RAZONAMIENTO PROPORCIONAL Y ALGEBRAICO DE ESTUDIANTES CUANDO RESUELVEN UNA TAREA PROBABILÍSTICA

María Burgos, María del Mar López-Martín, Nicolás Tizón-Escamilla y Carmen G. Aguayo-Arriagada

Se examinan las estrategias, argumentaciones y errores en las respuestas de un grupo de estudiantes de sexto curso de Educación Primaria (11-12 años) a una tarea probabilística que requiere razonamiento proporcional para determinar la composición de una urna. Los resultados muestran que los estudiantes tuvieron éxito al obtener la composición de la urna, pero encontraron dificultades para argumentar sus soluciones. Se evidencian escasos rasgos de razonamiento proto-algebraico. Se concluye la potencialidad del contexto probabilístico para avanzar en el desarrollo del razonamiento proporcional.

Términos clave: Educación Primaria; Probabilidad; Razonamiento algebraico; Razonamiento proporcional; Urnas

Proportional and algebraic reasoning of students when solving a probabilistic task

We examine the strategies, argumentation, and errors in the responses of a group of students in the sixth grade of Primary Education (11-12 years old) to a task that requires proportional reasoning to determine the composition of an urn. The results show that students were successful in obtaining the composition of the urn but encountered difficulties in arguing their solutions. Few traits of proto-algebraic reasoning are evidenced. The potential of the probabilistic context to advance in the development of proportional reasoning is concluded.

Keywords: Algebraic reasoning; Primary Education Probability; Proportional reasoning; Urns

Burgos, M., López-Martín, M. M., Tizón-Escamilla, N., Aguayo-Arriagada, C. G. (2025). Razonamiento proporcional y algebraico de estudiantes cuando resuelven una tarea probabilística. *PNA, 19*(2), 131-158. https://doi.org/10.30827/pna.v19i2.29887

Raciocínio proporcional e algébrico de alunos ao resolverem uma tarefa probabilística.

Examinamos as estratégias, os argumentos e os erros nas respostas de um grupo de alunos do sexto ano do Ensino Fundamental (11-12 anos) a uma tarefa probabilística que exige raciocínio proporcional para determinar a composição de uma urna. Os resultados mostram que os alunos tiveram sucesso ao obter a composição da urna, mas encontraram dificuldades em argumentar as suas soluções. Poucas características do raciocínio proto-álgebra são evidentes. Conclui-se sobre o potencial do contexto probabilístico para avançar no desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Palavras-chave: Ensino Fundamental; Probabilidade; Raciocínio algébrico; Raciocínio proporcional; Urnas

Numerosos autores destacan la importancia de iniciar la enseñanza de la probabilidad desde los primeros niveles educativos, aprovechando las intuiciones de los escolares y avanzando hacia la expresión, cuantificación y modelización de la incertidumbre por medio de la probabilidad (Jones et al., 2007; Pratt y Kazak, 2018). Esta necesidad ha motivado que programas curriculares de diversos países hayan incorporado el estudio de la probabilidad en la Educación Primaria (ACARA, 2014; CCSSI, 2023; MEFP, 2022; MOE, 2012). Se persigue que, al finalizar la Educación Primaria, el alumnado debe manejar el lenguaje básico referente a la posibilidad de ocurrencia (seguro, posible, imposible), comprender la noción de experimento aleatorio (impredecible, pero conociendo los posibles resultados) y expresar probabilidades como fracciones o porcentajes, calcularlas y compararlas (ACARA, 2014; MEFP, 2022).

También es un hecho consolidado en la comunidad de investigadores en educación matemática, el interés por el desarrollo del razonamiento algebraico desde los primeros niveles de escolaridad (Kieran, 2022). El razonamiento algebraico, entendido como aquel que "llevan a cabo los niños de 5 a 12 años mientras construyen significado para los objetos y formas de pensar que encontrarán posteriormente en el estudio del álgebra en la escuela secundaria" (p. 1131) aparece recogido en los currículos de educación primaria, a través del reconocimiento de relaciones de dependencia entre variables, la expresión de generalidades, la modelización de diferentes fenómenos y la capacidad de manipular las representaciones simbólicas involucradas produciendo representaciones equivalentes (ACARA, 2014; CCSSI, 2023; MEFP, 2022; MOE, 2012). Esta perspectiva más amplia del álgebra escolar, caracterizada por la generalización, la expresión y tratamiento progresivo de la generalidad (Godino et al., 2014) permite y demanda articular el álgebra con el resto de los saberes matemáticos: números, geometría, medida y estocástica.

Razonamiento probabilístico y algebraico comparten uno de sus componentes esenciales: el razonamiento proporcional. Por un lado, el razonamiento proporcional forma parte del análisis del espacio muestral, de la cuantificación proporcional de las probabilidades desde el enfoque teórico y frecuencial, de la comprensión y uso de las correlaciones y del estudio de la variable aleatoria (Batanero y Borovcnik, 2016; Bryant y Nunes, 2012). Por otro, el razonamiento proporcional aparece como una de las grandes ideas para desarrollar el razonamiento algebraico (Blanton et al., 2015), en tanto permite "razonar algebraicamente sobre dos cantidades generalizadas que están relacionadas de tal manera que la relación de una cantidad con la otra es invariable" (p. 43).

Aunque el estudio de la proporcionalidad se contempla desde la educación primaria, este vínculo entre razonamiento proporcional, algebraico y probabilístico no es explícito en las diferentes normativas que se limitan a especificar como objetivos que los estudiantes usen el razonamiento proporcional para resolver problemas contextualizados (ACARA, 2014; CCSSI, 2023; MOE, 2012), sean capaces de distinguir situaciones proporcionales y no proporcionales en problemas de la vida cotidiana (MEFP, 2022) y de reconocer y utilizar la proporcionalidad como comparación multiplicativa entre magnitudes (ACARA, 2014, CCSSI, 2023; MEFP, 2022). Prestar atención a las conexiones entre estos tipos de razonamiento, puede ser de ayuda tanto para explicar las dificultades y logros del estudiantado en su aprendizaje, como para contemplar los conocimientos y competencias necesarias por parte de los profesores para su adecuada enseñanza.

Las investigaciones que abordan la conexión entre razonamiento proporcional y probabilístico muestran que un razonamiento proporcional insuficiente puede estar detrás de gran parte de los errores conceptuales o procedimentales en el ámbito de la probabilidad (Begolli et al., 2021; Bryant y Nunes, 2012; Van Dooren, 2014). Gran parte de estas investigaciones se han centrado en cómo influye el razonamiento proporcional en la resolución de tareas probabilísticas que implican el cálculo o comparación de probabilidades (Hernández-Solís et al., 2023), mientras que se ha explorado menos su papel en la construcción del espacio muestral (Hernández-Solís et al., 2021b). Además, estas investigaciones tienen lugar con estudiantes que aún no han recibido instrucción formal sobre proporcionalidad o probabilidad.

Otros trabajos previos, han analizado el nivel de razonamiento algebraico desarrollado por escolares en tareas de proporcionalidad en un contexto aritmético (Burgos y Godino, 2019; Gaita et al., 2023). Los resultados de estos trabajos mostraron que la mayoría de los estudiantes (de entre 10 y 12 años) exhibieron formas de razonamiento algebraico incipiente, encontrando evidencias de su capacidad de generalización.

Aunque se ha estudiado ampliamente cómo influye el razonamiento proporcional en la resolución de tareas probabilísticas (Hernández-Solís et al., 2023), y la potencialidad del razonamiento proporcional para desarrollar el álgebra temprana (Blanton et al., 2015), no hemos encontrado investigaciones que aborden cómo influye el razonamiento algebraico en la resolución de tareas probabilísticas por escolares. Una primera forma es analizar el grado de algebrización de las prácticas matemáticas realizadas por escolares cuando se enfrentan a tareas probabilísticas que implican razonamiento proporcional.

Teniendo en cuenta estas ideas, los objetivos de nuestra investigación son los siguientes:

- Analizar las estrategias y argumentos utilizados por estudiantes de sexto de Educación Primaria cuando resuelven una tarea que conecta dos componentes esenciales del razonamiento probabilístico: la identificación de la naturaleza proporcional del cálculo de probabilidades y la construcción del espacio muestral.
- Identificar el carácter algebraico de las prácticas matemáticas desarrolladas por los escolares al resolver dicha tarea.
- Identificar los errores y valorar la relación entre la pertinencia en la solución y la presencia de rasgos algebraicos (al menos incipientes).

El carácter algebraico de las prácticas matemáticas de los escolares viene determinado, según el modelo de Godino et al. (2014), por los tipos de representaciones usadas, procesos de generalización y cálculo analítico implicados. Aunque no existen investigaciones previas en el ámbito del razonamiento probabilístico, los resultados obtenidos en estudios anteriores que analizan la conexión entre el razonamiento proporcional y algebraico (Burgos y Godino, 2019), apuntan a la posibilidad de encontrar formas proto-algebraicas de razonamiento en las prácticas matemáticas de los estudiantes y que la pertinencia de la resolución será mayor cuanto mayor sea el grado de razonamiento algebraico emergente.

La Sección 2 se dedica a la fundamentación teórica del trabajo: en primer lugar, se introducen los elementos del Enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino et al., 2007) como marco de investigación; en segundo lugar, se resumen los antecedentes con relación al razonamiento proporcional y probabilístico. La Sección 3 se centra en la descripción de la metodología empleada, el contexto y los participantes, el instrumento de recogida de datos y su análisis a priori. Los resultados del análisis y evaluación de las respuestas elaboradas por los alumnos se presentan en la Sección 4. Finalmente, se discuten los resultados, limitaciones al estudio y futuras líneas de investigación.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Prácticas matemáticas y razonamiento algebraico elemental

Dos nociones claves del EOS son las de práctica matemática y significado pragmático. Se entiende por práctica matemática toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas. En las prácticas matemáticas aparecen involucrados objetos y procesos matemáticos, que regulan y apoyan su realización. Así, los diferentes tipos de objetos matemáticos situaciones-problema (tareas que inducen la actividad matemática), lenguajes (términos, notaciones, símbolos, diagramas, gráficos), conceptos (entidades matemáticas introducidas por su definición), proposiciones (enunciados sobre conceptos), procedimientos (técnicas de cálculo, operaciones, algoritmos) y argumentos (requeridos para validar las proposiciones o justificar los procedimientos), emergen por medio de los respectivos procesos de problematización, comunicación, definición, enunciación, algoritmización y argumentación (Godino et al., 2007).

En la resolución de problemas matemáticos es posible identificar estrategias entendidas como secuencias de procedimientos que se aplican sobre conceptos y que implican propiedades y relaciones entre estos. Las estrategias constituyen esquemas de prácticas operativas que comparten características comunes. Por otro lado, algunas de las prácticas discursivas implicadas al resolver problemas persiguen justificar, es decir, apoyar las afirmaciones y decisiones matemáticas seguidas o explicar por qué estas afirmaciones o respuestas tienen sentido (Staples y Conner, 2022).

El significado de un objeto matemático, como puede ser la probabilidad, es el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones problemas en los cuales interviene el objeto matemático en cuestión. En este sentido, los errores se interpretan como discordancias entre las prácticas matemáticas que desarrolla el estudiante (significado personal) y las establecidas como correctas por la institución (significado institucional) (Godino et al., 2007).

Desde el EOS se entiende el razonamiento algebraico elemental (RAE) como el sistema de prácticas operativas y discursivas que se utilizan en la resolución de tareas matemáticas abordables desde la Educación Primaria, en las que están presentes objetos (relaciones binarias, operaciones, funciones y estructuras; sus tipos y propiedades) y procesos (generalización, unitarización, representación, transformación) considerados de naturaleza algebraica (Godino et al., 2014). Esta manera de concebir el razonamiento algebraico logra dar continuidad y articular el álgebra con el resto de contenidos matemáticos: aritmética, geometría, medida y estocástica. Siempre que se reconozca la presencia de objetos intensivos en una práctica matemática, en alguno de sus niveles de generalidad o intensión, es posible atribuirles un cierto grado de algebrización.

El modelo de RAE propuesto en Godino et al. (2014) permite describir las prácticas operativas y discursivas desarrolladas por un sujeto, estableciendo criterios para identificar la actividad matemática puramente aritmética (a la que se asigna un nivel 0 de RAE) y distinguirla de progresivos niveles de RAE. Así, los criterios para delimitar los distintos niveles están basados en: los tipos de representaciones usadas, los procesos de generalización implicados y el cálculo analítico implicado en la actividad matemática correspondiente.

- Nivel 0. Se opera con números naturales (objetos intensivos de primer grado de generalidad), usando lenguajes natural, numérico, icónico, gestual.
- Nivel 1. Se opera con clases de números naturales (objetos intensivos de segundo grado de generalidad), se aplican relaciones y propiedades genéricas de la estructura algebraica de $\mathbb{N}$ y la igualdad como equivalencia.
- Nivel 2. Se usan representaciones simbólico-literales para referir a los objetos intensivos reconocidos, ligados a la información espaciotemporal y contextual; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = C$ $(A, B, C \in \mathbb{R})$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.
- Nivel 3. Los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información contextual. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = Cx + D$ $(A, B, C, D \in \mathbb{R})$.

En el nivel 0 la actividad matemática no incorpora ningún rasgo algebraico. Los niveles 1 y 2 se consideran como proto-algebraicos (algebrización incipiente) para distinguirlos del nivel 3, cuyos rasgos indican una actividad algebraica consolidada.

Aunque la intención inicial del modelo de RAE propuesto por Godino et al. (2014) fue la descripción del tipo de razonamiento algebraico que se pone en juego en la resolución de tareas matemáticas específicas desde el punto de vista epistémico, es posible aplicar dicho modelo para analizar el carácter de la actividad matemática de estudiantes cuando resuelven problemas (Burgos y Godino, 2019; Gaita et al., 2023). En Burgos et al. (2022) se aplicó el modelo de RAE para identificar los tipos de objetos y procesos que intervienen en la resolución de una selección de problemas probabilísticos, mostrando la progresión de la actividad matemática desde los niveles aritméticos y proto-algebraicos, a los niveles más elevados de formalización en el estudio de la probabilidad en su significado clásico. Así, en este artículo, el modelo se aplica, en primer lugar, a las prácticas expertas, con la intención de mostrar la complejidad ontosemiótica implicada y, en segundo lugar, a las prácticas de alumnos de primaria para analizar el grado de generalidad mostrado en la resolución de la situación-problema propuesta.

Razonamiento proporcional

El razonamiento proporcional, entendido como la habilidad de establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y de extender dicha relación a otro par de cantidades (Lamon, 2007) involucra un sentido de covariación y de comparaciones múltiples en términos relativos. Contempla tanto la interpretación de los diferentes significados del número racional (razón, operador, parte-todo, medida y cociente), como las formas de razonar con ellos (Lamon, 2007).

En la investigación sobre razonamiento proporcional se utilizan dos categorías principales de problemas proporcionales: problemas de comparación y problemas de valor faltante. La mayoría de las investigaciones con estudiantes sobre razonamiento proporcional en el contexto aritmético se centraron en tareas de valor faltante. Estas investigaciones pusieron de manifiesto que estudiantes, tanto de Educación Primaria como de Secundaria, tienen dificultades para distinguir situaciones proporcionales de las que no lo son (Fernández y Llinares, 2012; Van Dooren et al., 2010). Además, analizaron los factores que determinan el rendimiento en las tareas de proporcionalidad, tales como el contexto, el formato en que se presenta la tarea, la familiaridad del contenido, la naturaleza de las magnitudes (discretas/continuas) involucradas en la situación, el uso de razones enteras o no enteras, etc. (Fernández y Llinares, 2012; Van Dooren, et al, 2010; Yeong et al., 2020).

Aunque se tiene poca información sobre cómo los estudiantes dan significado y utilizan los conceptos de razón y proporción cuando resuelven problemas de comparación de razones, las investigaciones evidenciaron que las dificultades para comprender la razón y las cantidades intensivas persisten incluso hasta el final de la Educación Secundaria (Castillo y Fernández, 2022). Además, los escasos estudios que analizan cómo comparan razones los estudiantes recurren frecuentemente a tareas probabilísticas (Ruggeri et al., 2018; Supply et al., 2023). La cuantificación de la probabilidad como razón presenta dificultades por sí misma, y el razonamiento basado en proporciones no siempre logra superar los obstáculos inherentes a la conceptualización de la probabilidad (Bryant y Nunes, 2012).

Las dificultades de estudiantes con problemas de reparto proporcional han recibido incluso menos atención en la investigación (Lamon, 1993; Sánchez Ordóñez, 2014; Yeong et al., 2020). Estos estudios identificaron una comprensión limitada del "todo" (suma de las partes) o la tendencia a realizar repartos equitativos en situaciones de reparto proporcional (Yeong, et al., 2020; Sánchez Ordoñez, 2014). Autores como Langrall y Swafford (2000) han definido niveles de razonamiento proporcional de los alumnos propuestos en términos de las tareas en las que los estudiantes pueden o no tener éxito. Así, los alumnos del nivel 0 no muestran razonamiento proporcional y utilizan estrategias aditivas. En el nivel 1 pueden llegar a la respuesta correcta basándose en estrategias informales o cualitativas, en el nivel 2 comienzan a usar el razonamiento cuantitativo recurriendo a estrategias de construcción progresiva que emplean la multiplicación y la división, y finalmente, en el nivel 3 de razonamiento proporcional formal, los estudiantes pueden establecer y resolver una ecuación proporcional.

Aunque la aplicación de los niveles de algebrización al estudio del razonamiento proporcional no se refiere a etapas de desarrollo cognitivo de los individuos, sino que identifica y asigna características algebraicas a la actividad matemática, algunas de las estrategias descritas como habituales en los niveles de razonamiento proporcional, permiten establecer relaciones con los niveles de algebrización. Por ejemplo, las estrategias cualitativas o las de duplicación o de construcción progresiva estarían vinculadas al nivel 0 de RAE. Las estrategias de razón unitaria, la comparación de razones o la obtención de razones equivalentes aparecerían con un nivel 1 de RAE. La resolución, con plena comprensión de las relaciones estructurales, de una ecuación proporcional corresponde a un nivel 2 de RAE, mientras que en el nivel 3 de RAE se aplica la noción de función lineal y técnicas de resolución basadas en sus propiedades ("mostrar razonamiento funcional" según Langrall y Swafford, 2000).

Razonamiento probabilístico

El razonamiento probabilístico entendido como el tipo de razonamiento que se aplica al resolver problemas de probabilidad, tanto en contexto escolar como en la vida diaria, requiere entre otras de las siguientes capacidades: comprender las ideas probabilísticas fundamentales de variabilidad, aleatoriedad, independencia, predictibilidad/incertidumbre; articular el conocimiento formal (modelo de probabilidad que se debe aplicar) y el conocimiento del contexto, controlando las creencias subjetivas para asignar un valor de probabilidad o tomar una decisión basada en la probabilidad; calcular o estimar probabilidades de sucesos en situaciones aleatorias cotidianas; utilizar adecuadamente el lenguaje del azar, emplear argumentos para probar la verdad de una afirmación probabilística o la validez de la solución al problema (Batanero y Borovcnik, 2016; Sánchez y Valdez, 2017).

Aunque son múltiples las investigaciones que han analizado el desarrollo del razonamiento probabilístico en escolares (Hernández-Solís et al., 2023; Supply et al., 2020) centramos la atención en aquellas que de manera explícita analizan el vínculo con el razonamiento proporcional de la comprensión del espacio muestral (es decir, la exploración de las posibilidades de los resultados de un experimento aleatorio) y la cuantificación y comparación de probabilidades basadas en la proporción entre casos favorables y casos posibles (Bryant y Nunes, 2012).

Autores como Bryant y Nunes (2012) o Van Dooren (2014) analizaron las estrategias y tipos de tareas de probabilidad que pueden ser resueltos por escolares según las diferentes etapas de su razonamiento proporcional. Estos trabajos señalaron una estrecha relación entre ambos razonamientos, sugiriendo que el razonamiento proporcional es un factor clave en la capacidad del alumnado para comprender y aplicar conceptos probabilísticos. Van Dooren et al. (2003), resaltaron que los escolares son susceptibles de manifestar un uso inapropiado del razonamiento proporcional en este contexto, debido a: (i) la complejidad intrínseca a la modelización de situaciones probabilísticas, que se ve obstaculizada por las intuiciones, sesgos o concepciones erróneas previas de los estudiantes; y (ii) la estrecha conexión, cognitiva e intuitiva, de las nociones de azar y proporción.

La estrecha relación existente entre el razonamiento proporcional y probabilístico ha sido considerada un factor clave en la capacidad del alumnado para resolver con éxito tareas de comparación de probabilidades en contexto de urnas (Hernández-Solís et al., 2021a, 2021b; Truran, 1994). Para Hernández-Solís et al. (2021a) esta dificultad se debe a que, aunque el alumnado estudia fracciones, no es frecuente utilizar el contexto de probabilidad para completar su estudio de fracciones y realizar comparaciones.

En el estudio exploratorio de Hernández-Solís et al. (2021b), se analizaron las estrategias y errores de estudiantes costarricenses de 6º curso (11-12 años), en tareas de comparación de probabilidades y construcción del espacio muestral. Aunque la construcción del espacio muestral a partir de ciertas condiciones iniciales planteó un desafío para los escolares al no ser una tarea usual (Hernández-Solís et al., 2021b), los resultados de su estudio mostraron una intuición razonable de la idea de espacio muestral, tanto en el contexto de urnas como de ruletas. La mayoría de los participantes construyeron un espacio muestral adecuado cuando en el enunciado de las tareas se considera un suceso posible y un suceso equiprobable, presentando en cambio dificultades cuando partían de un suceso imposible o seguro.

Batista et al. (2022) exploraron el razonamiento utilizado por niños (10-12 años) y adultos brasileños con el mismo nivel educativo para evaluar y justificar la equidad de los juegos, considerando aspectos como la aleatoriedad, el espacio muestral y la comparación de probabilidades. Los resultados revelaron, en ambos grupos, una comprensión débil de la comparación de probabilidades que involucraba diferentes espacios muestrales. La falta de razonamiento proporcional dificultó su capacidad para evaluar conscientemente la equidad en los juegos que requerían dicha comparación, ya que se basaron en cantidades absolutas en lugar de relativas.

Supply et al. (2023) investigaron las habilidades de razonamiento proporcional en escolares al resolver tareas aritméticas y probabilísticas a través de situaciones de valor faltante. En la tarea que propusieron estos autores a alumnado de 8-9 años, una de las cajas tiene una distribución conocida, en la otra se dan los casos desfavorables y deben completarla con los casos favorables para que ambas cajas tengan igual probabilidad de éxito. La mayoría de las respuestas erróneas encontradas seguían estrategias unidimensionales. Observaron que la mayor dificultad en el contexto probabilístico frente al aritmético (reparto equitativo) en situaciones de valor faltante, podía venir motivado, entre otros aspectos, por la presencia de incertidumbre, el carácter intangible de la probabilidad (cantidad intensiva) y por la similitud física entre los espacios de medida.

Diversos investigadores se han preocupado por caracterizar y determinar los niveles de razonamiento probabilístico en escolares, atendiendo tanto a las ideas fundamentales de la probabilidad que involucran espacio muestral, probabilidad de un suceso y comparación de probabilidades, entre otras, como a las características de las tareas en las que pueden tener éxito (Hernández-Solís et al, 2023, 2024). Así, en el caso del espacio muestral, estos niveles suelen venir dados por la capacidad para listar un mayor número o diversidad de sucesos o si el experimento es simple o compuesto (Hernández-Solís et al., 2024). En el caso de la comparación de probabilidades los niveles quedan determinados por el tipo de comparación (valores absolutos, aditiva o multiplicativa dentro o entre diferentes distribuciones), lo que se relaciona con niveles en la comparación de fracciones, y por tanto con el razonamiento proporcional (Hernández-Solís et al, 2023).

MÉTODO

Enfoque metodológico

El estudio se enmarca en una investigación descriptiva de enfoque cualitativo y de carácter exploratorio, pues se pretende indagar sobre las estrategias, argumentos, errores y grado de razonamiento algebraico de estudiantes de Educación Primaria en tareas probabilísticas que implican razonamiento proporcional. La muestra utilizada es no aleatoria, seleccionada por la disponibilidad e interés del centro y de las tutoras de los grupos de escolares. Para analizar la actividad matemática desarrollada por los participantes en la resolución de la tarea aplicamos el análisis ontosemiótico (Godino et al., 2022) que consiste en:

- Descomposición de las respuestas escritas de los escolares en unidades de análisis, formadas por las prácticas operativas o discursivas elementales, en las que se puede identificar una función o papel en la actividad matemática que se analiza.
- Identificación de la intencionalidad de las prácticas elementales.
- Reconocimiento de los objetos, en particular de los argumentos, y procesos asociados a las prácticas elementales.

Además, realizamos un análisis descriptivo de las frecuencias de los tipos de estrategias con relación al grado de pertinencia y los niveles de RAE.

Contexto de la investigación, participantes y recogida de datos

En nuestra experiencia han participado 47 estudiantes (un grupo de 23 y otro de 24) de 6º curso de Educación Primaria, todos del mismo centro educativo público. La entrevista a las tutoras de los alumnos, así como la exploración inicial en el aula a través de preguntas elementales sobre probabilidad, puso de manifiesto deficiencias en el conocimiento de los escolares con relación a los contenidos de probabilidad trabajados durante el curso. Si bien estaban familiarizados con términos probabilísticos, como probable, seguro, posible o imposible, desconocían la noción de espacio muestral y mostraban dudas con el cálculo de probabilidades elementales.

La recopilación de datos se llevó a cabo durante una sesión de 60 minutos, en la última semana del curso. Antes de plantear la tarea, se subrayó la importancia de que los estudiantes mostraran interés en su resolución y se les informó de que las respuestas dadas no tendrían ninguna repercusión (positiva o negativa) en sus calificaciones.

En la presentación, las investigadoras que intervinieron en la toma de datos contextualizaron la actividad en el ámbito del azar, recordando brevemente (a petición de las tutoras) las nociones de experimento aleatorio, espacio muestral, suceso y probabilidad. Después, los estudiantes trabajaron de manera individual para responder a la tarea que se describe en la siguiente sección.

En cumplimiento de los principios éticos se informó a la dirección del centro de las características de la investigación y la intención de publicar los resultados, garantizando la confidencialidad y protegiendo la identidad del alumnado. Se aclaró que la participación no tendría carácter obligatorio ni influiría en la calificación de la asignatura de matemáticas. Para mantener el anonimato de los escolares empleamos las etiquetas Ai, donde i toma valores desde 1 hasta 47.

Instrumento de recogida de datos y análisis *a priori*

En este apartado presentamos el análisis de la tarea de evaluación, que servirá de referencia para interpretar las respuestas dadas por los participantes. Se trata de un problema en el que la composición de una urna debe obtenerse de manera proporcional para que la probabilidad de éxito sea la misma que en otra urna en la que la razón entre casos favorables y desfavorables es conocida.

En la descripción de la tarea al alumnado se les indicó que debían pensar que la bola se extrae sin mirar en la caja. Su enunciado concreto es el siguiente:

> *Disponemos de dos cajas, la caja A y la caja B, que contienen ambas bolas blancas y bolas negras. En la caja A por cada bola blanca hay tres bolas negras. En la caja B hay 20 bolas (entre negras y blancas). ¿Cuántas bolas hay de cada color en la caja B si es igual de probable sacar una bola blanca que en la caja A? Explica tu respuesta.*

La probabilidad de sacar bola blanca en la caja A se obtiene a partir de la razón entre bolas blancas y bolas negras. Esta probabilidad determina proporcionalmente cuál debe ser la composición de la caja B. Por tanto, el razonamiento proporcional aparece implicado tanto en el cálculo de la probabilidad como en la construcción del espacio muestral para respetar la igualdad de probabilidades como razones. Como mostramos a continuación, aunque la situación-problema se puede resolver mediante un razonamiento aritmético, en el que la razón no emerge como intensivo de las prácticas, sino que se particulariza como relación multiplicativa, existen otras posibles estrategias que involucran los niveles proto-algebraicos 1 (uso de intensivos de segundo grado de generalidad, es decir, números racionales) y 2 (establecimiento y resolución de una ecuación proporcional) así como el nivel 3 de RAE.

En la caja A, por cada bola blanca hay tres negras, de manera que, si hubiese 4 bolas, una sería blanca. Puesto que la probabilidad es el cociente entre el número de casos favorables (bolas blancas) y el de casos posibles (bolas totales), para que sea igual de probable sacar bola blanca en la caja B que en la caja A, de cada 4 bolas en la caja B una tiene que ser blanca.
Dado que hay 20 bolas en total en la caja B, se pueden formar 5 grupos de 4 bolas, pues $20:4 = 5$. Esto supone un total de 5 $(5 \times 1 = 5)$ bolas blancas en la caja B. El resto, $15 = 20 - 5$, serán bolas negras.

Figura 1. Solución 1. Aritmética (nivel 0 RAE)

En la solución 1 (Figura 1), se establece la relación multiplicativa que existe entre los casos favorables y posibles. En el proceso de resolución (semejante a la de "división por la razón" en los problemas de reparto proporcional en Ben-Chaim et al., 2012) intervienen valores numéricos particulares y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores. La igualdad tiene significado de resultado de una operación. Por tanto, según Godino et al. (2014), la actividad matemática realizada se considera de nivel 0 de RAE.

Para que sea igual de probable sacar una bola blanca en la caja B que en la caja A se debe mantener la razón de bolas blancas (casos favorables) respecto del total de bolas (casos posibles). Dado que esta razón es de una bola blanca por cada cuatro bolas, y en la caja B hay 20 bolas, el número de bolas blancas en la caja B es $\frac{1}{4} \times 20 = 5$. El resto de las bolas en la caja B, esto es, $20 - 5 = 15$ serán negras.

Figura 2. Solución 2. Fracción como operador (nivel 1 RAE)

En la solución 2 (Figura 2) la actividad matemática (semejante a la de "parte-todo" en Ben-Chaim et al., 2012) se considera de nivel 1 de RAE: se declara una relación general, a saber, la razón entre los casos favorables y posibles, que se enuncia con lenguaje natural; intervienen números racionales por medio del significado como operador de la fracción y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores.

Para asegurar que la probabilidad de extraer una bola blanca sea igual en ambas cajas, es necesario mantener la proporción de bolas blancas (eventos favorables) con relación al total de bolas (eventos posibles). Se desconoce el número de bolas blancas y negras que hay en la caja A, pero dado que por cada bola blanca hay tres negras, la razón entre los casos favorables y posibles en A es de 1 a 4. La igualdad de probabilidad entre ambas cajas establece una proporción:

$$\frac{Casos\ favorables\ en\ A}{Casos\ posibles\ en\ A} = \frac{Casos\ favorables\ en\ B}{Casos\ posibles\ en\ B}$$

donde son conocidos la razón de casos favorables y posibles en A, 1 a 4, y el número exacto de casos posibles en B, 20, desconociéndose el número de casos favorables en B, x. Esta proporción se expresa como $\frac{1}{4} = \frac{x}{20}$. Dado que, en una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de medios, $4x = 1 \times 20$, por lo que$x = \frac{20}{4} = 5$. Por tanto, en la caja B hay 5 bolas blancas y el resto, 15, son negras.

Figura 3. Solución 3. Ecuación proporcional (nivel 2 RAE)

En la solución 3 (Figura 3), se identifican las cantidades involucradas y reconocer la relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes: número de casos favorables y número de casos posibles. Además, se debe explicitar la igualdad de razones de cantidades que se corresponden y la igualdad de productos cruzados en una proporción para despejar el valor desconocido. La resolución de problemas de valor faltante, basada en el uso de las razones y proporciones, involucra la identificación de una incógnita y el planteamiento de una ecuación que permite la obtención de dicho valor. Este tipo de actividad matemática se clasifica en un nivel 2 de RAE, ya que la incógnita aparece en un único miembro de la ecuación establecida a partir de la proporción.

Finalmente, en la solución dada en la Figura 4, se emplea el lenguaje simbólico-literal, se utiliza una técnica de sustitución y se opera de manera analítica/sintáctica para transformar la ecuación proporcional en una ecuación en la que la incógnita aparece en ambos términos de ésta. Se trata de una actividad propiamente algebraica, nivel 3 de RAE según Godino et al. (2014).

Dos de los investigadores, realizaron de manera independiente el análisis descriptivo de las respuestas de los alumnos de primaria, discutiendo con el resto del equipo investigador las discrepancias y consensuando las categorías resultantes del análisis de manera colaborativa, en un proceso cíclico e inductivo, propio de la investigación cualitativa. En caso de no llegar a consenso se contaba con el apoyo de dos investigadores externos expertos en la temática (razonamiento probabilístico, proporcional y RAE).

Para que sea igual de probable sacar una bola blanca en la caja B que en la caja A se debe mantener la razón entre bolas blancas (casos favorables) y bolas negras (casos desfavorables) en ambas cajas, Como esta razón es de 1 a 3 en la caja Ase tiene que, $\frac{1}{3} = \frac{x}{y}$, siendo x el número de bolas blancas en B, e y el número de bolas negras en B. Además, $x + y = 20$, luego la proporción anterior se escribe de manera equivalente como, $\frac{1}{3} = \frac{x}{20-x}$. En una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de medios, luego $20 - x = 3x$. Queda

$$20 - x = 3x \Rightarrow 20 = 3x + x \Rightarrow 20 = 4x \Rightarrow x = 20 \div 4 = 5.$$

Es decir, en la caja A hay 5 bolas blancas y las 15 restantes son negras.

Figura 4. Solución 4. Algebraica (nivel 3 RAE)

RESULTADOS

En la Tabla 1 se resumen los grados de pertinencia de las soluciones del alumnado al problema. De los 47 sujetos, dos no respondieron a la tarea, por lo que se han analizado en total 45 respuestas. Se observa que el 71,11% de los participantes respondieron que en la caja B hay 5 bolas blancas y 15 negras. Sin embargo, más de la mitad de ellos no proporcionan una justificación adecuada para su respuesta.

Tabla 1
Grado de pertinencia y frecuencia de respuestas (n=45)

Categorías	Fr.
Incorrecta	9
Tiene conocimiento del reparto de bolas, pero no lo explicita de forma clara	4
Determina correctamente el número de bolas blancas y negras, pero no justifica	18
Obtiene correctamente el número de bolas blancas y negras con justificación parcial	8
Indica el número de bolas blancas y negras y lo justifica adecuadamente	6

Cuando la justificación es parcial (17,78%), los estudiantes respaldan la validez de su solución con el procedimiento utilizado, sin que su argumento conecte razón de reparto con probabilidad. Por ejemplo, pueden hacer referencia al número de veces que se realiza un reparto al seguir una estrategia específica o a la razón de reparto "por cada bola blanca, hay tres bolas negras" (véase Figura 5).

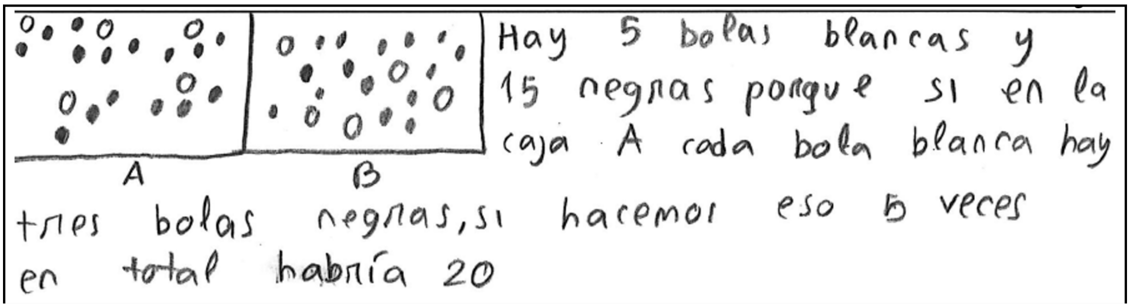

Figura 5. Solución de reparto icónico "5 tandas" (A45)

Sin embargo, no se menciona que esta razón debe mantenerse en la caja B para que la probabilidad de sacar una bola blanca sea la misma en ambas cajas.

Con relación al lenguaje empleado por el alumnado, se encuentra una elevada presencia del registro icónico en las producciones de los estudiantes (en la mitad de estas), si bien, este no siempre se usa como soporte de resolución, es decir, como modo incipiente para expresar la relación funcional, sino como medio para representar la solución obtenida por procedimientos de tipo aritmético. También se observa el empleo de símbolos literales, usualmente "b" para indicar el número de bolas blancas y "n" para indicar el número de bolas negras (en el 17,78% de las respuestas). En algunos casos, las letras se combinan con el signo igual para establecer la razón entre casos favorables y desfavorables, correcta o incorrectamente (Figura 6).

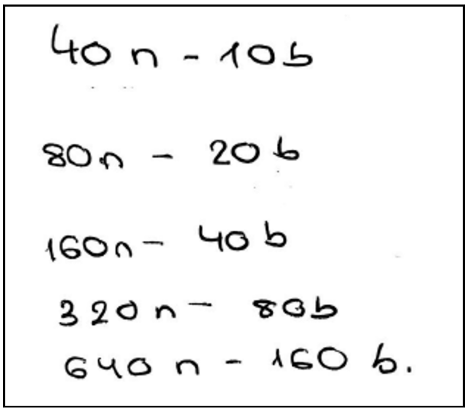

Figura 6. Razones entre bolas blancas y negras (A19)

No se ha observado uso por parte del alumnado de registros propios de los niveles proto-algebraicos, como son las representaciones diagramáticas o tabulares que si se han detectado en la resolución de tareas de proporcionalidad aritmética (Burgos y Godino, 2019).

Aunque la mayoría del alumnado no justificó su solución, es posible identificar varios tipos de argumentos que utilizaron tanto en las respuestas correctas como en las incorrectas. Entre estos, podemos distinguir los tres siguientes.

Argumentos basados en la probabilidad de sacar bola blanca (“porque tiene 5/20 de sacar bola blanca”, A15), aunque se haya determinado de manera incorrecta, como en la Figura 7. El 11,11% de los participantes ofrecieron este tipo de argumentos.

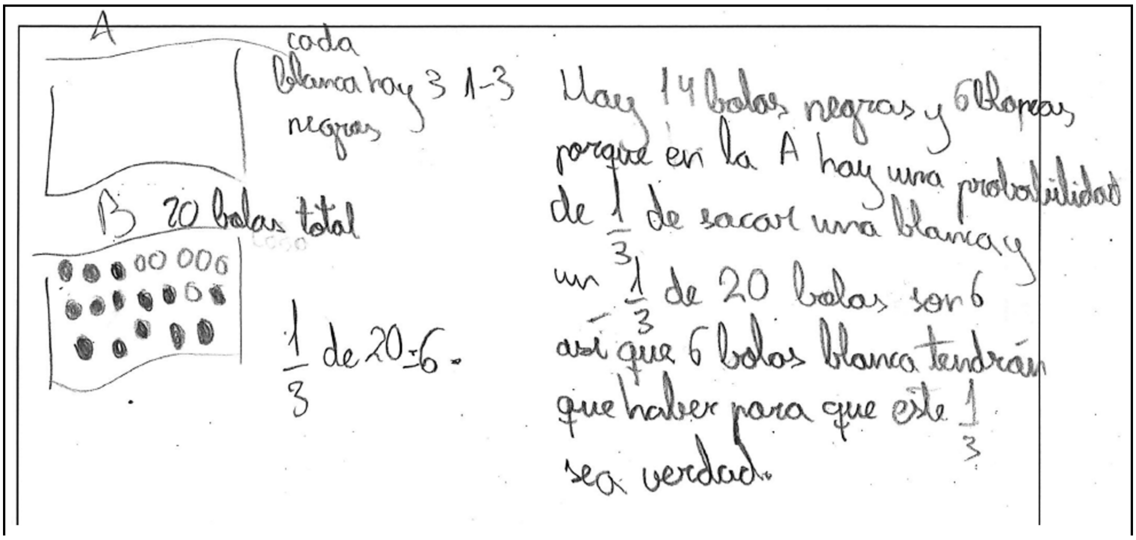

Figura 7. Solución de A4. Incorrecta. Fracción como operador casos favorables/desfavorables

Argumentos basados en la determinación del todo unitario parcial de forma verbal o simbólica. Este tipo de argumentos lo han reflejado el 11,11% de los estudiantes. Por ejemplo, A17 (Figura 8) señala que en la caja A haría grupos de 4 donde 1 es blanca, y el resto negras, basándose en que “1 bola blanca equivale a 3 negras”. Otros alumnos como A24, también se apoyan en esta relación que expresan de manera simbólica “porque 1 blanca = 3 negras = 4 bolas x 5 = 20”, para argumentar la obtención del todo unitario parcial.

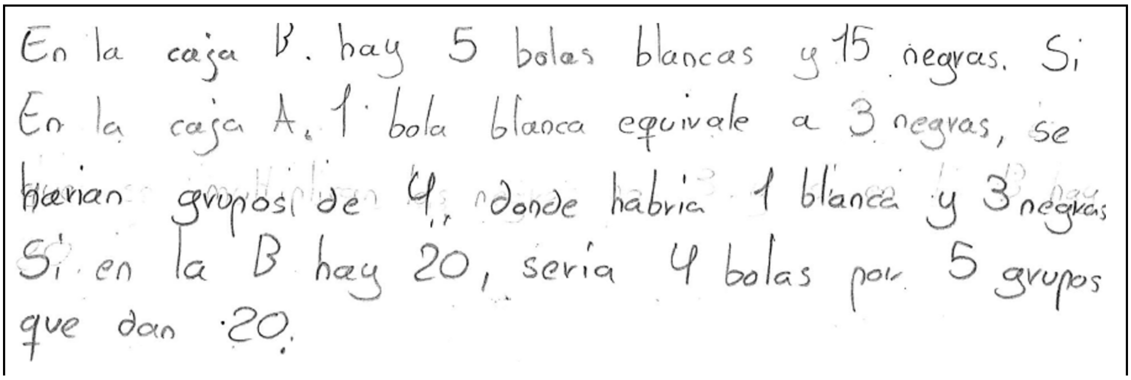

Figura 8. Solución de A17. Determinación del todo unitario parcial

Argumentos basados en la razón. Este tipo de argumento, el más frecuente, lo han manifestado un 17,78% de los alumnos. Por ejemplo, en la Figura 9 se observa que el estudiante A22 basa su explicación en la idea “cada blanca hay tres negras”.

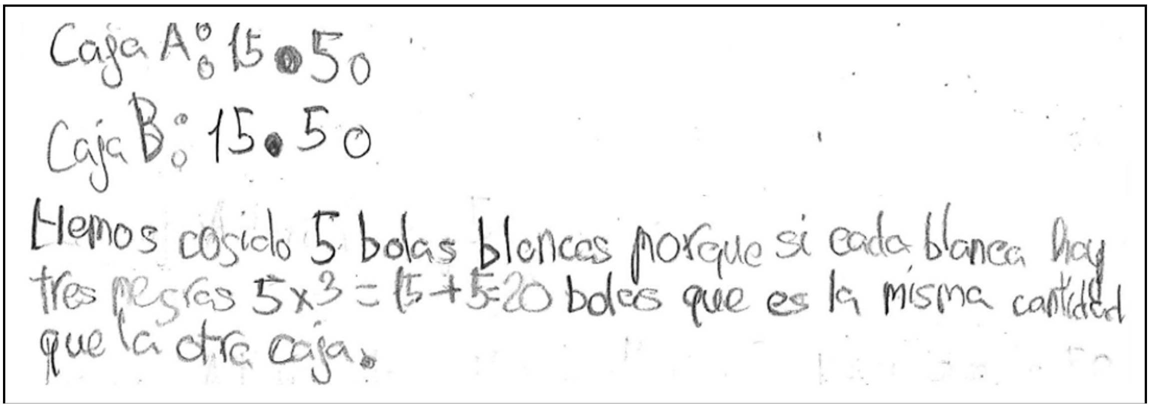

Figura 9. Solución de A22. Reparto de las 20 bolas siendo las negras el triple de las blancas. Asume mismo número de bolas en ambas cajas.

La tabla 2 resume los diferentes tipos de estrategias empleadas por los participantes en la resolución del problema, clasificados según los niveles de RAE asociados.

Tabla 2
Tipos de respuesta y frecuencia (Fr.) según niveles de RAE (n=45)

Categorías	Descripción	Fr.
Sin estrategia explícita	Descripción de la relación entre las bolas blancas y negras sin determinar su valor numérico	3
	Especifica el resultado numérico sin explicitar cálculos ni explicación	6
Nivel 0 RAE	Reparto aditivo/icónico	20
	División por la razón	6
	Relación multiplicativa entre favorables y desfavorables de una caja	5
Nivel 1 RAE	Equivalencia de razones	2
	Parte-todo (fracción o porcentaje de casos favorables/posibles)	3

Nueve estudiantes dan una respuesta en la que, o bien, escriben el resultado numérico sin incluir los procedimientos ni argumentos que los han llevado a ellos, o sólo plantean simbólicamente la relación entre las bolas blancas y negras, siendo esta relación correcta "*1b=3n*" (respuesta de A2) o incorrecta, como, por ejemplo, la respuesta recogida en la Figura 6.

La estrategia más utilizada corresponde a la de reparto aditivo con soporte icónico, coincidiendo con resultados de investigaciones previas en el contexto aritmético (Lamon, 1993). Este tipo de estrategia se relaciona con la estrategia pre-formal "aditiva" de Ben-Chaim et al. (2012), en nuestro caso, en el entorno de urnas. En ellas, como se observa en la Figura 10, los sujetos distribuyen 4 bolas asignándoles el color blanco a una de ellas y el color negro a las otras tres. Después toman otro grupo de 4 bolas y les asignan de igual forma el color, hasta completar las 20 bolas de la caja B. Las respuestas fueron correctas en todos los casos, salvo en uno, en el que el estudiante distribuye según la razón 1:3 pero ignora la cantidad de bolas totales en la caja B, considerando que la caja B tendría 10 bolas blancas y 30 negras.

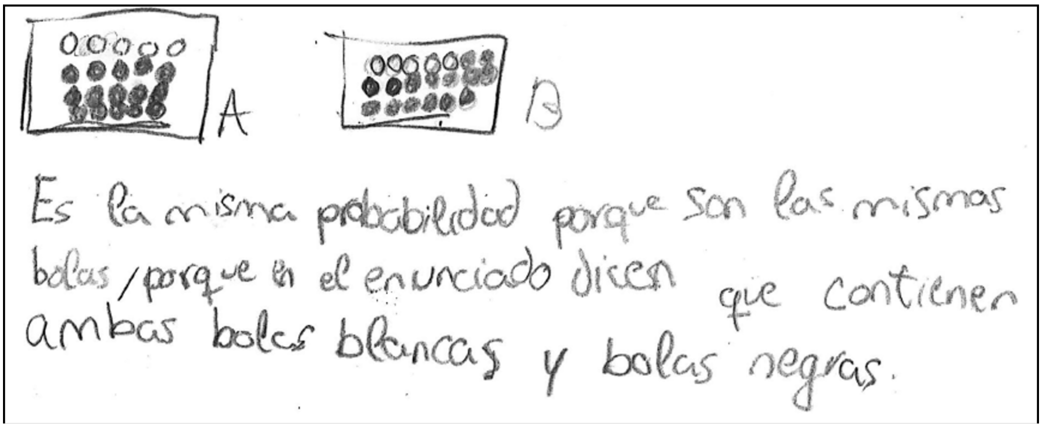

Figura 10. Solución de reparto aditivo (A35)

Cuando el alumnado hace referencia a la probabilidad en sus justificaciones, es frecuente observar (ver Figura 10), que consideran necesario que en ambas urnas haya el mismo número de bolas (casos posibles) para que la probabilidad sea la misma en ambas. Esto supone una visión estática de la probabilidad como cociente dado por los casos favorables y posibles, más que como razón.

El 13,33% de las soluciones dadas correspondieron a una estrategia de tipo aritmético basada en la división por la razón (Solución 1, Figura 1). Todos los participantes que emplearon esta estrategia resolvieron correctamente el problema y todos lo justificaron de manera similar a A17 (Figura 8). En otros casos, resolvieron el problema de forma aritmética establecieron una relación multiplicativa entre las bolas blancas y negras de la caja B. Estas soluciones fueron incorrectas en tres casos, bien porque no respetaron la relación dada o porque asumieron incorrectamente la cantidad de bolas blancas en la caja B y el número de bolas negras que debería haber. Fueron correctas cuando partiendo de la razón “si por cada blanca hay tres negras” buscaron dos números de manera que uno más su triple daba 20 (véase la Figura 9). En menor medida (11,11%), propusieron soluciones de carácter proto-algebraico (nivel 1 RAE), siguiendo la estrategia parte-todo (6,67%) o bien empleando la equivalencia de las razones (4,44%).

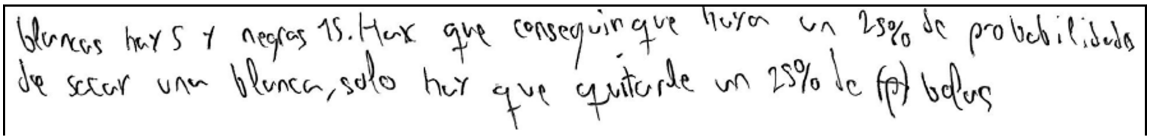
blancas hay 5 y negras 15. Hay que conseguir que haya un 25% de probabilidades de sacar una blanca, solo hay que quitarle un 25% de [illegible] bolas

Figura 11. Determinación de la composición en base a la probabilidad como porcentaje (A40)

Dos de los tres estudiantes que emplean la fracción como operador (Solución 2, Figura 2) lo resuelven correctamente: la fracción, 1/4, que opera sobre el total de bolas, 20, en la caja B, se expresa como el porcentaje, 25% indicándose de manera explícita que esta es la probabilidad de sacar bola blanca (Figura 11). El otro estudiante lo resuelve de manera incorrecta, pues asume que la probabilidad de sacar bola blanca es de 1/3, en lugar de 1/4 (véase Figura 7). Los alumnos A11 y A25 emplearon la equivalencia de razones y llegaron a enunciar en lenguaje natural una regla general en base a esta. En el caso de A25 asume que en la caja B hay 8 bolas blancas y 12 negras y, por tanto, en la A hay 4 bolas blancas y 6 negras porque “son equivalentes”; A11 recurre a la razón dentro de la urna, “el triple de bolas negras que de blancas”, para resolver el problema.

Hemos podido observar que en la tercera parte de las respuestas se menciona de manera explícita la probabilidad, bien, como hemos precisado, para indicar la necesidad de que haya el mismo número de bolas en ambas cajas como garantía de la igualdad de la probabilidad, bien, en el argumento para justificar la validez del reparto (“y eso hace que la probabilidad sea la misma al sacar una bola blanca en la caja B y en la caja A”, A25), o en menor medida, como propiedad para determinar la composición de la caja B (Figura 11).

Aunque la Tabla 2 recoge la clasificación de las estrategias de solución según su grado de RAE, es posible identificar algunos objetos algebraicos (relaciones, reglas generales, lenguaje simbólico) en las producciones de los alumnos, no registrados en dicha tabla por no formar parte de las prácticas que conducen a la solución. Así, tres estudiantes que no llegaron a resolver el problema expresaron la razón en lenguaje simbólico, correctamente $1b=3n$ (A2, A17) o de manera incorrecta 40n-10b derivando algunas razones equivalentes (Figura 6). Esto muestra indicios de pensamiento proporcional y un rasgo proto-algebraico que, sin embargo, no llegan a desarrollar para resolver adecuadamente el problema. Otros dos estudiantes que resolvieron el problema con una estrategia de reparto icónico (A43) o división por la razón (A17) establecen la relación general de equivalencia usando un lenguaje diagramático/simbólico como A43 “1 *bola b* → 3 *bolas n* → *Caja A*” pero, sin embargo, después no aplican esta regla general para deducir la solución.

Discusión

En este trabajo se ha analizado la actividad matemática de un grupo de estudiantes de sexto curso de primaria con formación previa en proporcionalidad y probabilidad al resolver una tarea que requiere determinar la composición de una urna para que la probabilidad de éxito sea la misma que en otra donde se conoce la razón de casos favorables a desfavorables. Se trata de una tarea sustancialmente distinta a las empleadas en investigaciones previas sobre comprensión de espacio muestral (Hernández-Solís et al., 2021b; Supply et al., 2020, 2023) que involucra una de las capacidades del razonamiento probabilístico, "crear probabilidades", que más dificultades causa a estudiantes según Supply et al. (2020). También juega en ella un papel fundamental el razonamiento proporcional.

Una vez establecida la relación entre la probabilidad de éxito y la composición de una urna, la tarea propuesta puede abordarse como un reparto proporcional: repartir 20 bolas entre blancas y negras de tal forma que la razón entre éstas sea 1:3. En general, podemos considerar que los alumnos resolvieron con éxito la tarea propuesta, ya que, en su mayoría, fueron capaces de determinar la distribución correcta de las bolas de manera proporcional. En este sentido, los resultados obtenidos en nuestra experiencia son mejores que los observados en trabajos como el de Sánchez Ordoñez (2014), quien en su estudio con estudiantado de entre 12 y 16 años señala una tendencia a realizar repartos equitativos en situaciones de reparto proporcional de ganancias económicas. También son mejores que los hallados por Yeong et al. (2020), donde sólo el 20,3% de los participantes resolvieron correctamente un problema análogo al nuestro en el contexto aritmético (reparto proporcional). Como en dicha investigación, el error más frecuente tiene que ver con la comprensión del todo (suma de las dos partes): se asume que el todo es una de las partes (se consideran 20 bolas blancas en lugar de 20 bolas totales en la caja B), o se establece una cantidad de bolas blancas y negras en la caja B que respeta la razón 1:3 pero que no suman 20 bolas. No hemos encontrado, al igual que Yeong et al. (2020) estrategias aditivas erróneas en la solución al problema por el alumnado.

En el contexto probabilístico, nuestros resultados concuerdan con los obtenidos por Hernández-Solís et al. (2021b, 2024), quienes observan una tasa de éxito elevada en la resolución de tareas de construcción del espacio muestral en el contexto de urnas para sucesos equiprobables por estudiantes de la misma edad. Sin embargo, difieren de los hallazgos de Supply et al. (2020, 2023) cuya investigación con escolares de entre 5 y 9 años muestra que estos tienden a emplear con frecuencia estrategias unidimensionales (aquellas en las que se presta atención a solo una de las variables implicadas) erróneas al resolver problemas de valor faltante relacionados con la construcción del espacio muestral.

A pesar del éxito al resolver la tarea, los estudiantes mostraron algunas carencias en su razonamiento probabilístico, lo que se observa fundamentalmente en su incapacidad para emplear argumentos para validar en términos probabilísticos la solución al problema (Sánchez y Valdez, 2017). Desde el punto de vista del razonamiento proporcional, un 44% de los alumnos desarrollaron una estrategia pre-formal aditiva (nivel 1 de Langrall y Swafford, 2000) y un 36% desarrollaron estrategias basadas en el uso de la razón o relaciones multiplicativas (nivel 2 de Langrall y Swafford, 2000).

Además del propio instrumento, otro de los aspectos novedosos en nuestra investigación es el análisis del nivel de RAE implicado, así como de la posible relación entre la pertinencia en la resolución de tareas probabilísticas que involucran la proporcionalidad y el razonamiento algebraico emergente. En contra de lo esperado, observamos que predominaron las estrategias de carácter aritmético (nivel 0 de RAE), y que solo el 11,11% de los escolares propusieron soluciones de nivel 1 de RAE. Este resultado muestra gran diferencia con los de Burgos y Godino (2019) en los que la mayoría de los estudiantes (10-11 años) exhibieron formas de razonamiento proto-algebraico incipiente cuando se enfrentaron por primera vez a tareas de proporcionalidad en un contexto aritmético. Además, en dicho trabajo se observó cierta relación entre el grado de pertinencia en la respuesta y el carácter proto-algebraico de las prácticas matemáticas realizadas, algo que no es tan evidente en la investigación actual, pues el porcentaje de soluciones correctas es mayor entre aquellas de carácter aritmético que entre las que ponen en juego estrategias de nivel 1 de RAE. Estos resultados sorprenden dado que, en nuestra investigación, el alumnado (11-12 años) había estudiado el tema de proporcionalidad y estaba familiarizado con estrategias propias de niveles superiores de RAE (Ecuación proporcional, regla de tres), que sin embargo no aplicaron para determinar la composición de la caja.

Para comprender mejor cómo influye el que la tarea sea probabilística en estos resultados, en relación tanto con el razonamiento proporcional como algebraico implicados, habría sido conveniente contrastarlos con respuestas de los mismos estudiantes a tareas aritméticas de reparto proporcional, por lo que, en futuras investigaciones, se ampliará el instrumento de recogida de datos en este sentido. Por otro lado, los resultados de investigaciones como la de Supply et al. (2020) sugieren que los escolares tienen más dificultades para determinar el valor faltante que para comparar razones en tareas probabilísticas. Sería interesante en futuros trabajos, investigar si este es el caso con problemas como el propuesto en nuestra investigación, con estudiantado de diferentes etapas educativas, valorando de este modo la influencia de la formación tanto en el razonamiento proporcional como probabilístico y si se observa evolución con relación al razonamiento algebraico empleado. De manera específica, en futuros trabajos pretendemos indagar si en niveles educativos superiores las estrategias empleadas corresponden a niveles de RAE más avanzados, prestando especial atención a cuál es su correlación con el nivel de desempeño.

Por otro lado, los niveles de algebrización se asignan a las prácticas matemáticas que los estudiantes desarrollaron en sus respuestas escritas a la tarea. Dado que, en muchos casos, los alumnos no justificaron sus soluciones, habría sido posible que por medio de entrevistas los estudiantes hubieran exhibido niveles de RAE superiores, especialmente en aquellos casos en los que la actividad es aritmética y no se llega a identificar un uso de la razón como intensivo.

Una limitación de nuestra investigación es que hemos situado el foco de atención en el significado clásico de la probabilidad. Dado que el razonamiento proporcional aparece también implicado en la resolución de tareas características de otros significados como el subjetivo o frecuencial (Batanero y Borovcnik, 2016), será necesario ampliar nuestro estudio a situaciones que se articulen sobre estos enfoques.

Finalmente, mencionemos algunas implicaciones para la docencia. Dado que el razonamiento algebraico en educación primaria supone reconocer y aplicar las propiedades estructurales de los números y sus operaciones, identificar y expresar relaciones y modelizar situaciones mediante diferentes representaciones (Godino et al., 2014, Radford, 2018), el profesorado debe ser capaz de aprovechar el potencial de tareas no intencionalmente algebraicas, como la que hemos mostrado en esta investigación, para desarrollar estas capacidades en sus estudiantes. Esto supone, en particular, conocer y promover el desarrollo de representaciones proto-algebraicas (verbales, diagramáticas, tabulares, gráficas) como paso previo a la introducción del lenguaje simbólico que ayude a dotar de significado a los símbolos alfanuméricos (Zeljić, 2015). Aunque existen evidencias de que el uso de este tipo de representaciones permite a los alumnos de primaria manipular relaciones de proporcionalidad (Burgos y Godino, 2019; Gaita et al., 2023) y funcionales (Torres et al., 2022), es importante analizar y promover su uso en la resolución de tareas probabilísticas, en particular en la construcción del espacio muestral o como estructura de la distribución de probabilidad.

Además, dado que el contexto influye de manera determinante en la capacidad del alumnado para razonar de manera proporcional (Supply et al., 2023) y la probabilidad introduce una forma de pensar diferente a otras ramas de las matemáticas (Borovcnik y Kapadia, 2014), es importante fomentar la discusión y argumentación, prestando atención a las conexiones explícitas entre proporciones y probabilidades, como medio para avanzar en el desarrollo articulado del razonamiento proporcional y probabilístico (Begolli et al., 2021).

Agradecimientos

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación, PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033/ y FEDER, con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 y HUM-886 (Junta de Andalucía, España).

REFERENCIAS

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA] (2014). *Foundation to year 10 curriculum: Statistics and Probability* (ACMSPO24).

Batanero, C. y Borovnick, M. (2016). *Statistics and probability in high school.* Sense Publishers.

Batista, R., Borba, R. y Henriques, A. (2022). Fairness in games: a study on children's and adults' understanding of probability. *Statistics Education Research Journal, 21*(1),13 (15 págs). https://doi.org/10.52041/serj.v21i1.79

Begolli, K. N., Dai, T., McGinn, K. M. y Booth, J. L. (2021). Could probability be out of proportion? Self-explanation and example-based practice help students with lower proportional reasoning skills learn probability. *Instructional Science 49*, 441–473. https://doi.org/10.1007/s11251-021-09550-9

Ben-Chaim, D., Keret, Y. y Ilany, B.-S. (2012). *Ratio and proportion: research and teaching in mathematics teachers' education (Pre- and in-service mathematics teachers of Elementary and Middle school classes)*. Sense Publisher. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-784-4

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I. y Kim, J.-S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 39-87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking* (pp. 7-34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_2

Bryant, P. y Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: A literature review (summary report)*. The Nuffield Foundation. https://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/NUFFIELD_FOUNDATION_CUoP_SUMMARY_REPORT.pdf

Burgos, M., Batanero, C. y Godino, J. D. (2022). Algebraization Levels in the Study of Probability. *Mathematics, 10*(1), 91. https://doi.org/10.3390/math10010091

Burgos, M. y Godino J. D. (2019). Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. *Educación Matemática, 31*(3), 117-150. https://doi.org/10.24844/EM3103.05

Castillo, S. y Fernández, C. (2022) Secondary school students' performances on ratio comparison problems. *Acta Scientiae, 24*(6), 60-88. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6834

Common Core State Standards Initiative [CCSSI] (2023). Common Core State Standards for Mathematics. https://corestandards.org/wp-content/uploads/2023/09/Math_Standards1.pdf

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, *30*(1), 129-142. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596

Gaita, C., Wilhelmi, M., Ugarte, F. y Gonzales, C. (2023). Indicadores de niveles de razonamiento algebraico elemental en educación primaria en la resolución de tareas de proporcionalidad con tablas de valores. *Revista de Educación Matemática, 35*(3), 49-81. https://doi.org/10.24844/EM3503.02

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencia*s, *32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Burgos, M. y Gea, M. (2022). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*, 2609-2636. https://doi.org/10.1080/0020739x.2021.1896042

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M. M. (2024). Relación entre la construcción de espacios muestrales y el razonamiento proporcional de estudiantes costarricenses. *Revista de Educación Estadística, 3,*1-28. https://doi.org/10.29035/redes.3.1.1

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2021a). Comparing probabilities in urns: A study with primary school students. *Uniciencia, 35*(2), 1-19. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.9

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2021b). Construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos: un estudio exploratorio con estudiantes de Educación Primaria. *Educación Matemática*, *33*(1), 181-207. https://doi.org/10.24844/em3301.07

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). Research on children's reasoning in comparing probabilities, *BEIO,39*(1), 1-24.

Jones, G., Langrall, C. y Mooney, E. (2007). Research in probability: responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 2, pp. 909-955). Information Age Publishing.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education, 54,* 1131-1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.24.1.0041

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Information Age Publishing.

Langrall, C. W. y Swafford, J. (2000). Three balloons for two dollars: Developing proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*(4), 254-261. https://doi.org/10.5951/MTMS.6.4.0254

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado, 52(I), 24386-24504.

Ministry of Education Singapore [MOE] (2012). Mathematics syllabus: Primary one to six. Singapur. Curriculum Planning and Development Division. https://www.moe.gov.sg/primary

Pratt, D. y Kazak, S. (2018). Research on uncertainty. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 193-227). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_6

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3-25). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Ruggeri, A., Vagharchakian, L. y Xu, F. (2018). Icon arrays help younger children's proportional reasoning. *British Journal of Developmental Psychology, 36*(2), 313-333. https://doi.org/10.1111/bjdp.12233

Sánchez Ordoñez, E. A. (2014). Hacer un reparto proporcional o un reparto equitativo: ¿cómo influye el contexto para tomar la decisión? *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 44-60.

Sánchez, E. y Valdez, J. (2017). Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de bachillerato. *Avances de investigación en educación matemática*, *11*, 127-143. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.180

Staples, M. y Conner, A. (2022). Introduction: Conceptualizing argumentation, justification, and proof in mathematics education. En K. Bieda, A. Conner, K. Kosko y M. Staples (Eds.), *Conceptions and consequences of mathematical argumentation, justification, and proof* (pp. 1-10). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6

Supply, A. S., Van Dooren, W. y Onghena, P. (2020). Can we count on early numerical abilities for early probabilistic reasoning abilities? *Math. Thinking and Learning, 24*(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1805551

Supply, A. S., Vanluydt, E., Van Dooren, W. y Onghena, P. (2023). Out of proportion or out of context? Comparing 8- to 9-year-olds' proportional reasoning abilities across fair-sharing, mixtures, and probability contexts.

Educational Studies in Mathematics, 113, 371-388. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10212-5

Torres, M. D., Cañadas, M. C., y Moreno, A. (2022). Pensamiento funcional de estudiantes de 2º de primaria: estructuras y representaciones. *PNA, 16*(3), 215-236. https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.23637

Truran, J. (1994). Examination of a relationship between children's estimation of probabilities and their understanding of proportion. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII PME* (pp. 337-344). Universidad de Lisboa.

Van Dooren, W. (2014). Probabilistic thinking: analyses from a psychological perspective. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 123-126). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_7

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *50*, 113-138. https://doi.org/10.1023/A:1025516816886

Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication… and back. The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction, 28*(3), 360-381. https://doi.org/10.1080/07370008.2010.488306

Yeong, J. I., Martínez, R. y Dougherty, B. (2020) Misconceptions on part-part-whole proportional relationships using proportional division problems. *Investigations in Mathematics Learning, 12*(2), 67-81. https://doi.org//10.1080/19477503.2018.1548222

Zeljić, M. (2015). Modelling the relationships between quantities: Meaning in literal expressions. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11*(2), 431-442. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1362a

María Burgos
Universidad de Granada, España
mariaburgos@ugr.es

María del Mar López-Martín
Universidad de Almería, España
mdm.lopez@ual.es

Nicolás Tizón-Escamilla
Universidad de Granada, España
tizon@ugr.es

Carmen G. Aguayo-Arriagada
Universidad de Almería, España
cgaguayo@ual.es

Recibido: enero de 2024. Aceptado: septiembre de 2024
doi: 10.30827/pna.v19i2.29887

CC BY NC ND

ISSN: 1887-3987

Proportional and Algebraic Reasoning of Students when Solving a Probabilistic Task

María Burgos, María del Mar López-Martín, Nicolás Tizón-Escamilla and Carmen G. Aguayo-Arriagada

Various studies show that insufficient proportional reasoning might underlie a significant portion of difficulties in the domain of probability. These works focused on analyzing schoolchildren's understanding when solving tasks involving the calculation or comparison of probabilities or on missing value tasks. However, we have not found research analyzing the algebraization degree of the schoolchildren's practices when facing tasks of proportionality in the probabilistic context nor an analysis of the possible relationship between success in solving such tasks and emerging algebraic reasoning.

In this research, a group of students in their final year of Primary Education are asked to determine the composition of an urn (with a known number of possible cases) so that the probability of success matches that of another in which the ratio between favorable and unfavorable cases is known. The interest in this task lies in connecting two essential components of probabilistic reasoning: identifying the proportional nature of probability calculation and understanding the sample space construction.

To analyze the mathematical activity of the schoolchildren concerning its algebraic nature, we examine their strategies to determine the composition of the urn, identify the forms of algebraic reasoning emerging from the mathematical practices developed while solving this task, and evaluate the relationship between solution relevance and the presence of (at least incipient) algebraic features. It was found that students were successful in determining the composition of the urn, as most were able to determine the correct distribution of balls proportionally. These results are better than those observed in previous studies addressing the resolution of proportional distribution problems in the arithmetic context by secondary education students. The potential of the probabilistic context to promote proportional reasoning is concluded. However, participants had difficulties in justifying their solutions. Since probability introduces a different way of thinking compared to other branches of mathematics, discussing, and arguing about the validity of strategies in the context of probability might contribute to developing proportional reasoning. The results also indicate limited proto-algebraic reasoning: purely arithmetic strategies predominate, with a higher percentage of correct solutions in the latter than in those with incipient algebraic features, which differs from the results obtained in previous research analyzing the connection between proportional and algebraic reasoning in arithmetic context.