B = 5$	600
2	1		2	$B^2 = 25$	50
			122		650

Nº	coeficiente	Valor A	Divisor	Valor B	Restador
5	1		5	$B = 5$	25
			5		25

Figura 6. Resolución de la CE12 dada por el estudiante A21

Discusión

En las cuestiones relacionadas con la historia (CE1 a CE4), extraídas de la presentación y el documento más extenso explicado en la primera sesión, sobre el 80% del alumnado contestó de manera acertada las cuatro, y casi todos al menos 3 de ellas. Estos fallos resultan sorprendentes porque el alumnado disponía de todo el material a la hora de responder al cuestionario, ya que el objetivo no era que memorizasen los datos, sino que se familiarizaran con la historia del álgebra. Así, los resultados satisfactorios eran esperables.

En las CE5 a CE10, que tenían que ver con aspectos conceptuales del método de resolución, se obtuvieron peores resultados, como era de esperar. Destacamos la CE5, en la que se pedía que explicaran por qué Zaragoza ordena los términos de la ecuación con los sumados antes que los restados, y en la que sobre el 40% no supieron dar una explicación acertada, confundiendo la solución de una ecuación con los resultados intermedios de operaciones. Quizás, en la sesión inicial no se explicó detenidamente este aspecto considerando que era ya conocido desde cursos previos y por ello muchos confundieron estas cuestiones.

Las CE6 y CE7 tienen que ver con lo que ocurre si sobreestimamos o subestimamos valores de los dígitos en el proceso de cálculo. Es un aspecto técnico que, según los resultados, comprendieron en general bien. Para la subestimación hubo un 25% del alumnado que no respondió correctamente, bajando al 5% en la sobrestimación. Esta diferencia quizás se deba a que aparece más frecuentemente el caso de la sobrestimación que el de la subestimación, por lo que tuvieron que enfrentarse más veces a una que a otra. Lo que sí se quedó claro es que Zaragoza no considera soluciones negativas, que es la respuesta a la CE8 y que respondió correctamente la totalidad del alumnado.

En la CE9, en la que se pedía el desarrollo de un binomio con exponente 5, el 86% lo hizo correctamente, algunos incluso dibujaron el triángulo de Tartaglia-Pascal. Los estudiantes que no respondieron correctamente, no lo hicieron precisamente por los coeficientes sino por haber introducido números confundiendo coeficientes con exponentes de las potencias.

En la CE10, en la que se pedía que indicaran el número de dígitos de una ecuación, 6 estudiantes no contestaron correctamente o no explicaron el por qué, aunque 5 de ellos resolvieron correctamente los dos ejercicios finales en los que se enfrentaron a ese mismo problema. Posiblemente se deba a que aprendieron bien la técnica, pero sin profundizar en los aspectos teóricos.

De las dos últimas cuestiones (CE11 y CE12), los dos ejercicios más completos y técnicos, podemos concluir que la inmensa mayoría del alumnado aprendió correctamente el método de resolución, tanto para el cálculo de raíces como para la resolución de ecuaciones. Posiblemente se deba a que realizamos multitud de ejemplos durante las 4 sesiones y a que, al tratarse de un proceso mecánico, cuando el alumnado lo interioriza, ya ha podido automatizarlo.

Añadiremos que en la primera sesión de las cuatro dedicadas a la enseñanza y práctica con el método, el enfoque inicial fue de tipo deductivo, mostrando al alumnado los fundamentos teóricos del método de resolución, para después pasar a la práctica con ejemplos. Pero pronto nos dimos cuenta que mediante este enfoque los estudiantes estaban perdiendo el interés y aumentaba la distracción. Entonces cambiamos de estrategia y adoptamos un enfoque inductivo, de forma que comenzamos con la resolución práctica, primero con ejemplos sencillos y luego más complejos. Así, a través de la práctica, conseguimos que los estudiantes comprendieran el proceso de resolución y adquirieran autoconfianza. Paulatinamente, conforme los ejercicios a resolver se iban complicando, aparecían aspectos conceptuales que en ese momento explicábamos y que el alumnado comprendía mejor al haber practicado previamente.

Esta idea concuerda con investigaciones previas en esta línea, por ejemplo, Panagiotou (2011) en una experiencia con estudiantes de entre 16 y 17 años, en la que ha introducido el proceso que condujo a la idea de logaritmo antes que el concepto de logaritmo. Respecto a esta idea, Freudentahl (1973) dijo que las definiciones no deben aparecer al principio de las explicaciones, ya que, si se pretende aprender sobre algo, hay que saber previamente qué es y para qué sirve. Digamos que hicimos un proceso inductivo de enseñanza-aprendizaje, partiendo del cómo y llegando al por qué.

Así mismo, nuestro trabajo sigue la línea de investigaciones previas como la de Fülöp (2020), que trabaja con estudiantes el método histórico de la Regula Falsi para facilitar la transición del pensamiento procedimental al estructural, que antecede a la transición de la aritmética al álgebra.

Si separamos las respuestas dadas a estas 12 cuestiones en correctas e incorrectas, los resultados son los que se muestran (ver la tabla 1).

Tabla 1
Respuestas a las cuestiones evaluables

(%)	CE 1	CE 2	CE 3	CE 4	CE 5	CE 6	CE 7	CE 8	CE 9	CE 10	CE 11	CE 12	Total
Correcta	95	86	82	86	59	95	77	100	86	73	95	95	86
Incorrecta	5	14	18	14	41	5	23	0	14	27	5	5	14

Si las agrupamos según los aspectos analizados en históricos, conceptuales y técnicos. Los resultados son los de la figura 7.

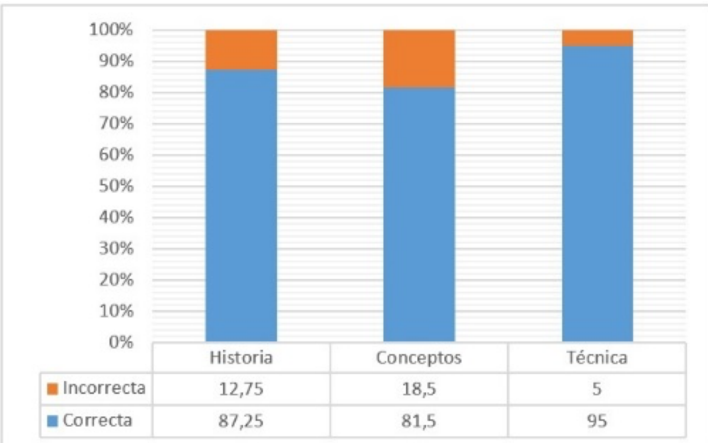


Figura 7. Resultados agrupados según los aspectos tratados

CONCLUSIONES

Hemos llevado al aula una experiencia sustentada en el método histórico de resolución de ecuaciones por expansión binomial con la configuración del matemático valenciano del siglo XVII José Zaragoza. El método ya se empleaba en la antigüedad para calcular raíces, y al menos desde el siglo XII según Rashed (1994), para resolver ecuaciones.

La experiencia en el aula se ha realizado con 22 alumnos y alumnas de primer curso de Bachillerato de entre 16 y 17 años y se ha desarrollado durante seis sesiones de una hora de duración cada una y en horario lectivo.

En esta experiencia, el alumnado ha aprendido sobre la evolución del álgebra y los fundamentos e implementación del método de resolución, con la configuración basada en gran parte en tablas que contienen las operaciones intermedias, para conseguir el objetivo de obtener la solución, tanto del cálculo de raíces como de ecuaciones. Estas tablas, basadas en las empleadas por José Zaragoza en su libro *Arithmetica Universal* (Zaragoza, 1669), han resultado ser muy aptas para su utilización en el proceso de enseñanza-aprendizaje; más que otras configuraciones que incluían otros libros de la época.

Con esta experiencia, el alumnado ha podido, no solo ampliar su formación sobre la Historia de las Matemáticas, y más en concreto del álgebra, sino que ha aprendido un nuevo método de resolución de ecuaciones (polinómicas), lo que le permite ampliar más aún el abanico de ecuaciones que puede resolver, y le prepara para en un futuro enfrentarse a la resolución numérica de ecuaciones, ya que uno de los métodos más utilizados en el cálculo numérico es el de Newton-Raphson, descendiente del método que han aprendido (Plaza y Gutiérrez, 2013). Consideramos que la experiencia ha favorecido que el alumnado no sólo conozca y aprenda un algoritmo, sino también que perciba la conexión entre la aritmética (el cálculo de raíces) y el álgebra (la resolución de ecuaciones).

Hemos concluido que, a la hora de enseñar algoritmos o métodos de cálculo históricos, al menos en nuestra experiencia, es preferible comenzar con ejemplos prácticos y poco a poco ir añadiendo los fundamentos más teóricos o simbólicos del procedimiento. De esta manera se puede reducir el rechazo que a veces suele tener el alumnado cuando lo que se le enseña es más teórico que práctico. Como perspectiva de futuro, en esta ocasión nos hemos centrado principalmente en aspectos más técnicos y matemáticos, dejando para el futuro las aplicaciones prácticas. Este es un inconveniente que detectaron Goktepe y Ozdemir (2013) en una experiencia en el aula con 21 estudiantes de entre 11 y 12 años, en la que se les enseñó dos métodos históricos de cálculo de raíces, y aunque la experiencia resultó muy gratificante al alumnado, pocos asociaban lo aprendido a situaciones útiles o a situaciones de la vida diaria.

Al hilo de lo anterior, una de las principales limitaciones de nuestro estudio ha sido temporal, en las sesiones que hemos impartido no hemos visto posible dedicar tiempo a aplicaciones en problemas de la vida real del método aprendido, ya que el aprendizaje y la práctica, dada la cierta complejidad y necesidad de organización de los datos, ha necesitado mucho tiempo. Dejamos pues para futuras investigaciones el adentrarnos en buscar aplicaciones prácticas para la resolución de problemas, tanto históricos como actuales. Esto es algo que ya han detectado investigadores como Santillán (2011), que considera que un gran reto es conseguir adaptar los problemas que aparecen en libros históricos a contextos actuales, más atractivos para el alumnado.

Otra de las limitaciones del trabajo es la curricular, consideramos que sería conveniente que el currículo actual contuviera la enseñanza de algún método de resolución de ecuaciones, como el que hemos estudiado, u otro de tipo numérico para poder dotar al alumnado de una visión más amplia y cercana a la realidad, ya que hemos notado que el alumnado no sabe resolver ecuaciones polinómicas de grado mayor a dos si no es aplicable la regla de Ruffini, por lo que el profesor de matemáticas tiene que preparar con antelación ecuaciones que puedan ser resueltas con la citada regla.

Pese a ello nuestro trabajo se une a una relevante línea de investigaciones que usan la Historia de las Matemáticas, y en concreto textos del pasado, en los procesos de enseñanza aprendizaje, favoreciendo el pensamiento crítico del alumnado en torno a la resolución de ecuaciones y a las conexiones entre álgebra y aritmética.

Referencias

Arcavi, A. (1987). Using historical materials in the mathematics classroom. *Arithmetic teacher, 35*(4), 13-16.

Barnett, J. H., Lodder, J. y Pengelley, D. (2012, 16-20 de julio). Projects for students of discrete mathematics via primary historical sources: Euclid on his algorithm [Conferencia]. *HPM2012: The HPM Satellite Meeting of ICME-12*. Daejeon, Korea. http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/PrintableVersion_ProceedingBook1.pdf

Barreras, Á. y Oller-Marcén, A. M. (2019). Formación de profesorado de secundaria. Trabajando la generalización a partir del uso de fuentes históricas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 203-212). SEIEM. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7299326

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación cualitativa. Guía práctica*. Ediciones CEAC.

Chorlay, R. (2012, 16-20 de julio). The Journey of a proof: If f' is positive, then f is an increasing function [Conferencia]. *HPM2012: The HPM Satellite Meeting of ICME-12*. Daejeon, Korea. http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/PrintableVersion_ProceedingBook1.pdf

Chorlay, R. (2016, 18-22 de julio). Historical sources in the classroom and their educational effects [Conferencia]. *History and Pedagogy of Mathematics*. Montpellier, France. https://hal.science/hal-01349227

Chorlay, R. (2022). From the historical text to the classroom session: Analysing the work of teachers-as-designers. *ZDM, 54,* 1583-1596. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01434-7

Clark, K., Kjeldsen, T., Schorcht, S., Tzanakis, C. y Wang, X. (2016). History of mathematics in mathematics education: Recent developments. En L. Radford, F. Furinghetti y T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 135-179). IREM de Montpellier.

Delgado, J. y Butto, M. (2015). El álgebra geométrica de Euclides. Una experiencia en la enseñanza del algebra. *Revista Horizontes Pedagógicos, 17*(2), 53-64. https://horizontespedagogicos.ibero.edu.co/article/view/17205

Demattè, A. y Furinghetti, F. (2022). Today's students engaging with abbacus problems. *ZDM, 54*(7), 1521-1536. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01397-9

Durand-Guerrier, V. (2016, 18-22 de julio). Initier les étudiants à la distinction entre vérité dans une interprétation et validité logique en s'appuyant sur la théorie du syllogisme formel d'Aristote [Conferencia]. *History and Pedagogy of Mathematics.* Montpellier, France. https://hal.science/hal-01349240

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 3-6.

Fauvel, J. y Van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education: The ICMI study.* Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Kluwer Academic Publishers.

Fülöp, Z. (2020). Regula falsi in lower secondary school education II. *Teaching Mathematics and Computer Science, 18*(2), 121-142. https://doi.org/10.5485/TMCS.2020.0512

Furinghetti, F. (2003). Storia della matematica per insegnanti e student. En E. Castro (Ed.), *Investigación en Educación Matemática VII* (pp. 87-96). SEIEM. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2258616

Furinghetti, F. (2020). Rethinking history and epistemology in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*, 967-994. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1565454

Goktepe, S. y Ozdemir, A. S. (2013). An example of using history of mathematics in classes. *European Journal of Science and Mathematics Education, 1*(3), 125-136. https://doi.org/10.30935/scimath/9392

Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de la matemática. En E. Castro (Ed.), *Investigación en Educación Matemática VII* (pp. 79-86). SEIEM. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=225861

Gómez, B. (2018). El uso de la historia en la educación matemática: el caso de los gemelos póstumos. *Matemáticas educación y Sociedad, 1*(1), 11-21. http://mesjournal.es/ojs/index.php/mes/article/view/5

González-Astudillo, M. T. y Sierra-Vázquez, M. (2003). El método de investigación en la didáctica del análisis matemático. En E. Castro (Ed.), *Investigación en Educación Matemática VII* (pp. 109-130). SEIEM. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2258618

González Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma, 45*, 17-28.

Haverhals, N. y Roscoe, M. (2010). The history of mathematics as a pedagogical tool: Teaching the integral of the secant via Mercator's projection. *The Mathematics Enthusiast, 7*(2), 339-368.

Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., Silva da Silva, C. M. y Weeks, C. (2006). The use of original sources in the mathematics classroom. En J. Fauvel y J. Van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education: the ICMI study* (pp. 291-328). Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_9

Jankvist, U. T. (2009). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *RELIME, 12*(1), 67-101.

Jankvist, U. T. (2010). An empirical study of using history as a 'goal'. *Educational Studies in Mathematics, 74*(1), 53-74. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9227-8

Jankvist, U. T. (2014). A historical teaching module on 'the unreasonable effectiveness of mathematics': Boolean algebra and Shannon circuits. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, 29*(2), 120-133. https://doi.org/10.1080/17498430.2014.874869

Kjeldsen, T. H., Clark, K. M. y Jankvist, U. T. (2022). Developing historical awareness through the use of primary sources in the teaching and learning of mathematics. En *Mathematics and its connections to the arts and sciences (MACAS) 15 years of interdisciplinary Mathematics Education* (pp. 45-68). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-10518-0_4

León-Mantero, C. y Madrid, M. J. (2019, 3-6 de julio). La historia de las matemáticas como recurso: maestros en formación "a la caza del número π" [Comunicación]. *19 Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. La Coruña, España. https://jaem.es/actas/Actas_XIXJAEM.pdf

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., Almaraz-Menéndez, F. y León-Mantero, C. (2021). Comparison between a modern-day multiplication method and two historical ones by trainee teachers. *Mathematics, 9*(4), 349. https://doi.org/10.3390/math9040349

Maz-Machado, A. (2019). Un breve balance de la investigación en historia de las matemáticas y la educación. En J. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 91-94). SEIEM.

Maza, C. (1994). Historia de las matemáticas y su enseñanza: un análisis. *Suma, 17*, 17-26.

Michel-Pajus, A. (2012). Historical algorithms in the classroom and in teacher-training [Conferencia]. *HPM2012: The HPM Satellite Meeting of ICME-12.* http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/PrintableVersion_ProceedingBook1.pdf

Muller, D. [Veritasium en español]. (2021, 12 de diciembre). *Cómo se inventaron los números imaginarios* [Vídeo]. YouTube. https://youtu.be/VN7nipynE0c

Nesselman, G. H. F. (1842). *Versuch einer kritischen geschichte der algebra, 1. teil. Die algebra der griechen*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG.

Nickel, G. (2013). Vom nutzen und nachteil der mathematikgeschichte für das lehramtsstudium. En H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns y G. Wickel (Eds.), *Mathematik verständlich unterrichten* (pp. 253-266). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-00992-2_16

Nickel, G. (2016). Nicht nur nach den reifen Früchten greifen: Mathematikgeschichte im schulunterricht. En R. Krömer y G. Nickel (Eds.), *Siegener Breiträge zur Philosophie und Geschichte und Philosophie der Mathematik (SieB) 7* (pp. 51-67). Universitätsverlag Siegen. https://dspace.ub.uni-siegen.de/bitstream/ubsi/1105/1/SieB_Bd7_2016.pdf

Nordgaard, M. (1922). A *historical survey of algebraic methods of approximating the roots of numerical higher equations up to the year 1819*. Teachers college, Columbia university.

Panagiotou, E. N. (2011). Using history to teach mathematics: The case of logarithms. *Science & Education, 20*(1), 1-35. https://doi.org/10.1007/s11191-010-9276-5

Plaza, S. y Gutiérrez, J. (2013). *Dinámica del método de Newton*. Universidad de la Rioja.

Puig, A. (1672). *Arithmetica especulativa, y practica, y arte de algebra*. Antonio Lacavalleria.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro (Ed.), *Investigación en Educación Matemática VII* (pp. 97-108). SEIEM. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2258617

Puig, L. (2004). History of algebraic ideas and research on educational algebra. En M. Niss (Ed.), *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education.* IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University. https://www.uv.es/puigl/icme-10.pdf

Rashed, R. (1994). The solution of numerical aquations and Algebra: Sharaf Al-Din Al-Tusi and Viète. En R. Rashed (Ed.), *The development of Arabic mathematics: between arithmetic and algebra* (pp. 147-204). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3274-1_4

Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. *BOE, 82*, de 6 de abril de 2022, 46047-46408.

Rzedowski, M. (2016). La demostración de Abel. *Miscelánea matemática de la SSM, 63*, 1-28. https://miscelaneamatematica.org/ContenidoNumero/65

Salinas-Herrera, J., Adamuz-Povedano, N. y Jiménez-Fanjul, N. (2011). Una experiencia de aula utilizando la historia de las matemáticas. *Épsilon, 28*(77), 113-126.

Salone, J. J. (2016, 18-22 julio). Pythagore et les angles droits, des exemples d'ouvertures de classes de mathématiques sur le monde [Comunicación]. *History and Pedagogy of Mathematics*. Montpellier, France. https://hal.science/hal-01349242

Santágueda-Villanueva, M. y Lorenzo-Valentín, G. (2019). Historia de las matemáticas para la formación inicial de maestros. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 2*(2), 19-32. https://journals.uco.es/mes/article/view/12842

Santillán, A. (2011). Aportes para la construcción de una historia de la matemática: experiencia en el profesorado de matemática en la Universidad Nacional del Chaco Austral, Argentina. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 4*(1). 40-54.

Testa, G. (1996). Conics, a teaching experience. En M. Logarto, A. Vieira y E. Veloso (Eds.), *Proceedings of the Second European summer university on History and epistemology in mathematics education* (pp. 449-456). Braga.

Thomsen, M. y Jankvist, U. T. (2022). Mathematical thinking in the interplay between historical original sources and geogebra. En U. T. Jankvist, R. Elicer, A. Clark-Wilson, H-G. Weigand y M. Thomsen (Eds.), *Proceedings of the 15th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (ICTMT 15) (pp. 189-196). AU Library Scholarly Publishing Services. https://doi.org/10.7146/aul.452

Torres, C., Guacaneme, E. y Arboleda, L. (2014). La historia de las matemáticas en la formación de profesores de matemáticas. *Quipu, 16*, 203-224.

Varent, C. de y Décamp, N. (2022). Impact of a sequence on the history of ancient mathematics informed by student experiences and teacher practices. *ZDM, 54*(7), 1553-1567. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01436-5

Viète, F. (1600). *De numerosa potestatum ad exegesim resolutione. Ex opere restitutae mathematicae analyseos, seu, Algebra novâ Francisci Vietae*. Excudebat David Le Clerc.

Yanjun, H. y Ping, C. (2016, 18-22 de julio). The application of HPM video clips in mathematical teaching in middle school: Teaching the application of linear equation with one unknown [Conferencia]. *History and Pedagogy of Mathematics*. Montpellier, France. https://hal.science/hal-01349270

Ying, J, M. y Huang, J. W. (2016, 18-22 de julio). The influence of mathematical classics reading on university students' mathematics beliefs [Conferencia]. History and Pedagogy of Mathematics. Montpellier, France. https://hal.science/hal-01349268

Ypma, T. J. (1995). Historical development of the newton-raphson method. *SIAM, 37*(4), 531-551. https://doi.org/10.1137/1037125

Zaragoza, J. (1669). *Arithmetica universal, que comprehende el arte menor, y maior, algebra vulgar, y especiosa.* Geronimo Vilagrasa.

Jacinto Ruiz-Catalán
Universidad de Córdoba, España
jacinruiz@hotmail.com

María José Madrid
Universidad Pontificia de Salamanca, España
mjmadridma@upsa.es

Alexander Maz-Machado
Universidad de Córdoba, España
ma1mamaa@uco.es

Recibido: febrero de 2024. Aceptado: septiembre de 2024
doi: 10.30827/pna.v19i2.30226

ISSN: 1887-3987

APPLICATION OF VIÈTE'S GENERAL METHOD OF SOLVING EQUATIONS IN THE CLASSROOM WITH HIGH SCHOOL STUDENTS

Jacinto Ruiz-Catalán, María José Madrid and Alexander Maz-Machado

Different research studies focus on the benefits of introducing the History of Mathematics into the classroom as a teaching-learning method. Considering this, we present a study based on a teaching-learning experience carried out in the mathematics classroom with high school students. For this, we have used a general historical method of solving equations, derived from the ancient method of extracting roots by binomial expansion.

By doing so, we have attempted to enrich both the students' scientific and cultural knowledge about the History of Mathematics. Furthermore, this experience has provided the students with a new tool that expands the range of equations that they can solve and will make it easier for them to understand and learn modern numerical methods at higher educational levels, specifically the Newton-Raphson method, which derives from the general method taught to them.

The aim of our study is to analyze the students' understanding of the theoretical foundation and technique of this general method of solving equations, using the configuration of the 17th-century Spanish mathematician José Zaragoza.

For this, we have conducted a qualitative, exploratory, and descriptive study. We have used a questionnaire to collect information about the conceptual and technical aspects that have been the objective of our research after the development of the teaching-learning experience.

The results show that the students have understood this new technique of solving equations, allowing them to expand the range of equations they can solve and preparing them for the knowledge of numerical methods that may be useful in their future academic endeavors. Our experience has also encouraged students to connect arithmetic and algebra.