ALEXANDRIA: R. Educ. Ci. Tec., Florianópolis, v. 17, p. 1-24, 2024.
https://doi.org/10.5007/1982-5153.2024.e95873

ALEXANDRIA

Revista de Educação em Ciência e Tecnologia

O que se Entende por Validação em Atividades de Modelagem Matemática?

What is Meant by Validation in Mathematical Modeling?

Lourdes Maria Werle de Almeida[a]; Rosângela Maria Kowalek[a]

a Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Brasil - lourdes@uel.br; rosangela.kowalek@uel.br

Palavras-chave:
Modelagem matemática. Validação. Verificação.

Resumo: O artigo apresenta resultados de uma pesquisa cujo foco é a validação e sua caracterização em atividades de modelagem matemática. A investigação é delineada por um caminho em que, primeiramente, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) e o Projeto Político Pedagógico de cursos de Licenciatura em Matemática, embasam a pertinência de discutir a validação e fornecem elementos para estruturar a questão de pesquisa: como a validação em atividades de modelagem matemática é compreendida e realizada nas práticas de modelagem matemática na sala de aula? Essa questão é investigada mediante pesquisa inventariante dirigida a produções no campo da modelagem matemática bem como a respostas a um questionário respondido por professores familiarizados com práticas de modelagem matemática. Do processo analítico decorre a caracterização de diferentes grupos de ideias relativamente à validação considerando especificidades de cada contexto. Além disso, as expectativas expressas nos documentos encontram ressonância na maneira como a validação é caracterizada na literatura.

Keywords:
Mathematical modeling. Validation. Verification.

Abstract: The article presents the results of a research whose focus is validation and its characterization in mathematical modeling activities. The article is outlined along a path in which, firstly, the BNCC and the Pedagogical Political Project for Degree in Mathematics courses, support the relevance of discussing validation and provide elements to structure the research question: how validation in modeling activities is understood and carried out in mathematical modeling practices in the classroom? This question is investigated through inventory research aimed at productions in the field of mathematical modeling as well as responses to a questionnaire answered by teachers familiar with mathematical modeling practices. The analytical process results in the characterization of different groups of ideas regarding validation considering the specificities of each context. Furthermore, the expectations expressed in the documents find resonance in the way validation is characterized in the literature.

Esta obra foi licenciada com uma Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional

Localizando a pesquisa

Discussões na literatura têm trazido ao debate a importância, e mesmo a necessidade, de desenvolver a criticidade dos alunos mediante o ensino e a aprendizagem da matemática (SKOVSMOSE, 2021; FRANKENSTEIN, 2004). Segundo Skovsmose (2021), validar resultados, fazer distinções e escolhas, tomar decisões, são processos associados ao desenvolvimento crítico dos alunos e podem permear ações educativas, particularmente no âmbito de aulas de matemática.

Dirigindo atenção à validação, a primeira questão é: o que é validação? A etimologia da palavra validação indica que o termo provém da junção das palavras validar e ação, em que validar vem do latim *validare* e significa, “fazer com que se torne válido a partir das regras em vigor”, e ação significa “fazer, agir” (HOUAISS, p. 1, 2021). A palavra validação se associa, portanto, a ação ou intenção de tornar algo válido e, como sugere outro dicionário (FERREIRA, 2009), tornar legítimo, legitimar.

Associada algumas vezes também a ações como legitimar e tornar válido, está a palavra verificação. Do latim - *verum facere* – verificação, como ato de verificar, significa *fazer verdadeiro*. Contudo, a verificação emerge de determinações da conduta de, intencionalmente, *ver se algo é isso mesmo*, "investigar a veracidade de alguma coisa” (LUCKESI, p. 15, 2011). O dicionário de filosofia se refere à verificação como ação ou efeito de verificar que consiste em “qualquer procedimento que permita estabelecer a verdade ou falsidade sobre uma situação qualquer [...] indicar a aferição de uma situação com base em regras ou instrumentos idôneos” (ABBAGNANO, p.999, 2007).

Dantas (1991) sugere que verificar é examinar, por meio de uma confrontação com os fatos, se alguma coisa é verdadeira ou falsa. Para o autor, “verificar algo requer a possibilidade da verificação de proposições, por meio da observação e do reconhecimento das condições que as tornam verdadeiras e aceitas ou falsas e, por conseguinte, rejeitadas” (DANTAS, p. 2, 1991).

Conforme apontam Thacker et al. (2006), a validação bem como a verificação de processos incluídos na validação, refletem facetas importantes do conhecimento e até da concepção de quem os realiza. No âmbito da matemática, para esses autores, entretanto, a verificação e a validação são elas próprias processos fundamentais para a quantificação e a construção da confiabilidade e da credibilidade de resultados decorrentes de ações sociais ou econômicas mais amplas, mas também daquelas que se restringem aos contextos educacionais.

Tendo a validação esse caráter de certificação e sendo importante na análise de atividades de matemática, podendo desencadear a criticidade dos alunos, conforme pontua

Skovsmose (2021), considera-se pertinente que documentos oficiais que norteiam o ensino de matemática abordem aspectos relativos à validação. Assim, a presente pesquisa inicia-se com um levantamento na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) relativamente aos indicativos da ocorrência e da importância da validação nas aulas de matemática.

Esse olhar indica que a BNCC se remete à validação nos objetivos de ensino bem como nas habilidades que os estudantes devem desenvolver nas aulas de matemática. Decorre, portanto, a necessidade de que metodologias de ensino de matemática promovam o trabalho com a validação nas atividades escolares. Dentre as metodologias de ensino de matemática, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica e as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio indicam a Modelagem Matemática. Assim, a presente pesquisa se dirige, particularmente, à validação em atividades de modelagem matemática.

Atividades de modelagem matemática buscam explicar ou prever especificidades relativamente às situações em estudo (GEIGER et al. 2022; BLUM, 2015; ALMEIDA, 2022) e seu desenvolvimento é orientado por algumas etapas que em Blum (2015), por exemplo, são identificadas como: (1) Compreensão da situação; (2) Simplificação da situação; (3) Matematização; (4) Construção do modelo matemático; (5) Interpretação dos resultados; (6) Validação; (7) Apresentação dos resultados.

Ferri (2018), referindo-se à etapa de validação definida por Blum (2015), afirma que validar significa avaliar os resultados obtidos com o uso do modelo construído frente às hipóteses definidas em etapas iniciais e, principalmente, frente às particularidades do problema definido. Ainda segundo Ferri (2018), como em muitas tarefas escolares não é requerido esse processo de validação, os alunos tendem a considerar concluída sua atividade de modelagem assim que obtém o resultado. No entanto, “se os resultados não são questionados frente à situação da realidade, então a modelagem não faz sentido” (FERRI, 2018, p. 17).

Assim, cabe ao professor intervir, requerendo e sinalizando aos estudantes a importância da validação. O professor de matemática, portanto, deve possuir conhecimento em relação à realização de atividades de modelagem matemática, devendo, sobretudo, esse conhecimento lhe ser proporcionado no decorrer de seu processo de formação.

Para buscar indícios da presença de atividades que requerem validação no curso de formação inicial de professores de matemática, a atenção é dirigida ao curso de Licenciatura em Matemática, visando identificar no Projeto Político Pedagógico (PPP) do curso a presença de disciplina que inclua modelagem matemática ou modelos matemáticos. Em particular, no PPP de cursos de Licenciatura em Matemática do estado do Paraná identificamos a inclusão de disciplina de Modelagem Matemática.

Pela análise do PPP dos cursos de Licenciatura em Matemática, foi identificada a recomendação de procedimentos de validação. A partir dessa identificação em disciplinas de modelagem matemática, a questão que orienta a presente investigação passa a ser: como a validação em atividades de modelagem matemática vem sendo compreendida e realizada nas práticas com modelagem matemática na sala de aula?

A discussão relativamente a essa questão vem orientada pelo olhar para pesquisas relativas à modelagem matemática e que discutem a validação, bem como para a prática de professores que trabalham com atividades de modelagem matemática na sala de aula.

Assim estruturado, o artigo é delineado por um caminho em que, primeiramente, a BNCC e os PPP de cursos de Licenciatura em Matemática, embasam a pertinência de discutir a validação e fornecem elementos para estruturar a questão de pesquisa. Essa questão, por sua vez, é investigada mediante pesquisa inventariante dirigida a produções no campo da modelagem matemática bem como a respostas a um questionário respondido por professores familiarizados com práticas de modelagem matemática.

Percurso metodológico

O percurso metodológico da presente pesquisa inclui, primeiramente, a busca pela indicação em estruturas curriculares de atividades que recomendam a validação como um processo matemático. Para buscar esses indicativos na Educação Básica, a atenção é dirigida à Base Nacional Curricular Comum (BNCC). A seleção da BNCC se deu pela sua atualidade e importância como determinante de políticas e práticas educacionais uma vez que "regulariza e define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica" (BRASIL, 2018, p. 7).

No curso de Licenciatura em Matemática como o momento de formação inicial do futuro professor de matemática, a análise se volta para a disciplina de Modelagem Matemática. A busca pela disciplina se deu no PPP do curso, sendo as informações obtidas mediante busca no site de cada universidade pública do Paraná bem como por meio de envio de e-mail aos coordenadores do curso em cada instituição.

Para buscar indicativos de validação e verificação na BNCC e no Projeto Político Pedagógico dos cursos foram usadas palavras-chave indicadas em Czocher et al. (2018) como sendo termos que remetem à validação ou à verificação em matemática. Essas palavras são: comparar, controlar, analisar, tirar conclusões, estimar, justificar, identificar limitações, prever, reconhecer a razoabilidade, refletir, validar, verificar e avaliar.

Da busca na BNCC pode-se concluir que a validação é indicada e requerida no ensino de matemática, devendo sua introdução ser associada a metodologias de ensino pertinentes. Já no PPP o indicativo é de que a modelagem matemática é uma possibilidade de incluir a validação na formação do futuro professor.

Com base na busca na BNCC e no PPP dos cursos de Licenciatura em Matemática investiga-se como se dá a validação em atividades de modelagem matemática. Essa investigação é orientada por uma pesquisa inventariante seguindo orientações apontadas em Bryman (2012) relativamente à revisão sistemática e que inclui cinco etapas: (i) definição do propósito da revisão; (ii) busca por estudos ou pesquisas relevantes; (iii) análise preliminar do material selecionado; (iv) análise detalhada do material selecionado; e (v) agrupamento das ideias.

O propósito da revisão é identificar o que as pesquisas revelam sobre a compreensão e realização da validação e da verificação em atividades de modelagem matemática na sala de aula.

A busca pelas publicações se dá em uma amostragem intencional que consiste na seleção estratégica de uma amostra (BRYMAN, 2012). Essa seleção se deu pela busca de artigos em diferentes contextos, países e línguas, sendo realizada com o uso da ferramenta pesquisa avançada do Google Acadêmico. Os termos de busca inseridos são: Verificação, Validação, Verification e Validation (ou validating) no campo destinado a palavras que deveriam aparecer nos títulos; os termos modelagem matemática, educação matemática e mathematical modeling (ou mathematical modelling), mathematics education no campo destinado a palavras que deveriam aparecer no resumo. Foram identificados dessa busca doze artigos, sendo todos em revistas internacionais e escritos em inglês. Visando encontrar trabalhos em revistas nacionais e escritos em português, a pesquisa foi estendida para a busca dessas mesmas palavras também no corpo do texto. Com essa busca oito artigos foram selecionados, completando assim a amostra com vinte artigos publicados.

Por meio da análise inicial, que consiste em uma leitura preliminar dos textos, a amostra foi reduzida para onze, descartando os artigos que, embora contenham alguma das palavras de busca, não sinalizam ou mencionam a validação e verificação ao longo das discussões. Dos onze artigos, sete são pesquisas internacionais e quatro pesquisas brasileiras.

Para o olhar sobre a prática docente com modelagem matemática, três professores foram convidados a responder um questionário com três perguntas relacionadas à validação. Assim, utilizamos como fonte de investigação um questionário respondido via e-mail pelos professores convidados, que recebem os nomes fictícios de Lucas, Pedro e Paulo. A seleção destes professores se deu considerando seus contextos de atuação e experiências profissionais. O professor Lucas trabalha com a modelagem matemática no Ensino Superior há 47 anos. O

professor Pedro trabalhou com modelagem matemática na Educação Básica por 4 anos e há 20 anos leciona disciplinas no Ensino Superior. O professor Paulo usa a modelagem matemática em suas aulas na Educação Básica há mais de 20 anos.

Cada professor respondeu, individualmente, a três perguntas: 1) Qual o seu entendimento de validação em atividades de modelagem matemática?; 2) Na sua opinião, como os alunos podem realizar a validação em atividades de modelagem matemática?; 3) Quais procedimentos você recomenda aos seus alunos relativamente à ação de validar o que fazem na modelagem matemática? Além de apresentar respostas, cada professor poderia acrescentar opiniões relativas ao uso de atividades de modelagem matemática em sua prática docente.

Resultados e discussão

Validação e verificação na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Levando em consideração os argumentos de Czocher, Stillman e Brown (2018) no que diz respeito a ações que remetem a validar, a busca por indicativos de validação e de verificação na BNCC se deu pelas palavras: comparar, controlar, analisar, tirar conclusões, estimar, justificar, identificar limitações, prever, reconhecer a razoabilidade, refletir, validar, verificar e avaliar.

Localizada a palavra, realizou-se uma leitura do parágrafo ou da seção, selecionando as frases que remetem às palavras pesquisadas.

No Quadro 1 constam os excertos do texto da BNCC obtidos com essa busca. A organização do quadro segue a estruturação da própria BNCC, que considera separadamente a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, incluindo objetivos e habilidades para a Educação Básica.

Quadro 1 – Indícios de verificação e validação na BNCC

Seção da BNCC	Excertos	
	Objetivos	**Habilidades**
Etapa da Educação Infantil	"Analisar e justificar diferenças ou semelhanças entre informações (BNCC, 55)". "Estimar e comparar quantidades de objetos em um dado contexto (BNCC, 56)".	"Os estudantes deverão ser capazes de avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações (BNCC, 56)".
Etapa do Ensino Fundamental	"Interpretar e analisar dados (BNCC, 274)". "Utilizar ferramentas tecnológicas para avaliar e comparar resultados (BNCC, 274)". "Justificar o raciocínio utilizado (BNCC, 275)". "Perceber a importância checar/verificar os cálculos (BNCC, 275)".	**"**Os estudantes deverão ser capazes de analisar criticamente o que é produzido (BNCC, 309)". "Os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados (BNCC, 307)". "Os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões (BNCC, 311)".
Etapa do Ensino Médio	"Resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BNCC, 511)". "Analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco (BNCC, 535)". "Verificar a razoabilidade de respostas (BNCC, 529)".	"Desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas (BNCC, 532)". "Capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações (BNCC, 536)".

Fonte: Autores (2023).

A busca na BNCC identifica que as palavras pesquisadas (comparar, analisar, estimar, justificar, reconhecer a razoabilidade, validade, verificar, avaliar) são competências e habilidades que os alunos devem desenvolver mediante as atividades de Matemática. Além disso, referem-se a ações que se espera que os alunos manifestem ao trabalhar com problemas e conteúdos relacionados à Matemática, sendo consideradas necessárias para análise de resultados obtidos para um problema, subsidiando a conclusão da atividade matemática desenvolvida.

Validação e verificação na disciplina de Modelagem Matemática em cursos de Licenciatura em Matemática do estado do Paraná

A partir de uma busca nas instituições públicas do estado do Paraná, foram identificados 17 cursos de Licenciatura em Matemática que ofertam a disciplina de Modelagem Matemática. O resultado da busca no Projeto Político Pedagógico pelo programa da disciplina de Modelagem Matemática em cada curso é apresentado no Quadro 2. Vale ressaltar que em todos os cursos a busca foi direcionada à ementa e aos objetivos da disciplina incluídos no programa.

Quadro 2 – Indicativos de validação identificados no PPP de cada curso

Universidade	Cidade	Nome da Disciplina	Indicativos de validação na ementa	Indicativos de validação nos objetivos
Universidade Federal do Paraná (UFPR)	Jandaia do Sul	Modelagem Matemática	Análise de modelos matemáticos e de conteúdos abarcados pelos modelos.	Construção e análise de atividades de modelagem matemática.
	Palotina Pontal do Paraná	Modelagem Matemática	Análise de resultados obtidos pelos modelos matemáticos.	Não consta.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)	Curitiba	Modelagem Matemática no Ensino	Validação de modelos matemáticos.	Não consta.
	Pato Branco	Modelagem Matemática	Não consta.	Utilização e análise das técnicas de modelagem matemática.
	Cornélio Procópio	Modelagem Matemática	Análise de modelos clássicos e do conteúdo matemático correspondente.	Não consta.
	Toledo	Modelagem Matemática	Não consta.	Analisar a evolução de modelos matemático.
Universidade Estadual de Londrina (UEL)	Londrina	Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática	Construção e análise de modelos matemáticos, em atividades desenvolvidas em diferentes níveis de ensino.	Não consta.
Universidade Estadual do Centro Oeste do Paraná (UNICENTRO)	Guarapuava	Modelagem Matemática na Educação Matemática I e II	Não consta.	Analisar o desenvolvimento de práticas de modelagem matemática.
Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP)	Cornélio Procópio	Modelagem Matemática na Educação Matemática	Elaboração, aplicação e análise de modelos matemáticos clássicos.	Analisar modelos clássicos.
	Jacarezinho	Introdução à Modelagem Matemática	Analisar métodos clássicos do conteúdo matemático. Analisar os fenômenos e a transição dos mesmos através da linguagem matemática.	Não consta.

Fonte: Autores (2023).

Nas disciplinas de Modelagem Matemática como descritas no PPP identificamos indícios da recomendação da validação na ementa e nos objetivos (Quadro 2). A validação se caracteriza como ação que permeia a análise dos modelos, dos resultados, dos métodos, das técnicas, dos resultados bem como de práticas de modelagem matemática.

Artigos científicos da área de Modelagem Matemática

Os onze[1] artigos selecionados a partir da análise inicial estão identificados no Quadro 3. A cada artigo foi atribuído um código A_i em que *i* indica a numeração do artigo selecionado.

Quadro 3 – Indicativos de validação ou verificação identificados nos PPPS

Código	Título	Autores	Publicação
A_1	Verification and Validation: What Do We Mean? (Verificação e validação: a que estamos nos referindo? (tradução nossa))	Jennifer A. Czocher; Gloria Stillman; JillBrown	Mathematics Education Research Group of Australasia,2018.
A_2	How does validating activity contribute to the modelling process? (Como a atividade de validação contribui para o processo de modelagem? (tradução nossa))	Jennifer A.Czocher	Educational Studies in Mathematics, 2018.
A_3	Conceptualization of Approaches and Thought ProcessesEmerging in Validating of Model in Mathematical Modeling in Technology Aided Environment. (Conceituação de Abordagens e Processos de Pensamento Emergentes na Validação do Modelo em Modelagem Matemática em um Ambiente Auxiliado por Tecnologia. (tradução nossa))	Çağlar Naci Hidiroğlu; Esra Bukova Güzel	Educational Sciences: Theory and Practice, 2013.
A_4	Conditions for teaching materials that support learners'validation: an analysis of 8th-grade students' mathematical problem-solving processes (Materiais didáticos que apoiam a validação dos alunos: uma análise dos processos de resolução de problemas matemáticos dos alunos da 8ª série (tradução nossa))	Ippo Ishibasshi;Yusuke Uegatani	JSSE ResearchReport, 2018.
A_5	Creation of possible fictional worlds as a process of validation in mathematical word problem-solving and mathematical modeling activities (Criação de possíveis mundos ficcionais como um processo de validação em atividades matemáticas de resolução de problemas e modelagem matemática (tradução nossa))	Ippo Ishibasshi;Yusuke Uegatani	JSSE ResearchReport, 2019.
A_6	Cultural relevance of validation during mathematical modeling and word problem-solving: Reconceptualizing validation as an integration of possible fictional worlds (Relevância cultural da validação durante a modelagem matemática e a resolução de problemas de palavras: Reconceituando a validação como uma integração de mundos ficcionais possíveis (tradução nossa))	Ippo Ishibasshi;Yusuke Uegatani	The Journal of Mathematical Behavior, 2022
A_7	The Teacher and Peer Intervention for Pre-Service Mathematics Teachers on the Validity of Mathematical Models (A intervenção do professor e dos pares para professores de matemática em formação sobre a validade dos modelos matemáticos (tradução nossa))	Zeynep C. Gurel; Mehmet Bekdemir	Pedagogical Research, 2022

[1] Dos onze artigos, apenas quatro são de autores brasileiros. A busca, como conduzida, só se dirigiu a artigos, não identificando livros. Obras brasileiras como Bassanezi (2004) e Almeida, Silva e Vertuan (2012), são exemplos de livros que remetem à validação em modelagem matemática.

A_8	Modelagem Matemática e uma Proposta de TrajetóriaHipotética de Aprendizagem.	Pamela E. Pereira; Karina A. P. Silva	Bolema, 2019
A_9	As implicações de uma prática de modelagem matemáticadesenvolvida a partir da cobertura de uma casa.	Márcia J. H. Rehfeldt; Italo G. Neide; Wolmir J. Böckel; Karina Azambuja	Atos de Pesquisa em Educação, 2019.
A_{10}	Aprender com modelagem: relações entre modelagem(matemática) e processos criativos	Zulma E. F. Madruga; Valderez M. R. Lima	Alexandria, 2019.
A_{11}	Os saberes não matemáticos articulados às práticas sociais com matemática	Cláudia F. A. E. Santo; Saddo Almouloud	REMATEC, 2019.

Fonte: Autores (2023).

Dos onze artigos selecionados, cinco têm como objetivo a validação e seis, embora não tenham a validação como objetivo de investigação, apresentam apontamentos e indícios pertinentes à validação em modelagem matemática. A análise detalhada de cada artigo (como terceira etapa dos encaminhamentos sugeridos por Bryman, 2012), elucida o que em cada artigo é abordado relativamente à validação e verificação em atividades de modelagem matemática.

O artigo A_1 associa a validação com ações que visam olhar para os procedimentos usados ao longo das etapas do desenvolvimento de uma atividade de modelagem e avaliar a necessidade de rever ou analisar passos ou procedimentos realizados, a fim de tomar alguma decisão. Este entendimento se ampara na investigação teórica que fomenta uma discussão sobre verificação e validação em problemas de modelagem matemática, ancorados em um estudo sobre a presença de tais termos em documentos norteadores do currículo da Austrália e dos Estados Unidos, bem como em relatos de pesquisas envolvendo modelagem matemática.

Também em A_1, as autoras apontam que ainda não há no âmbito da área de Modelagem Matemática um conceito preciso para a validação, seja do ponto de vista teórico, seja em relação a como a sua ocorrência pode ser inferida do ponto de vista metodológico. Entretanto, há a indicação de que verificação e validação não podem ser entendidos como um único processo. Verificação e validação desempenham papéis distintos em atividades de modelagem, sendo a verificação um sub-processo da validação e que tem como intenção analisar os cálculos matemáticos e o modelo matemático construído.

No artigo A_2 a validação é apresentada como conjunto de ações que ocorrem de modo contínuo e ao longo do desenvolvimento da atividade de modelagem. Assim, ela se dá forma integrada com os procedimentos dos alunos e se caracteriza como uma habilidade complexa e multifacetada. Este entendimento é embasado em investigações empíricas realizadas por Czocher (2018) em que a autora elucida que a validação, no contexto de um curso de engenharia, ocorreu quando as ações dos alunos no desenvolvimento da atividade requereram tomada de decisão em relação aos cálculos, ao modelo, ao resultado ou até mesmo em relação às ideias resolução que não funcionaram bem na atividade. Com base nas ações dos alunos, a

autora caracteriza uma tipologia para a validação, caracterizando cinco tipos de validação nomeados como V_1, V_2, V_3, V_4 e V_5.

No tipo V_1 as ações incidem sobre os resultados matemáticos e o que é avaliado são os cálculos e procedimentos matemáticos; no tipo V_2 as ações incluem avaliar o modelo matemático, seus parâmetros e variáveis bem como a sua articulação com o que no ciclo de modelagem se caracteriza como modelo da situação e corresponde à situação idealizada; no tipo V_3 estão ações que, sutilmente, diferem daquelas de V_2 uma vez que avaliam o modelo matemático em relação às características do problema real; no tipo V_4 as ações visam avaliar a resposta obtida em relação à situação da realidade considerando as expectativas empíricas e as informações sobre a situação; por fim o tipo V_5 compreende ações de avaliar os resultados em relação aos dados e as informações conhecidas sobre a situação da realidade. Para essa tipologia, a autora apresenta uma representação (Figura 1) com base no ciclo de modelagem matemática apresentado em Blum (2025), especificando entre quais etapas cada tipo de validação tem ênfase.

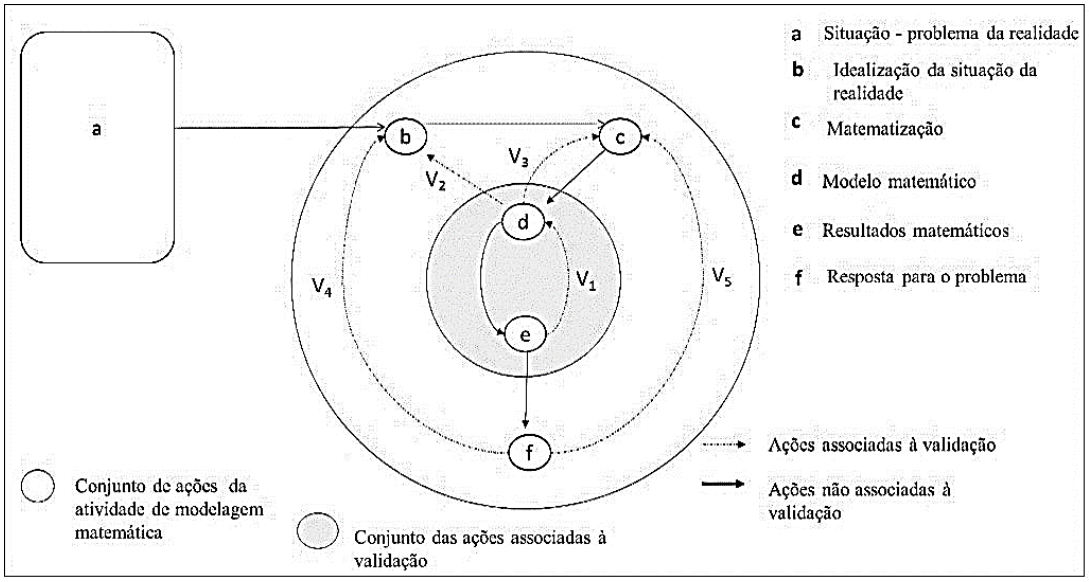

Figura 1 –Tipos de validação em atividades de modelagem
Fonte: Czocher (2018, p. 151 – tradução nossa)

A tipologia foi caracterizada pela autora com base em uma pesquisa empírica. Czocher (2018) pondera então que as ações de validação podem ocorrer de diferentes modos em diferentes atividades, dependendo dos objetivos da atividade e do contexto em que ela se dá.

O artigo A_3 indica um entendimento de que "a validação deve, de modo geral, analisar a relação entre mundo matemático e mundo real, de modo que soluções e resultados matemáticos na atividade façam sentido para a situação do mundo real" (HIDIROĞLU e GÜZEL, 2013, p. 2501). Os autores fazem distinção entre verificação e validação, sendo a primeira concernente à precisão do modelo em relação aos dados coletados ou produzidos experimentalmente. "Se a verificação do modelo for satisfatória então o próximo passo é elaborar uma solução para o problema" (HIDIROĞLU E GÜZEL, 2013, p. 2501, tradução

nossa). Assim, para os autores de A_3, a verificação se configura como parte da validação, sendo dirigida de modo específico ao modelo, sinalizando que verificação e validação são processos com objetivos diferentes, mas que se complementam.

Os autores de A_3 ponderam que validar e verificar podem ser procedimentos complexos para os alunos não familiarizados com atividades de modelagem, sendo importante a condução e orientação do professor. Hidiroğlu e Güzel (2013) sinalizam possíveis abordagens para a validação em sala de aula, organizando cinco categorias decorrentes de uma investigação empírica com professores ao desenvolver um conjunto de atividades de modelagem matemática: 1) Verificação dos resultados inesperados obtidos pelo modelo; 2) Comparação dos resultados encontrados pelo modelo matemático com previsões ou medições baseadas em experimentos; 3) Comparação dos resultados encontrados pelo modelo matemático com os dados do problema; 4) Comparação dos resultados encontrados pelo modelo matemático com a situação real; 5) Tomada de decisão sobre adequação do modelo matemático para a obtenção da resposta ao problema identificado na situação real.

No artigo A_4 os autores sinalizam que a validação é entendida por eles conforme descrita em Czocher (2018), sendo, portanto, um conjunto de ações que ocorrem de modo contínuo no decorrer do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. A partir desse entendimento, os autores investigam se os tipos de validação realizados pelos alunos do Ensino Superior na pesquisa de Czocher (2018), também são evidenciados por alunos da Educação Básica e como os materiais utilizados para o estudo podem auxiliar no processo de validação.

Com essa finalidade os autores apresentam uma análise de atividades de problemas-de-palavras, que foram desenvolvidos por alunos do 8º ano de uma escola japonesa. A conclusão dos autores é de dentre os tipos de validação caracterizados por Czocher (2018), os de maior ocorrência nas atividades na Educação Básica foram os tipos V_4 e V_5. No entanto, segundo os autores de A_4, em alguns momentos a validação do tipo V_2 incluiu V_3 e V_4 incluiu V_5. O artigo conclui que perceber as inconsistências de seus resultados ou ser questionado por seus colegas e pelo professor sobre os resultados obtidos, constituem “gatilhos” para o aluno realizar a validação.

O artigo A_5 apresenta uma compreensão de que “a validação é conferir os procedimentos assumidos e realizados nas etapas da modelagem matemática” (ISHIBASSHI; UEGATANI, 2019 p.169, tradução nossa). Os autores analisam atividades de problemas–de-palavras desenvolvidas por uma turma de 8º ano de uma escola japonesa em que observam as comparações realizadas pelos alunos para validar a resolução do problema. O artigo conclui que os alunos utilizam um modo particular de validação a “criação de possíveis mundos fictícios” (ISHIBASSHI; UEGATANI, 2019, p. 165). Essa validação descreve que os

resultados e resoluções encontrados são comparados com aspectos fictícios elencados pelos alunos, ou seja, os alunos comparam respostas, resultados ou partes da resolução às situações idealizadas.

No artigo A_6 Ishibasshi e Uegatani (2022) apresentam uma continuação da pesquisa descrita em A_5, aprofundando as investigações e propondo um novo tipo de validação que leva em consideração a relevância cultural das soluções. Segundo os autores, nas atividades dos alunos a validação foi percebida "como um ato de fazer sentido em um domínio social e não apenas em um domínio pessoal" (ISHIBASSHI; UEGATANI, 2022, p.8, tradução nossa). Isso significa que os alunos pensaram e analisaram os procedimentos e resultados no contexto da atividade, mas também em situações da realidade, refletindo e discutindo se o resultado obtido condiz com que se observa no contexto social e se é aceitável segundo normas e padrões vigentes neste contexto. Os autores sugerem então que "a validação é um processo de produção de sentido" que leva em consideração tudo o que se inclui no desenvolvimento da atividade, ou seja, ou seja, a matemática, o contexto social em que se identifica o problema em estudo, bem como os conhecimentos dos alunos (ISHIBASSHI e UEGATANI, 2022, p. 15, tradução nossa). Sobre a condução da validação nas atividades, o texto indica que ela ocorreu em diferentes momentos e inclui análises e verificações que os alunos realizaram espontaneamente.

Em A_7 apresenta-se resultados de uma pesquisa realizada com professores e cujo objetivo é explicar a intervenção dos professores na etapa de validação dos modelos nas atividades desenvolvidas por seus alunos. Os autores não apresentam uma caracterização do que é validar, mas mencionam que "a validação é inerente a etapas da modelagem" (GUREL; BEKDEMIR, 2022, p. 3). No entanto, na pesquisa empírica descrita, o olhar é dirigido à etapa de construção do modelo, indicando que a validação implica em verificar a validade dos modelos e revisar o modelo. As intervenções dos professores na etapa de validação envolvem questionamentos aos alunos relativos à validade do modelo, à adequação das hipóteses e a confiabilidade nas respostas.

No artigo A_8 a validação é compreendida como uma das etapas finais que visa, além da capacidade de aplicar o modelo matemático, o desenvolvimento da capacidade de avaliar o processo de construção do modelo e os diferentes contextos de suas aplicações. Essas etapas podem apresentar constantes movimentos de idas e vindas, pois, às vezes, se torna necessário reformular ou analisar as etapas anteriores (FERREIRA; SILVA, 2019, p.1238).

Para esses autores, a validação é uma avaliação do modelo e do resultado obtido. Os autores evidenciam que as validações são importantes para que a modelagem matemática realizada pelos alunos se torne completa, o que indica uma compreensão da importância do ato de validar em atividades dessa natureza.

O artigo A_9 descreve a validação como uma etapa do desenvolvimento da atividade de modelagem. Para esses autores, a validação inclui uma avaliação e análise dos dados, dos modelos e das respostas, o que sinaliza que a validação nesse estudo é empreendida pelos alunos em diferentes momentos do desenvolvimento da atividade.

Discussões pertinentes sobre validação em atividades de modelagem matemática também são apresentados no artigo A_{10} em que os autores versam sobre apontamentos de que a validação é um processo constituinte da modelagem e que se manifesta após formular o modelo e encontrar uma resposta para o problema. Assim, pode ser caracterizada como um momento de análise da resposta matemática para o problema e da adequação do modelo às particularidades da situação em estudo.

De modo semelhante, o artigo A_{11} também indica que a validação em modelagem é a validação da resolução matemática para o problema e a adequação do modelo. Assim, em A_{11} a validação consiste na ação de tomada de decisão sobre os modos de fazer e de pensar as próprias práticas em que a situação em contexto foi estudada.

Prática docente com modelagem matemática

Para conhecer como professores que usam modelagem matemática em sua prática docente entendem a validação, foi definida uma amostra de três professores para responder de forma individual a três perguntas cada um. Embora seja uma amostra pequena, trata-se de professores com larga experiência com modelagem na sala de aula e também incluem experiência com a docência no Ensino Superior bem como na Educação Básica. Para manter o anonimato, os professores são referidos como Paulo, Lucas e Pedro. As respostas à primeira questão constam no Quadro 4.

Quadro 4 - Respostas dos professores para a primeira questão

Qual o seu entendimento de validação em atividades de modelagem matemática?	
Professor	**Resposta**
Paulo	Eu penso que validação é um processo de avaliação do modelo matemático. Essa avaliação pode levar em conta critérios variados, como, por exemplo, a adequação empírica do modelo, ou seja, a concordância dos dados obtidos pelo modelo com os dados coletados empiricamente. Em geral,

	entendo que a validação é um processo externo, diz respeito a quem que faz uso do modelo e não necessariamente diz respeito a quem elabora um modelo.
Lucas	[...] Costumo afirmar aos meus alunos que a Modelagem Matemática de fenômenos sociais e naturais é válida se serve àquilo a que a nós a destinamos. [...] Muitas vezes, consideramos uma modelagem como válida quando conseguimos o que eu chamo, por brincadeira, de "prever o passado": o interlocutor nos dá uma situação inicial e, a partir dessa situação, simulamos o que viria a ocorrer. Se essa previsão estiver suficientemente próxima do que ocorreu, a modelagem se mostrou relativamente válida. [...] E, muitas vezes, adotamos a relativa validade de um modelo ao obter resultados condizentes com as expectativas tanto do modelador matemático quanto de seu interlocutor.
Pedro	[...] a validação como um processo de ajuste entre a compreensão de uma dada situação-problema e a representação matemática. [...]. O modelador navega entre ambas as dimensões: a compreensão da situação-problema e a representação matemática. Diferentemente do que apontam alguns manuais de matemática aplicada, não vejo a validação como uma etapa ou uma etapa, mas um processo contínuo de "checagem" entre a compreensão da situação-problema e a representação matemática.

Fonte: Autores (2023).

As respostas para a primeira questão possibilitam dois vieses de entendimento. Os professores Paulo e Lucas parecem se referir à validação como um processo que busca analisar o modelo matemático. O professor Pedro, sinaliza que compreende a validação como um processo contínuo de "checagem" entre a compreensão da situação-problema e a representação matemática, enfatizando que seu entendimento não é de que a validação é uma etapa ou etapa única, mas algo contínuo no decorrer da atividade.

Quadro 5 – Respostas dos professores a segunda questão

Na sua opinião, como os alunos podem realizar a validação em atividades de modelagem matemática?	
Professor	**Resposta**
Paulo	[...] que o professor pode incentivar e questionar os estudantes o quanto um modelo consegue retratar a realidade. Em modelos dados por funções, por exemplo, é possível discutir a diferença entre os dados calculados pelo modelo e medidos experimentalmente. Penso também que é importante o professor mostrar exemplo clássicos de reformulação de modelos matemáticos em consequência de uma avaliação negativa, como por exemplo, o modelo de Malthus de crescimento populacional.
Lucas	1) vendo se a modelagem matemática e as resultantes simulações condizem com expectativas do interlocutor (aquele que propõe a situação-problema) e do modelador (aquele que cria o modelo e efetiva seu uso); 2) comparando o uso do modelo matemático nas situações-problema com o que de fato acontece; 3) e, sobretudo, dialogando com colegas e interlocutores: isto é algo de Paulo Freire, a construção dialógica de conhecimento, e a crítica dos resultados tanto pelo ponto de vista da matemática quanto do ponto de vista da sociedade e da natureza. Neste sentido, é muito importante que, no trabalho da Modelagem Matemática, se interaja com pessoas com visões, opiniões, conceitos diferentes, bem diferentes, em muitos casos! Neste caso é bom discordarmos uns dos outros: das discussões resultantes, vem um importante aspecto da validação.
Pedro	Em um ambiente de modelagem em que se trabalhe com uma situação-problema, esta última não é ponto de partida, é "contexto". Ou seja, tudo que se faz na resolução do problema dá-se nesse contexto. Assim, a validação, se considerarmos o entendimento acima, está presente em todas as ações dos alunos; quando simplificam a situação, quando escolhem que matemática utilizar, quando geram soluções e as interpretam.

Fonte: Autores (2023).

O professor Paulo caracteriza o validar como um processo orientado de observar o quanto o modelo matemático consegue retratar a realidade, emergindo daí a possibilidade de reformular o modelo quando necessário. Lucas e Pedro indicam que entendem que realizar a validação está associado a olhar para o resultado encontrado para o problema, observar o

processo de resolução, dialogar com os colegas e professor. Apesar de compreensões diferentes sobre a validação, os professores pontuam a importância da presença e orientação do professor para validar.

Quadro 6 - Respostas dos professores para a terceira questão

Quais procedimentos você recomenda aos seus alunos relativamente à ação de validar o que fazem na modelagem matemática?	
Professor	**Resposta**
Paulo	[...] pedir que os estudantes se coloquem no lugar do "consumidor" do sujeito que vai utilizar o modelo e faça a avaliação. Por exemplo, i) Se você utilizar esse modelo, você acha que suas conclusões são adequadas? [ii] se você utilizar esses dados do modelo que consequências issopode ter? Que confiança você tem de que esses dados estão corretos?
Lucas	[...]discordar, dialogar, negociar são fundamentais no processo de agir para validar, além de estudar e analisar a situação-problema bem como os instrumentos matemáticos adotados. Nem sempre as verdades matemáticas "servem" para o modelo.
Pedro	Recomendo que não esqueçam do contexto do problema. Ele estabelece os limites que representação matemática pode gerar e como podemos manipulá-la.

Fonte: Autores (2023).

As respostas dos professores indicam que estimulam nos alunos ações que os instiguem a pensar e refletir sobre os resultados de seus modelos, as respostas para o problema bem como para a reflexão do conjunto de ações no decorrer da atividade. Fazer a validação é um processo orientado pelo professor visando avaliar possibilidades e limites do modelo para a apresentação da resposta.

Agrupando ideias

Do olhar sobre os onze artigos publicados e as respostas dos três professores é possível agrupar ideias relativamente à caracterização e realização da validação em atividades de modelagem matemática. São caracterizados cinco grupos de ideias relativamente à validação: (1) validação como ação pontual em etapa específica do ciclo de modelagem ou validação como ação que se estende ao longo das etapas do desse ciclo; (2) o foco da validação é exclusivamente o modelo matemático ou a validação também se direciona para a avaliação de procedimentos para a construção do modelo; (3) pode-se caracterizar diferentes tipos de validação no decorrer da atividade, considerando finalidades específicas; (4)há distinção explícita entre verificar e validar em atividades de modelagem; (5) a caracterização de especificidades do ato de validar em atividades de modelagem.

Identificação da validação como ação pontual em etapa específica do ciclo de modelagem ou como ação que se estende ao longo das etapas desse ciclo

O entendimento de validação em diferentes etapas do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática refere-se a ações que ocorrem de modo contínuo no decorrer da

atividade, tendo como objetivo realizar avaliações, ajustes, checagem entre o problema, sua resolução e a resposta obtida.

A validação em diferentes etapas do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática foi evidenciada nos artigos A_1, A_2, A_4 e A_5 em que o ato de validar ocorre de modo contínuo e concomitante às ações dos alunos na modelagem. Integrada às diferentes etapas de modelagem identificadas em Blum (2015), a validação é caracterizada pelos autores dos artigos como uma habilidade complexa e multifacetada, tendo por finalidade confirmar a validade de todo o desenvolvimento de uma atividade de modelagem e não apenas da resposta obtida.

Apesar de no artigo A_9 os autores não deixarem explícito que seus alunos realizaram a validação em diferentes etapas do ciclo, eles fornecem indícios de que ela deve ser dirigida aos dados, ao modelo, às respostas, sinalizando que validar é ação que se dá em vários momentos de uma atividade de modelagem.

Nesta direção também está o entendimento do professor Pedro "Em um ambiente de modelagem em que se trabalha com uma situação-problema, esta última não é ponto de partida, é contexto. Portanto, tudo que se faz na resolução do problema dá-se nesse contexto. Assim, a validação, está presente em todas as ações dos alunos: quando simplificam a situação, quando escolhem qual matemática utilizar, quando geram soluções e as interpretam".

O foco da validação pode ser o modelo matemático ou a avaliação de procedimentos para sua construção

O artigo A_6 indica que os alunos investiram na validação nas atividades de modelagem matemática e revela que quando ela emerge espontaneamente, é dirigida tanto aos aspectos matemáticos quanto à observação da adequação do que vai sendo feito na atividade relativamente à situação da realidade. Assim, os alunos analisam modelos e respostas, tanto em relação ao uso da matemática quanto em relação à sua pertinência e adequação para resolver o problema.

O artigo A_3 remete ao entendimento de validação como processo de análise da relação entre matemática e realidade, de modo que as soluções e os resultados matemáticos façam sentido na situação do mundo real. Já em A_{10} e A_{11} os autores descrevem a validação como análise da resolução matemática do problema e a adequação do modelo para o contexto estudado.

A validação com ênfase no modelo matemático é sinalizada em A_8, pontuando que as etapas finais visam, além do uso do modelo, o desenvolvimento da capacidade de avaliar o processo de construção do modelo e os diferentes contextos de suas aplicações. Esse

entendimento também é pontuado pelos professores Paulo e Lucas, sinalizando que validar é um processo de avaliação do modelo matemático, que busca obter resultados pertinentes para o problema.

Caracterização de diferentes tipos de validação no decorrer da atividade considerando suas finalidades

Czocher (2018) no artigo A_2 identifica nas ações de alunos de um curso de engenharia especificidades da validação e, com base nas ações desses alunos caracteriza cinco tipos de validação (V_1, V_2, V_3, V_4 e V_5). Segundo a autora, o ato de validar afeta a construção do modelo de duas maneiras: na avaliação e análise dos aspectos matemáticos do modelo (V_1) e na busca pela adequação do modelo às características da situação em estudo (V_2, V_3, V_4 e V_5). Assim, a validação não ocorre apenas quando se verifica os resultados finais em relação à situação do mundo real, mas de diferentes maneiras no decorrer dessa construção. Conforme Czocher, (2018), para validar o aluno se orienta, por um lado, pelo modelo que está construindo e, por outro lado, pelo modelo que espera construir. Da comparação deles, decorre a decisão de aceitar, revisar ou rejeitar o modelo que está em construção. É nessa perspectiva que se pode atribuir à modelagem uma natureza iterativa, ou seja, decorre da validação, que inclui os cinco tipos a que se refere a autora de A_2, a dinâmica de idas e vindas pelas diferentes etapas da modelagem já reconhecidas na literatura.

Esta caracterização de diferentes tipos de validação apontada por Czocher (2018) é também objeto de investigação em A_4. Propondo a alunos da Educação Básica problemas-de-palavras, os autores observam a ocorrência dessa tipagem, observando, entretanto, uma configuração discretamente distinta daquela sugerida em A_2. Não há, todavia, indicações no texto de que essa diferença seja consequência do nível de escolaridade dos alunos.

Distinção explícita entre verificar e validar em atividades de modelagem

Uma especificidade dos artigos A_1 e A_3 é a distinção entre validação e verificação. A análise e a avaliação do modelo durante a atividade de modelagem são indicadas nestes dois artigos como sendo a verificação, que tem por intenção revisar os procedimentos matemáticos. Já validação sinaliza que o que se avalia e se valida são as técnicas e cálculos relativos à obtenção do modelo e de seu uso para encontrar uma resposta para o problema. Neste caso a validação consiste na ação de comparar os dados que foram obtidos teórica ou experimentalmente com aqueles estimados pelo modelo.

Hidiroğlu e Güzel (2013) em A_3, investigando professores da Educação Básica concluem que eles têm uma conjectura relativamente às finalidades de validação de seus alunos, sugerindo que eles realizam tanto procedimentos de verificação quanto de validação.

Os autores identificam nos professores pesquisados cinco categorias em relação às finalidades da validação de seus alunos.

Não obstante essa aparente distinção entre validação e verificação reconhecida nos artigos analisados, é possível afirmar que em alguns casos (como é nos artigos A_1, A_2, A_4 e A_5), os autores claramente explicitam uma compreensão da validação como ação que estende por diferentes etapas incluindo análises dos procedimentos, dos resultados, inclusive parciais, do modelo matemático bem como da resposta obtida para o problema mediante seu uso.

A caracterização de especificidades do ato de validar em atividades de modelagem

A análise dos artigos aponta para alguns aspectos que, embora não destoantes com o que se pode apontar nos itens anteriores, são ímpares relativamente ao que se pode concluir sobre a validação da revisão aqui apresentada.

O primeiro aspecto diz respeito ao resultado de ISHIBASSHI; UEGATANI, (2019), autores de A_5, apontando para a "criação de possíveis mundos fictícios" pelos alunos no processo de validação. Neste caso, os alunos não validam resultados e modelos em relação à situação da realidade, mas sim em relação a uma situação idealizada que passa a ser o parâmetro de análise da precisão do modelo pelos alunos.

Como sugere o professor Lucas, entretanto, este é não precisamente um equívoco, considerando que na sala de aula é possível falar em validade relativa e que nem sempre as verdades matemáticas "servem" para o modelo.

O segundo aspecto diz respeito ao papel que os autores de artigo A_6 atribuem à validação em atividades de modelagem matemática: ela pode ser fonte de sentido para os alunos, não apenas no domínio pessoal, mas também no domínio social. Nesta perspectiva, a modelagem extrapola a sala de aula e o que se pode concluir para a situação da realidade a partir da atividade de modelagem é o que gera no aluno o sentido de fazer modelagem na aula de matemática.

Finalmente, é fundamental que se reconheça, como apontam, em especial, os autores de A_3 e de A_7, que a validação requer do aluno, procedimentos complexos que, sem a intervenção do professor podem não ser bem-sucedidos. Ou seja, a validação não pode ser negligenciada pelo professor, mas ele, em alguma medida, pode oferecer meios para que na atividade de modelagem o aluno valide, verifique e tome decisões.

Considerações finais

O caminho percorrido para a investigação apresentada no artigo se inicia com uma busca em documentos oficiais – a BNCC e o PPP de cursos de Licenciatura em Matemática – visando buscar indicativos de menção à validação. A partir da identificação da validação em

atividades de modelagem matemática, a questão investigada no artigo é: como a validação em atividades de modelagem matemática vem sendo compreendida e realizada nas práticas com modelagem matemática na sala de aula?

Da revisão sistemática de literatura, baseada em Bryman (2012), resulta a identificação de onze artigos que se referem explicitamente à realização da validação. Além disso, três professores foram convidados a apresentar seu entendimento e suas práticas de validação em atividades de modelagem matemática.

Da análise dos artigos se pode concluir que a validação contribui para a modelagem de duas formas distintas: os alunos validam seus produtos (o modelo matemático e a resposta) e os alunos avaliam e validam (ou não) a construção do modelo matemático. É neste sentido que, conforme sugere Czocher, (2018), à validação se pode atribuir a dinâmica de atividades de modelagem.

Vale destacar também que a realização da validação em atividades de modelagem matemática, indicada nos artigos e nas respostas dos professores, está interligada com o contexto do desenvolvimento da atividade. Assim, a validação nestas atividades possui uma dinamicidade que perpassa uma única abordagem para a validação, cabendo, a cada contexto e atividade, uma condução particular para sua realização.

O processo analítico que, conjuntamente inclui os artigos e as respostas dos professores, permite concluir que a validação em atividades de modelagem matemática: i)pode ser uma ação pontual em etapa específica do ciclo de modelagem ou uma ação que se estende ao longo de diferentes etapas desse ciclo; ii) seu foco pode ser o modelo matemático resultante ou também a avaliação de procedimentos para sua construção; iii) pode ser de diferentes tipos, tendo finalidades específicas em cada etapa do ciclo de modelagem; iv) se distingue da verificação; v) pode levar os alunos a criar mundos fictícios para avaliar o modelo e a resposta; vi) pode ser fonte de sentido para a modelagem matemática; vii) não deve ser negligenciada pelo professor.

Embora com estas diferentes maneiras de realização, a validação requer dos estudantes uma tomada de decisão e uma análise crítica, seja em relação à adequação do uso da matemática, seja relativamente à validade e à pertinência da solução para o problema da realidade. É justamente nesse sentido que a validação nas atividades de modelagem matemática pode promover a criticidade, apontada como relevante para a sua formação, conforme pontua Skovsmose (2019).

A problematização da validação pretendida no artigo, por um lado, busca pela valorização do ato de validar nas aulas de matemática, encontrando respaldo na BNCC no que diz respeito ao ensino de matemática na Educação Básica e na disciplina de Modelagem Matemática no curso de Licenciatura em Matemática. Quando se busca pela significação da

validação na aula de matemática mediada pela modelagem matemática, em alguma medida as expectativas expressas nos documentos encontram ressonância na maneira como a validação é realizada na sala de aula, conforme aponta a revisão dos artigos realizada.

Se, conforme sugerem Czocher, Stillman e Brown (2018), ações como comparar, reconhecer a razoabilidade, analisar, refletir, são importantes para a formação matemática dos estudantes na Educação Básica e sua indicação é observada em diferentes instâncias do texto da BNCC, a validação em atividades de modelagem matemática, como identificada nos artigos analisados e nas práticas dos professores descritas, é um meio de engajamento dos estudantes com estas ações. A formação do professor de matemática para o enfrentamento de um ensino que promova essas ações, pode ser vislumbrada na disciplina de modelagem matemática incluída no PPP dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Referências

ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia.* 5º ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALMEIDA, L. M. W. Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. *VIDYA*, v. 42, n. 2, p. 121-145, 2022.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA. K. P.; VERTUAN, R. E. *A modelagem matemática na educação básica.* São Paulo: Contexto, 2012.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.* 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BLUM, W. Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In: CHO, S. (eds) *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. Springer, Cham*, fev. 2015. p. 73-96

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular: educação é a base.* Brasília: MEC/SEB, 2018. 600p.

BRYMAN, A. *Social research methods:* 4° ed. Oxford: Oxford University Press, 2012.

CAKMAK GUREL, Z.; BEKDEMIR, M. The Teacher and Peer Intervention for Pre-Service Mathematics Teachers on the Validity of Mathematical Models**.** *Pedagogical Research,* v. 7, n. 2, 2022.

CZOCHER, J.; STILLMAN, G.; BROWN, J. Verification and Validation: What Do We Mean?. *Mathematics Education Research Group of Australasia*, 2018.

CZOCHER, J. A. How does validating activity contribute to the modeling process?. *Educational Studies in Mathematics,* v. 99, n. 2, p. 137-159, 2018.

DANTAS, C. A. B. *Verificação e Validação de modelos de Simulação.* Rio de Janeiro: ATAS, 1991.

FERRI, R. B. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education.* Springer International Publishing.

FERREIRA, P. E. A.; SILVA, K. A. P. da. Modelagem Matemática e uma Proposta de Trajetória Hipotética de Aprendizagem. *Bolema: Boletim de Educação Matemática,* v. 33, p. 1233-1254, 2019.

FRANKENSTEIN, M. *Reading the World with Maths: Goals for Critical mathematical Literacy Curriculum*, Capturado em 25 de julho de 2004, Online. Disponível em http://www.nottingham.ac.uk/csme/meas/papers/frankenstein.html.

FERREIRA, A. B. de H. Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa. 3.ed. rev. e A*tual.* São Paulo: Fundação Dorina Nowill para cegos, 2009.

GEIGER, V.; GALBRAITH, P.; NISS, M.; DELZOPPO, C. Developing a task design and implementation framework for fostering mathematical modelling competencies. *Educational Studies in Mathematics*, v. 109, n. 2, p. 313-336, 2022.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. de S.; FRANCO, Francisco Manoel de Mello. Dicionário Houaiss da língua portuguesa. In: *Dicionário Houaiss da língua portuguesa.* 2021. p. lxxiii, 2922-lxxiii, 2922.

HIDIROGLU, Ç. N.; BUKOVA GÜZEL, Ms. Conceptualization of Approaches and Thought Processes Emerging in Validating of Model in Mathematical Modeling in Technology Aided Environment. *Educational Sciences: Theory and Practice*, vol. 13, no. 4, p. 2499-2508, 2013.

ISHIBASHI, I.; UEGATANI, Y. Creation of possible fictional worlds as a process of validation in mathematical word problem-solving and mathematical modeling activities. *JSSE Research Report,* v. 34, n. 3, p. 165-170, 2019.

ISHIBASHI, U.; UEGATANI, Y. Conditions for Teaching Materials that Support Learners' Validation: An Analysis of 8th-grade Students' Mathematical Problem-solving Processes. *Journal of Science Education in Japan*, v. 43, n. 4, 2018.

ISHIBASHI, I.; UEGATANI, Y.. Relevância cultural da validação durante a modelagem matemática e resolução de problemas de palavras: Reconceituando a validação como uma integração de mundos ficcionais possíveis. *The Journal of Mathematical Behavior* , v. 66, p. 100934, 2022. See More

LUCKESI, C. C. *Verificação ou avaliação: o que pratica a escola?* In: LUCKESI, Cipriano Carlos. Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições. 22. Ed. São Paulo: Cortez, 2011, p. 45-60.

MADRUGA, Z. de, F. E.; DO ROSÁRIO LIMA, V. M. Aprender com modelagem: relações entre modelagem (matemática) e processos criativos. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,* v. 12, n. 2, p. 241-266, 2019.

REHFELDT, M. J. H.; NEIDE, I. G.; BÖCKEL, W. J.; AZAMBUJA, J. As Implicações de uma prática de modelagem matemática desenvolvida a partir da cobertura de uma casa. *Atos de Pesquisa em Educação*, v. 14, n. 1, p. 193-218, 2019.

SANTO, C. do E. F. A.; ALMOULOUD, S. A. Os saberes não matemáticos articulados às práticas sociais com matemática. *REMATEC,* v. 14, n. 32, p. 131-147, 2019.

SKOVSMOSE, O. A philosophy of critical mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal,* v. 37, p. 1, 2021.

THACKER, B. H.; DOEBLING, S. W.; HEMEZ, F. M.; MARK, A. C.; PEPIN, J. E.; RODRIGUEZ, E. A. *Concepts of Model Verification and Validation.* Califórnia: Los Alamos, 2006.

SOBRE OS AUTORES

LOURDES MARIA WERLE DE ALMEIDA. É professora da Universidade Estadual de Londrina desde 1985. Atua no curso de graduação em Matemática e é docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, programa no qual já ocupou a função de coordenadora e de vice-coordenadora. É bolsista de produtividade do CNPq e tem experiência na área de Matemática com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: modelagem matemática, semiótica na Educação Matemática e formação de professores de matemática. É líder do GRUPEMAT- Grupo de Pesquisas sobre Modelagem e Educação Matemática cadastrado no CNPq. Orientou várias dissertações de mestrado e teses de doutorado.

ROSÂNGELA MARIA KOWALEK. Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR (2020) e Mestrado pelo Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciência e Matemática – UEL (2022). Atualmente é doutoranda pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), no Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciência e Matemática e docente da Universidade Estadual de Londrina – UEL.

NOTAS DE AUTORIA

Lourdes Maria Werle de Almeida
https://orcid.org/0000-0001-8952-1176
Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, PR, Brasil. CEP- 86057-970
lourdes@uel.br

Rosângela Maria Kowalek
https://orcid.org/0000-0002-2750-4829
Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, PR, Brasil. CEP- 86057-970
rosangela.kowalek@uel.br

Como citar esse artigo de acordo com as normas da ABNT
ALMEIDA, L. M. W.; KOWALEK, R. M. O que se entende por validação em atividades de modelagem matemática? Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 17, p. 1-24, 2024.

Contribuição de autoria
Lourdes Maria Werle de Almeida: Participação na pesquisa, elaboração e redação do manuscrito.
Rosângela Maria Kowalek: Participação na pesquisa, elaboração e redação do manuscrito.

Financiamento
O artigo faz parte de pesquisa realizada pela segunda autora com bolsa de mestrado do CNPq.

Consentimento de uso de imagem

Não se aplica

Aprovação de comitê de ética em pesquisa
Não se aplica.

Conflito de interesses
Não se aplica.

Licença de uso
Os/as autores/as cedem à Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a Licença Creative Commons Attribution (CC BY) 4.0 Intenational. Esta licença permite que terceiros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os autores têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

Publisher
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus/suas autores/as, não representando, necessariamente, a opinião dos/as editores/as ou da universidade.

Histórico
Recebido: 11 de agosto de 2023

Revisado: 09 de abril de 2024

Aceito: 18 de julho de 2024

Publicado: 15 de outubro de 2024