 https://doi.org/10.24844/EM3603.02

La constitución de objetos mentales sobre la fracción impropia. Un experimento de diseño desde la Educación Matemática Realista

The constitution of mental objects about the improper fraction. A design experiment from Realistic Mathematics Education

Ivette Anel Delgado Valdez,[1] Luis Manuel Aguayo Rendón[2]

Resumen: En este trabajo se presentan los resultados de un experimento de diseño enmarcado en la Educación Matemática Realista, particularmente de una de las seis prácticas matemáticas de una Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE) en la que se considera a la fracción independiente de la unidad de referencia y cuyo objetivo específico es que los alumnos constituyan objetos mentales de la fracción impropia. Examinamos los medios didácticos que el docente despliega para que los alumnos comprendan que si $1/x$ se itera X veces, se crea una medida igual, menor o mayor que la unidad de referencia y la manera como los alumnos desarrollan simbolizaciones que les ayudan a comprender la notación convencional de la fracción. Los resultados evidencian que constituyen objetos mentales que les permiten interpretar las fracciones impropias mediante la matematización progresiva de las actividades planteadas en la tercera práctica.

Palabras clave: *tamaño relativo; iteración; fracción; medida.*

Fecha de recepción: 6 de marzo de 2024. **Fecha de aceptación:** 14 de octubre de 2024.

[1] Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas – 321, 1975403012@alumnos.upn.mx, https://orcid.org/0009-0006-1514-114X.

[2] Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas – 321, laguayo@upn.mx, https://orcid.org/0000-0001-78977223.

Abstract: In this paper we present the results of a design experiment framed in Realistic Mathematics Education, particularly one of the six mathematical practices of a Domain Specific Teaching Theory (DST) in which the fraction is considered independent from the unit of reference and whose specific objective is the students to constitute mental objects of the improper fraction. We examine the didactic means that the teacher deploys so the students understand if 1/n is iterated X times, a measure equal to, less or greater than the unit of reference is created and how students develop symbolizations that help them to understand the fraction conventional notation. Results show how the students constitute mental objects, and how allow them to interpret improper fractions through the progressive mathematization of the activities proposed in the third practice.

Keywords: *relative size; iteration; fraction; measurement.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las fracciones en la educación básica reviste múltiples retos, uno de ellos es que los alumnos las consideren como números con propiedades diferentes a las de números naturales. Al enfrentar este reto se encuentran con diversos obstáculos epistemológicos (Brousseau, 1998) porque el cambio de un sistema a otro no es solo de un cambio de significado, las fracciones son nuevos objetos matemáticos con propiedades distintas. Por ejemplo, en los naturales el cinco es mayor que cuatro, pero en los fraccionarios 1/5 no es más grande que 1/4.

Aunado a estos obstáculos epistemológicos, durante años se ha privilegiado la enseñanza de las fracciones a través del modelo de Kieren (1980), en el cual se consideran números racionales, el significado parte-todo es el eje articulador de los demás significados (cociente, razón, medida, y operador) y se da prioridad a situaciones con cantidades continuas (partir un chocolate en partes iguales). Las dificultades crecen cuando se presenta la fracción como una mezcla de significados que son parte de un mismo concepto, como un mega concepto, esto provoca "una dispersión de casos que complejizan la construcción del concepto, sin aportes a su consolidación" (Pruzzo, 2012, p. 6), por lo que el significado de la fracción, en todas sus interpretaciones, se torna complejo.

Colocar el significado parte-todo como inicio de la enseñanza trae consigo consecuencias, "la equipartición orienta a los estudiantes a entender las fracciones en formas que dificultan el desarrollo de concepciones maduras de los números racionales" (Cortina *et al*, 2013, p. 7), "partir" un entero y tomar una parte solo permite comprender que las fracciones pueden ser menores (fracciones propias) o iguales que la unidad. En principio esto resulta conveniente para los alumnos porque su idea de fracción se relaciona con dividir algo en partes iguales y tomar una cantidad de esas partes, pero posteriormente genera dificultades para comprender a las fracciones mayores que el entero.

Diversas investigaciones (Fandiño, 2009) muestran que la equipartición como primer acercamiento a los números fraccionarios es un comienzo limitado que genera un aprendizaje pequeño, pobre y corto (Freudenthal, 1983) además estos acercamientos provocan que los alumnos piensen en las fracciones como algo contenido dentro de un entero, es decir, una parte que está dentro de un todo.

Otras investigaciones (Campo y Llinares, 2015) señalan que los alumnos interpretan fracciones unitarias y propias, pero tienen dificultades para interpretar las impropias. En diversas tareas que se les plantearon se observó que 93% dominaban las fracciones unitarias (identificaban la representación gráfica de 1/2, 1/4, etc.); 92.7% resolvió correctamente tareas relacionadas con las fracciones propias, pero solo 49.08% resolvió las tareas que involucraban fracciones impropias. Uno de los hallazgos más significativos es que para intentar resolver las tareas con fracciones impropias, los alumnos invertían el numerador y el denominador (convertían 5/3 en 3/5), porque consideraban que el denominador debía ser mayor.

También Cortina *et al.* (2012) encontraron que los estudiantes tenían dificultades para resolver tareas con fracciones impropias, uno de sus hallazgos señala que los estudiantes consideran que 8/9 es mayor que 5/4 porque contiene números que en los naturales son mayores. En otra tarea donde piden a los alumnos definir cuál fracción (11/7 y 7/11) es mayor y por qué, no son capaces de esgrimir justificaciones que evidencien una adecuada interpretación de las fracciones mayores a la unidad.

En otro estudio Tassavainen y Helenio (2024) encuentran que los niños tienen dificultades para distinguir la unidad de referencia de una fracción, regularmente solo identifican un objeto o el número uno como unidad, por ello suelen dibujar figuras con significado parte-todo pero les es difícil representar fracciones impropias como 7/5 porque en este caso la fracción tiene más partes que la unidad.

Algunas dificultades mencionadas tienen su origen en la naturaleza del modelo que inicia con el significado parte-todo, por esta razón en esta investigación se presenta un experimento de diseño basado en la Educación Matemática Realista (EMR) como alternativa para la introducción a la enseñanza de las fracciones, el propósito es que sean concebidas como números independientes de la unidad que pueden iterarse más allá de la unidad de referencia generando así mayores posibilidades de comprender la fracción impropia.

El objetivo de nuestra investigación es analizar los efectos que nuestro experimento de diseño tiene para la constitución de objetos mentales en torno a las fracciones impropias, considerándolo como un aporte relevante para la Educación Matemática porque plantea recursos didácticos para apoyar el aprendizaje de este objeto matemático.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

La corriente didáctica conocida como Educación Matemática Realista (EMR) comenzó con una idea desarrollada por Hans Freudenthal en Holanda que buscaba transformar la enseñanza colocando en el centro la actividad matemática, es decir se trata de "reinventar las matemáticas" mediante la matematización del mundo real (Cobb *et al.*, 2008). Tres conceptos son fundamentales en esta teoría: fenomenología didáctica, matematización y normas sociomatemáticas. Estos conceptos guiaron el diseño de las actividades, pero también se tomó la noción de Teoría Hipotética de Aprendizaje para conjeturar nuestra Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE).

Fenomenología didáctica

Es un método para analizar diversas manifestaciones de objetos matemáticos en la realidad (fracciones, razones, etc.) y a partir de ese análisis construir la didáctica para su enseñanza. Desde esta noción se postula que para matematizar la realidad debe iniciarse por observar los fenómenos que requieren ser organizados y enseñar al estudiante a manipular los medios para organizarlos (Freudenthal, 1983), el objetivo es encontrar fenómenos (situaciones) que puedan ser organizados mediante un concepto matemático pero para encontrarlas es necesario realizar un análisis fenomenológico de un objeto matemático. En este análisis se articulan dos nociones fundamentales, el *nooumenon* que es el medio de organización, el que describe lo pensado, lo "inteligible", el nombre que se le da a un objeto y; el *Phainomenon*, el fenómeno, la forma en que se expresa nuestra "experiencia matemática", es lo que aparece, lo que se percibe, la cosa en sí (Puig, 1997).

En la EMR la conceptualización de los objetos matemáticos se contrapone con lo que Freudenthal (1983) llama *constitución de objetos mentales*. Un *objeto mental* es la descripción del campo semántico personal relacionado no con la totalidad de significados de un concepto, sino con un contexto específico de uso, por ello "se deberían buscar primero fenómenos que pudieran compeler al estudiante a constituir el objeto mental que está siendo matematizado por el concepto" (Freudenthal, 1983, p. 32). Los objetos mentales y los conceptos guardan una estrecha relación con los fenómenos, ambos actúan como medios de organización de los fenómenos.

La constitución de objetos mentales es el "conjunto de ideas" (Valenzuela *et al*., 2019) que los alumnos crean al interactuar con situaciones vinculadas a los fenómenos que se intenta organizar mediante los conceptos. El *objeto mental* está en la mente de las personas, mientras que los conceptos se encuentran en la matemática como disciplina, "el objeto mental es el reflejo del concepto en la mente de las personas" (Puig, 1997, p. 75). Esto lo convierte en un objeto de enseñanza, pero al darle un giro con el análisis didáctico los objetos mentales se ligan con un contenido específico porque,

> ...el sistema quiere que los alumnos constituyan un objeto mental como medio de organización de esos fenómenos y que tengan acceso a los medios de organización que la historia nos ha legado (...), es decir, a los conceptos. (Puig, 1997, p. 81)

Matematización

Para relacionar los fenómenos con los medios de organización (objetos mentales y conceptos matemáticos), los alumnos utilizan sus conocimientos al organizar esos fenómenos, por ello deben realizar una actividad organizadora (matematización) que les brinda herramientas matemáticas para organizar y resolver una tarea, porque "matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos... incluida la matemática misma" (Freudenthal, 1973, p. 44).

La matematización está relacionada con la actividad de reinventar, cuando se matematiza la realidad se inicia con un proceso mediante el cual se formalizan las intuiciones informales (Cobb *et al.*, 2008), es decir, "lo que los seres humanos tienen que aprender no es la matemática como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas" (Freudenthal, 1983, p. 7). Esto significa que se pueden matematizar las situaciones de la realidad, pero también los objetos matemáticos. Estos dos objetos de matematización dan lugar a la matematización horizontal y vertical (Treffers, 1987), la primera implica convertir un problema de la vida real en uno matemático, la segunda es el momento en que se crean, recrean y manipulan los símbolos matemáticos.

Normas sociomatemáticas

Al analizar la interacción entre docente y alumno en el contexto de una fenomenología didáctica se pueden observar ciertas normas que rigen esa interacción ya que el proceso de enseñar no se da de manera casual, está regido por "obligaciones" no explícitas que se deben cumplir (D'Amore *et al.*, 2007). Son normas sociales que regulan la micro-cultura del aula y cuando el objeto a enseñar es matemático se puede hablar de normas sociomatemáticas.

Las normas sociomatemáticas son los aspectos normativos de la actividad matemática dentro del aula, donde la prioridad es buscar la matematización como práctica para crear creencias y valores matemáticos. El sentido de las normas sociomatemáticas puede apreciarse mejor si revisamos los principios de la EMR que orientan la actividad matemática en la enseñanza (Bressan *et al.*, 2004), en el caso de la implementación de la TEDE estas normas, a través de las conjeturas que se establecen en la THA, nos sirvieron para orientar el trabajo del docente.

Principio de Actividad. La educación matemática es una actividad humana y como tal se aprende haciéndola, en esta actividad lo fundamental no es aprender algoritmos sino el proceso de algoritmización; no es aprender álgebra sino la actividad de algebrizar; no es aprender las abstracciones sino la acción de abstraer (Freudenthal, 1991).

Principio de Realidad. Matematizar significa organizar la realidad para comprenderla, hablar de realidad significa que las matemáticas deben ser realizables, imaginables y razonables, "...yo prefiero aplicar el término realidad a lo que la experiencia del sentido común toma como real en cierto escenario" (Freudenthal, 1991, p. 17).

Principio de Reinvención. La reinvención es un proceso en el que el conocimiento matemático formal puede ser reconstruido para generar uno nuevo.

Principio de Niveles. La matematización sobre la realidad es progresiva (Treffers, 1987), va del conocimiento informal, al preformal y luego al formal. En este proceso los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión en sus estructuras cognitivas.

Principio de Interacción. Las matemáticas son una actividad social, por ello los estudiantes deben tener la oportunidad de "mostrar" sus estrategias e invenciones a otros (Santamaría, 2006).

Principio de Interconexión (estructuración). Existe una interrelación entre los contenidos matemáticos de varios ejes y unidades curriculares, por ello no pueden tratarse como entidades separadas, deben entrelazarse los contenidos de diversos ejes de aprendizaje en las situaciones problemáticas (Santamaría, 2006).

METODOLOGÍA

El presente trabajo se basa en la perspectiva metodológica del "Experimento de diseño" que nace bajo la influencia de Cobb *et al.* (2003), es una metodología de aprendizaje instruccional para investigar la relación entre teoría educativa, artefactos diseñados y la práctica.

> los experimentos de diseño permitirán que las expresiones, los gestos, las interacciones entre pares y profesor, los trabajos escritos y todas aquellas acciones que realiza el estudiante, puedan ser utilizadas para recolectar datos que en algunas ocasiones pasan desapercibidos. (Briceño y Buendía, 2015, p. 67)

En el experimento de diseño se estructura una Teoría Hipotética de Aprendizaje (THA) para promover el aprendizaje y una Teoría Conjeturada de Aprendizaje (TCA) que define lo que puede hacer el docente para alcanzar los objetivos de aprendizaje (Luna y Aguayo, 2021). Los experimentos de diseño se apoyan en el experimento de enseñanza, tipo de estudio más frecuente dentro de la metodología en que se inscribe este trabajo, básicamente un experimento de enseñanza es una secuencia de episodios en los que participa un investigador-docente, los alumnos y uno o varios investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000). Los experimentos de enseñanza buscan mejorar las prácticas, brindar herramientas a los docentes, hacer aportes a las teorías locales y aportar a las teorías generales. Constan de tres fases: 1) preparación del experimento; 2) experimentación para apoyar el aprendizaje y recolección de datos y; 3) análisis retrospectivo para reconocer la actividad del estudiante y el contexto en el que se desarrolló la actividad.

Empero, la implementación de un experimento de diseño no es un proceso que tenga fin, es cíclico y la planeación, ejecución y análisis siempre dan lugar a su rediseño que puede considerarse para ulteriores investigaciones en las que intervengan otras variables. Para la validación del desarrollo y resultados del diseño se utilizan dos tipos de análisis, el iterativo y el retrospectivo, el primero es una reflexión *in situ* que permite realizar ajustes pertinentes con la la agenda en el momento de su aplicación; el segundo se realiza después de la implementación del diseño para reconocer los alcances y limitaciones del diseño y del proceso de implementación. La experimentación recurrente y su perfeccionamiento producirán una Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE) que incluye los objetivos que guían el experimento de enseñanza y los medios didácticos para procurarlos.

La TEDE trata de teorías formuladas cuyo propósito es apoyar a los docentes en las tareas de enseñanza de un tema matemático específico (Gravemeijer, 1994, 2004). En estas teorías se propone una progresión de objetivos de aprendizaje y los medios didácticos para lograrlos, están empíricamente fundamentadas y son desarrolladas a través de un proceso conducido por conjeturas y de la instrumentación de experimentos de diseño en las aulas (Stephan *et al.*, 2003).

La TEDE que aquí nos ocupa es producto de un trabajo colaborativo entre un investigador-docente que la puso en escena en un grupo de quinto grado de la escuela primaria «República de Tanzania» del municipio de Iztacalco, Cd. de México, integrado por 31 alumnos (16 mujeres y 15 hombres) entre 11 y 12 años de edad. La TEDE se aplicó durante 26 sesiones de una hora y media que fueron videograbadas, consta de seis prácticas matemáticas, cada una propone formas de razonar claras, reflexivas, y apropiadas en la comunidad del aula. Posterior a la implementación, el investigador-observador realizó un análisis de las sesiones en las que se trabajó la tercera práctica matemática y parte de esos resultados se muestran en este trabajo.

La agenda matemática (tabla 1) describe la secuencia de actividades con la que se pretendió que los alumnos constituyeran objetos mentales sobre las fracciones. En correspondencia con el principio de realidad, las tareas se contextualizaron en una narrativa que cuenta la historia de los acajay, un pueblo que requería realizar mediciones para fabricar sus vasijas y para ello utilizaban el *Tije* (vara de aproximadamente 24 cm de largo) como unidad de medida y los *pequeños* de a dos, de a tres, de a cuatro, etc., como subunidades (figura 1).

Tabla 1. La TEDE para las fracciones

Práctica	Herramientas
1. Se interpreta un número entero como medida, que da cuenta de la acumulación de la longitud de una unidad. *Entender la medición como la iteración de una unidad.*	Tije, tiras de papel, tijeras
2. Se reconoce y compara el tamaño relativo de una subunidad de medida. *Comparar fracciones unitarias*	Tije, cilindros de papel, tijeras
3. Se interpretan las fracciones como medidas que resultan de iterar una subunidad de medida y se comparan las medidas con el tamaño de la unidad. *Determinar cuándo una fracción es mayor, menor o igual a una unidad*	Tije, cilindros de papel, tiras de papel, tijeras
4. Se interpretan las fracciones como medidas menores, mayores o iguales a medidas realizadas iterando la unidad. *Determinar cuándo una fracción es mayor, menor o igual a la iteración de la unidad dos o más veces*	Tije, cilindros de papel, tiras de papel, tijeras, recta numérica
5. Se interpretan las fracciones como medidas susceptibles de producir otras medidas al ser iteradas cierto número de veces. *Multiplicar una fracción por un número entero*	Recta numérica
6. Se interpretan las fracciones como medidas de longitud menores, iguales o mayores a un medio. *Establecer igualdades y desigualdades con un medio*	Recta numérica

El desarrollo de las seis prácticas permite que el alumno comprenda a la fracción como un número capaz de cuantificar, desde la primera y segunda práctica crearon objetos mentales para reconocer la fracción unitaria y determinar cuál es mayor o menor. En este trabajo se presenta el análisis de la tercera práctica, con esta se buscaba que los alumnos interpretaran la fracción como medida de longitud mediante la iteración de una subunidad y como algo que puede ser menor, igual o mayor que la unidad de referencia, lo cual contribuye a la constitución del objeto mental sobre la fracción impropia.

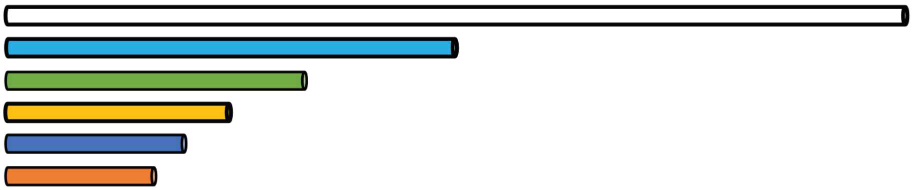


Figura 1. El *Tije* y los *pequeños* de *2,3,4,5* y *6*

Nota. El *Tije* está en blanco El *pequeño* de a dos (azul) mide 1/2 del *Tije* y necesita iterarse dos veces para ser igual que él. El *pequeño* de tres (verde) mide 1/3 del *Tije* y necesita iterarse tres veces para ser igual que él. Este modelo ha sido utilizado en investigaciones anteriores como en Cortina, (2014).

RESULTADOS. LA REINVENCIÓN DE LA FRACCIÓN IMPROPIA

En las dos primeras prácticas el objetivo era que los alumnos reconocieran la fracción como un sistema de cuantificación racional, es decir como una medida y no como parte contenida en un entero. En la primera reconocieron algunas propiedades de la medición como la iteración y la exactitud, en la segunda identificaron el tamaño relativo de las subunidades respecto de la unidad de referencia, es decir identificaron fracciones unitarias por su tamaño relativo como resultado de multiplicar la subunidad por un número entero. Por ejemplo que un *Tije* es dos veces la subunidad llamada *pequeño* de a dos, la mitad de un *Tije* (1/2).

En la tercera práctica, cuyos resultados se presentan en este trabajo, se pretende que los alumnos constituyan objetos mentales para comprender que la subunidad puede ser una medida o un número independiente de la unidad y que al ser iterada tantas veces como sea necesario se obtiene un resultado proporcional entre la iteración y el tamaño. La práctica comienza con la iteración de una subunidad y la determinación del resultado de dicha iteración, por ejemplo si se itera tres veces el *pequeño* de dos se obtendrá la medida 3/2. Esta iteración permitirá a los alumnos comparar el tamaño relativo de la fracción en relación con la unidad de referencia y obtener un resultado legítimamente razonable para las fracciones impropias (Cortina y Zúñiga, 2008), porque habrán interpretado a la fracción en términos multiplicativos y no como algo que cuantifica bajo el criterio partitivo.

Los resultados de esta tercera práctica se presentan en tres momentos: los objetos mentales constituidos acerca de las fracciones impropias cuando se les pide identificar una medida mayor a la unidad de referencia; la simbolización mediante la que representan las fracciones impropias y; la comparación de fracciones para determinar y justificar cuál es menor, igual o mayor a la unidad.

Con la tercera práctica se busca modificar el esquema partitivo que considera a la fracción como contenida en un entero que dividido en tantas partes e identifica una fracción al sumar equis partes del todo dividido (Thompson & Saldanha, 2003). Para modificarlo resulta necesario introducir las nociones de numerador y denominador porque la relación entre ambos indica el tamaño del *pequeño* y el número de veces que la subunidad fue iterada, el denominador representa el tamaño de la subunidad y el numerador las veces que esta fue iterada (Delgado y Cortina, 2021).

Para continuar, se propone a los alumnos medir una tira (figura 2) que será utilizada por *los acajay* como símbolo de pertenencia a la comunidad, para replicarla las veces que sea necesario deben conocer su tamaño con exactitud

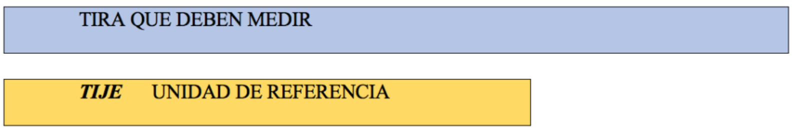


Figura 2. Tiras de papel

Nota. La tira de papel debe medirse con el Tije y con los pequeños.

Al iniciar la matematización horizontal, los alumnos buscan estrategias para determinar el tamaño de la tira, lo que implica interpretar la fracción impropia como una medida mayor que la unidad. Una de las estrategias se basa en las fracciones mixtas porque usan el *Tije* y uno de los *pequeños* para determinar la medida, sin embargo, como se aprecia en el siguiente fragmento en el que se usaron nombres ficticios para los alumnos y la letra M para designar al maestro, no todos los alumnos seleccionan la misma subunidad (*pequeño),* por ello el maestro reorienta el proceso de reinvención para que en la conversación colectiva los alumnos se focalicen en la iteración del mismo *pequeño,* con ello el maestro busca que constituyan objetos mentales sobre las fracciones impropias. Cabe aclarar que en prácticas anteriores se había incluido la notación $\boxed{2}$ para representar al “pequeño de a dos” o la *subunidad 2* cuya longitud es 1/2 de la longitud de la unidad, esta notación permite interpretar al denominador dentro de los números fraccionarios (el tamaño de la fracción unitaria).

M:	Dominic, (señala la tira), tú hiciste otra, ¿cómo lo escribiste?, Ana Corina pásale, vamos a ver cómo lo escribió Ana Corina.
Ana Corina:	Un *Tije* y un $\boxed{2}$
M:	Denisse ¿qué querrá decir eso que escribió?
Denisse:	Quiere decir un *Tije* y un *pequeño* de a dos.
M:	Fíjense, cuando *los acajay* empezaron a medir con los *Tijes*, se dieron cuenta que no era buena idea combinarlos, lo mejor era usar uno solo, el *Tije* o uno de los *pequeños*, ¿se podrá medir con el mismo toda la tira?
Alumnos:	Sí.
M:	Vuélvanlo a medir usando un solo *Tije*, el que ustedes quieran.

Como se puede observar, el docente se percata que han entendido la consigna pero que sus acciones los alejan del objetivo, no utilizan una misma subunidad para medir y ello obstaculizaría la organización de la conversación colectiva. En el proceso de reinvención guiada es indispensable que el docente asuma su rol de guía y lleve a los alumnos a la construcción de la noción de fracción impropia sin evadir la realidad que están matematizando. Por ello redirecciona su actividad, para situarlos en el contexto de los acajay les pide que utilicen la misma subunidad, para que comprendan que las fracciones pueden ser iteradas incluso más allá de la unidad.

Matematización progresiva. La simbolización de la fracción impropia

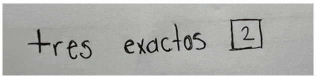
En esta tercera práctica los alumnos han recreado la noción de fracción impropia mediante las iteraciones de las subunidades e iteraciones (con las tiras). Sin embargo, en la TEDE también se propone incluir la simbologías de manera contextualizada, es decir que estén implícitas en la actividad para que se comprenda la notación sin que parezca absurdo que el numerador sea mayor que el denominador por ejemplo 3/2. Se busca que los alumnos generen nociones sobre la relación entre numerador y denominador al pedirles que representen el número de iteraciones realizadas al medir con un *pequeño*.

En esta búsqueda, las herramientas y la simbología resultan de suma importancia porque ayudan a los alumnos a reinventar el objeto matemático y como mencionan Gravemeijer y Stephan (2003), la aparición de estos recursos debe darse de forma gradual y en apoyo a la matematización que los alumnos realizan. Por esto, las nuevas situaciones que se les planteen deben articularse con la actividad anterior (medir tiras) y ofrecer una solución a lo que se intenta resolver.

Como hemos referido, los alumnos deben enfrentarse con situaciones que los orienten a construir el significado del numerador y el denominador a través de la iteración de las subunidades; para ello en un primer momento deben apropiarse de una escritura que dé cuenta del tamaño del *pequeño* que utilizan para medir. Sin embargo, la notación $\boxed{2}$ solamente representa el tamaño del *pequeño* pero no el número de iteraciones necesarias para medir la longitud. Por ello durante la conversación colectiva cuando justifican las estrategias utilizadas, el docente analiza los sistemas de escritura empleados por los alumnos para que ellos mismos puedan determinar cuáles resultan más eficaces como medio de representación.

M: Escribe aquí arriba para que todos vean (señala el pizarrón), fíjense cómo apuntó Nohemí.

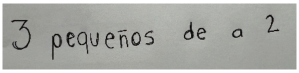
Noemí: (Escribe en el pizarrón)



M: ¿Qué habrá querido decir Noemí con eso?

Ao: Hay tres, tres exactos.

Carmen: (Escribe en el pizarrón "3 pequeños de a 2")



M: ¿Midieron lo mismo… Carmen y Noemí?

Alumnos: Sí.

M: Sí, ¿verdad? ¿Pero, qué diferencia hay?

Ao: Otra explicación.

M: Ahorita vemos, espérame… ¿Qué diferencia hay Fabiola?

Fabiola: No lo escribieron igual.

M: ¿Cuál es una diferencia importante en cómo lo escribieron?

Ao: (Levanta la mano)

M: Fíjense, ¿Noemí escribió "*pequeño* de a dos"?

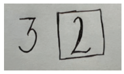
Alumnos: No…

M: ¿No?… ¿No escribió "*pequeño* de a dos"?

Aa: Sí, pero de otra forma.

En el fragmento se puede observar, como lo plantea Cobb (2003), que el maestro debe esperar que los alumnos emitan respuestas encaminadas a cumplir los objetivos de la práctica, en este caso su intención es que los alumnos reconozcan el símbolo y su significado (la relación entre iteración y subunidad utilizada). Sobre dicha relación, los alumnos han expuesto algunas estrategias que utilizaron para encontrar la medida de las tiras, pero es a través del análisis colectivo que comienzan a tomar sentido y acercan al alumno a la escritura que la TEDE se propone generar. El docente elige una de las representaciones para que se analice su viabilidad.

M:	Fíjense cómo le hizo Ana Corina...



M:	Xiomara, fíjate como lo escribió Ana Corina
M:	Dile, "compañera Ana Corina..."
Román:	Compañera Ana Corina, ¿qué significa?
Ana Corina:	Tres es...
M:	Muy buena pregunta, vamos a escuchar a todos.
Ana Corina:	Bueno, el tres es el número que se hace y el *pequeño* de a dos el que se ocupó.
M:	Explícanos como si estuvieras midiéndolo (le entrega el pequeño azul)
Ana Corina:	Una, dos, tres... (mide la tira con el *pequeño* de dos iterando tres veces)

La justificación de Ana Corina responde, como dice Cobb (2003), a un discurso de tipo conceptual que da respuesta a los métodos empleados. El símbolo que utiliza es capaz de explicar que el número fuera de la casilla representa las veces que ha sido iterado el *pequeño*, su tamaño está representado por el número dentro del recuadro. Desplegar este discurso en una conversación colectiva permite al resto de los alumnos matematizar la idea y usarla para comprender el significado del numerador y el denominador en relación con la escritura que se propone emplear, la cual se describe más adelante.

Al realizar la medición con el *pequeño* de a dos, Ana Corina muestra las iteraciones realizadas para determinar el tamaño de la tira de papel, esto permite a sus compañeros acercarse al significado de la simbología empleada. Este momento resulta crucial para el desarrollo de la agenda, ya que mediante esta conversación colectiva los alumnos están más cerca de la reinvención de las fracciones (propias e impropias) y de la notación convencional. Como se ha visto, los principios de realidad y reinvención guiada juegan un papel importante para la matematización de los alumnos porque los llevan a concebir la fracción como una medida independiente de la unidad de referencia.

Para el docente resulta importante que los alumnos reconozcan el numerador como parte de los símbolos que dan cuenta del tamaño relativo de una fracción, pues están estrechamente vinculados con una relación multiplicativa que nace de la iteración, sobre ese respecto Thompson y Saldanha (2003) mencionan que es necesario que los alumnos consideren a la fracción con propiedades multiplicativas y no sumativas, puesto que la fracción tiene sus raíces en las nociones proporcionales que implican X número de veces la unidad, en este caso los *pequeños*.

Cuando a través de la iteración, los alumnos relacionan las propiedades multiplicativas de la fracción con el símbolo que representan, reconocen la longitud medida, por ejemplo que para tener 3/2 la subunidad de 1/2 ha sido iterada tres veces. Como lo menciona Gravemeijer (2003), el maestro instaura una idea para que los alumnos se apropian de ella y simplifiquen su escritura, eso significa que mediante la matematización que realizan, los alumnos se acercan más a las ideas matemáticas. A través de este proceso el maestro propone una forma no convencional de representar el número de veces que ha sido iterado un *pequeño* para determinar una longitud (figura 3), que resulta significativa para los alumnos porque no la consideran arbitraria y sin sentido, sino un elemento que les ayuda como eventuales *acajay*.

$$\begin{array}{c}\mathbf{7}\\ \boxed{5}\end{array}$$

Figura 3. Representación no convencional de la fracción

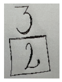
Nota. Indica que la subunidad 5 (cuya longitud es 1/5 de la unidad) fue reiterada siete veces.

El trabajo con esta simbología facilita a los alumnos comprender lo que es una fracción impropia y la relación que guarda con su tamaño, porque la razón de que el numerador sea más grande que el denominador corresponde a la lógica multiplicativa de iteración y no sumativa de partición.

M: Oigan, me emocioné mucho cuando vi que escribían los *pequeños* así, porque se parece muchísimo a como lo hacían los *acajay*.

Ao: Es que ya vivíamos antes.

M: Ya vivían antes ustedes, yo creo que sí, porque se parece muchísimo a como escribían estas medidas los *acajay*, también ponían el tamaño del *pequeño*, pero ¿qué creen?, este no lo ponían aquí (señala el número tres de "$3\ \boxed{2}$"), lo ponían aquí (escribe de nuevo en el pizarrón) miren…



Aos: Oh…Oh…

M: Entonces, ¿ahí qué dice?

Alumnosos: El *pequeño* de a dos …

Lucas: El *pequeño* de a dos tres veces

M: ¿Lucas?… Dice lo mismo, dice tres *pequeños* de a dos, tres veces…

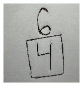
Aos: El *pequeño* de a dos

Como se ha podido observar, en el desarrollo de las actividades los alumnos han pasado por una matematización progresiva, esto es, por un proceso que organiza la realidad mediante el movimiento dialéctico entre la matematización horizontal y vertical, proceso que primero les permitió comprender el tamaño de una subunidad (fracciones unitarias), además fueron capaces de determinar cuál es más grande y por qué. Sobre este respecto Santamaría (2016) menciona que una actividad en un nivel está sometida a análisis en otro nivel, es decir, cuando se matematiza la realidad y ha pasado a formar parte de las ideas matemáticas, son estas las que ahora se deben matematizar para generar nuevos conocimientos en torno al objeto con el que se está trabajando. Se trata de tomar una situación matemática y elevarla a un nivel más alto de abstracción logrando mayores niveles de formalización matemática (en relación con los puntos de partida de los estudiantes).

En este proceso de matematización progresiva, el maestro reconoce las aportaciones de cada uno de los alumnos en tanto eventuales *acajay*, de esta manera el símbolo que representa el tamaño relativo de la fracción y que se relaciona con el número de veces que un *pequeño* ha sido iterado es comprendido y aceptado por los alumnos. Como es introducido de manera adecuada lo consideran útil puesto que ha sido construido con sus propias aportaciones articulándolas con las que desarrollaron los *acajay*, de esta manera el maestro les ha dado la oportunidad de recrear y reinventar la noción de fracción y su simbología, por ello cuando les pide que expliquen lo que significa logran hacerlo sin dificultad y encuentran la relación entre el número fuera de la casilla (numerador) y el que está dentro de la casilla (denominador).

Para seguir guiando la reinvención y consolidando la utilización de la notación, el maestro plantea actividades donde es necesario emplear la escritura acordada para simbolizar la relación entre iteración y *pequeño*. La intención es que los alumnos se apropien de dicha escritura y puedan usar un discurso conceptual para explicar lo que representa y la razón por la que se usa ese símbolo.

M: ¿Cómo escribirían…seis veces el *pequeño* de a cuatro?
Denisse: (Escribe en el pizarrón)



M: ¿Sí? ¿Quién no está de acuerdo?
Aos: (Nadie contesta)
M: ¿Sí está bien verdad?… Ahora que pase Daniela, ¿cómo escribirían… tres veces el *pequeño* de a cuatro?
Daniela: (Pasa al pizarrón y escribe)

M: Tres veces el *pequeño* de a cuatro. ¿Está bien? ¿Tres veces el *pequeño* de a cuatro?
Aos: Sí.

En el fragmento anterior se observa que los alumnos han normalizado las ideas de fracción propia e impropia y que su escritura representa adecuadamente la relación entre iteraciones y fracción unitaria. El objetivo principal, como lo mencionó Steffe (2002), es que los alumnos se apropien de la idea de que una subunidad puede ser iterada tantas veces como sea necesario, incluso más allá de la unidad de referencia. Además, en esta parte de la TEDE pueden comparar el tamaño de la fracción y determinar si es igual, menor o mayor a la unidad de referencia (el Tije).

Para trabajar y desarrollar dichas nociones en el contexto de la narrativa de los *acajay*, el maestro propone a los alumnos que elaboren listones de diversas medidas (figura 4), las cuales servirán para determinar qué fracciones son menores, iguales o mayores que la unidad de referencia (*Tije*). Lo que se pretende es que los alumnos estructuren discursos conceptuales que les permitan explicar y validar cómo se puede determinar la medida de una fracción en comparación con otras.

1 Tije	$\overset{4}{\boxed{3}}$	$\overset{5}{\boxed{6}}$	$\overset{2}{\boxed{2}}$	$\overset{6}{\boxed{5}}$

Figura 4. *Tamaño de tiras que se deben elaborar*

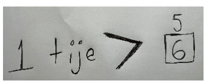
COMPARACIÓN DE FRACCIONES

Con el desarrollo de esta actividad (elaborar listones de diversos tamaños) se pretende que los alumnos interioricen la idea de que una fracción es un número que puede servir para cuantificar y que su tamaño puede ser menor, igual o mayor a la unidad de referencia. Sobre este respecto Freudenthal (1983) señala que la comparación y descripción de objetos son fenómenos de las fracciones que pueden considerarse ideales para la enseñanza, ya que estos se asocian con la fracción como comparador en un primer nivel de abstracción.

Reinventar las fracciones en términos multiplicativos significa entonces que los alumnos deben reestructurar sus esquemas acerca de lo que significa el numerador y el denominador, que rompan con la idea de la fracción como parte de un todo y la comprendan considerando el número de iteraciones necesarias de una subunidad (sin restricciones) para medir una longitud. En este momento de la TEDE los discursos de los alumnos incorporan una nueva definición, lo que nos permite analizar si los objetivos que se plantearon se alcanzan mediante la matematizacion progresiva.

M: ¿Cuál será más grande, cinco veces el *pequeño* de a seis o un *Tije*?

Xiomara: (Pasa al pizarrón y escribe)



M: Todos estamos aprendiendo a explicarnos, no tiene nada de malo explicarlo así. Xiomara va a hacer un gran esfuerzo para explicarse y no hay nada malo…

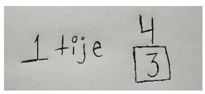
Xiomara: Es que el *pequeño* de a seis, si lo medimos cinco veces en el *Tije* va a quedar más chiquito, pero si fueran seis, quedaría igual que el *Tije*, porque es el *pequeño* de a seis y por eso el *Tije* es más grande que el *pequeño* de a seis si lo medimos cinco veces.

La justificación de Xiomara nos permite apreciar que a través de la iteración se puede comprender que una fracción es menor a la unidad porque el número de veces que se repite el *pequeño* no corresponde al inverso multiplicativo de la unidad. Cuando menciona que "queda más chiquito porque se mide cinco veces y no seis y por ello no iguala el tamaño del *Tije*" significa que las ideas multiplicativas están presentes y que con ellas los alumnos pueden determinar el tamaño de una fracción en relación con las veces que se ha iterado (Tzur, 2002). Asimismo, podemos observar la presencia del inverso multiplicativo cuando el alumno es capaz de reconocer que seis veces el *pequeño* de seis es la misma medida que un *Tije* y deduce que el *pequeño* de seis es 1/6 del Tije.

Otro aspecto importante que destacar es que los alumnos utilizan la unidad como punto de referencia, "si fueran seis quedaría igual que el *Tije*"; este tipo de argumentos evidencian el saber que tienen sobre las fracciones y que ya no las conciben como partes contenidas en el entero, sino que cada medida es independiente de la unidad y dan cuenta de un tamaño diferente.

En el sentido de la idea anterior, cuando los alumnos reflexionan sobre una medida menor al *Tije* es necesario también que generen discursos sobre las medidas que pudieran resultar mayores a este, para ello el docente propone otra comparación.

M: Esta es una pregunta bien difícil de acajay, es una pregunta clave así que necesito toda su atención, ¿listo Jaime?... Vamos a pensar, no vamos a contestar... ¿Cuál tira nos habrá salido más larga? (señala)



Aos: (Algunos levantan la mano)

M: Fíjense, ¿una medía...? (señala el pizarrón)

Aa: Un Tije...

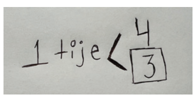
M: ¿Y la otra medía...? (señala en el pizarrón)

Aos: Cuatro veces el *pequeño* de a tres.

M: Entonces, piensen ¿cuál habrá salido más larga?

M: Sofía, pásale, vamos a ver si están de acuerdo o no. Vamos a usar la boca del pacman (se refiere al signo mayor que).

Sofía: (Pasa al frente y escribe en el pizarrón)



En el fragmento anterior podemos observar dos detalles: el primero tiene que ver con la manera como los alumnos se refieren a la fracción 4/3 en términos multiplicativos, pues exponen su tamaño en relación a la cantidad de veces que ha sido iterado un *pequeño*, "cuatro veces el pequeño de a tres", como menciona Cortina y Zúñiga (2008) esta idea es fundamental para que las fracciones impropias puedan comprenderse desde un contexto que no se circunscriba a la percepción de la fracción contenida dentro de una unidad. Un segundo detalle tiene que ver con el hecho de que ya son capaces de identificar el tamaño de una fracción y compararla, en este caso con un entero. En este sentido observamos que reconocen la iteración de cuatro veces el *pequeño* de tres como algo mayor al *Tije*.

En la misma comparación se espera que, además de identificar cuál fracción es mayor, los alumnos justifiquen dicha comparación y la expresen mediante un discurso que dé cuenta de su capacidad para identificar cuándo una fracción es mayor a la otra y por qué:

Sofía: Que el *Tije* es más chico, porque este (señala la notación que representa cuatro iteraciones de tres) ocupa más espacio, si aquí dijera tres (escribe "3") sería igual que el *Tije*, aquí es más grande porque aquí se le aumenta uno (escribe "1") al lado de la notación.

El discurso de Sofía evidencia que interpreta las fracciones como algo que puede ser iterado más allá de la unidad de referencia. Cuando Sofía expresa que "si dijera 3/3 sería del mismo tamaño, pero como tiene una más (iteración), 4/3 es mayor", está poniendo de manifiesto que comprende que el número de iteraciones de las subunidades determinan su tamaño y de igual manera, comprende el valor recíproco de tamaño relativo (donde A es tres veces B, por lo tanto, B es 1/3 de A) y es capaz de determinar la equivalencia entre el *Tije* y el número de iteraciones del *pequeño* de tres para usarlo como referencia en la comparación.

Este tipo de discurso nos permite apreciar que los alumnos son capaces de justificar el tamaño de una fracción y formular argumentos que dan cuenta de ello. Para lograr esto ha sido importante la acción del docente, pues está relacionada con lo que Cobb (2003) señala respecto de los discursos que los alumnos emplean, menciona que cuando utilizan discursos conceptuales de este tipo proporcionan al resto de la clase recursos que les permiten reorganizar su pensamiento y, además, son de suma importancia para la clase en general porque permiten seguir avanzando en las prácticas. La relevancia del principio de interacción se hace evidente cuando exponen sus resultados y conjeturas al comparar fracciones, por esta razón las conversaciones colectivas son fundamentales en la clase por lo que a los alumnos pueden ofrecer.

Como hemos puesto en evidencia, en la tercera práctica han aparecido las estrategias de los alumnos para comparar y al exponerlas el maestro las toma como un recurso para organizar una conversación colectiva en la que se reflexione sobre ellas, de esa manera puede tomar las respuestas de los alumnos y convertirlas en herramientas conceptuales que pueden emplear posteriormente.

Recordemos que en el inicio de la TEDE, los alumnos trabajaron con situaciones que les ayudaron a comprender el tamaño de una fracción unitaria cuando las comparan entre sí. Ese tipo de situaciones presentan un obstáculo epistemológico porque, aunque trabajan con fracciones las relacionan con lo que saben acerca de los números naturales. Dicho obstáculo aparece por ejemplo cuando se les pide determinar si 1/5 es mayor a 1/7, en este caso los alumnos podrían argumentar que 1/7 es mayor porque el 7 es más grande. Es por esa dificultad que al desarrollar la TEDE se busca que construyan nociones acerca del número fraccionario, para ello deberán reconocer la relación recíproca de tamaño relativo que una fracción guarda respecto de la unidad de referencia (Thompson y Saldanha, 2003). Estas ideas permitirán al alumno reconocer el tamaño de las fracciones en referencia a la unidad establecida, además de favorecer la concepción de las fracciones como algo externo a la misma unidad.

Para cerrar esta fase de la TEDE, el profesor plantea a los alumnos varias tareas por escrito en las que también deben dar su respuesta por escrito, se refieren a la comparación de fracciones. Si bien pueden parecer sencillas cuando los alumnos ya comprenden el valor relativo de la fracción, lo que aquí interesa es analizar la abstracción que han alcanzado para validar sus respuestas, se trata de que los alumnos encuentren un argumento que justifique por qué una fracción es menor o mayor que otra.

La primera cuestión planteada fue “¿por qué 9/10 es menor que 10/9?”, en las respuestas es posible observar que han consolidado el aprendizaje de esta noción y como se puede ver en la siguiente respuesta de un alumno que hemos transcrito, son capaces de determinar y justificar cuándo una fracción es mayor a la otra.

(A) $\frac{9}{\boxed{10}} < \frac{10}{\boxed{9}}$

La medida de $\frac{9}{\boxed{10}}$ *es menor que la medida de* $\frac{10}{\boxed{9}}$ *porque* $\frac{9}{\boxed{10}}$ *es más pequeño porque debe caber 10 veces, pero en este caso solamente tiene 9 veces y le faltaría una para ser un Tije y a* $\frac{10}{\boxed{9}}$ *le sobraría uno porque durante más pequeño el número, más espacio ocupa y un número más grande menos espacio ocupa.*

Se puede apreciar que los alumnos han comprendido el valor recíproco de tamaño relativo de una fracción y que, con este aprendizaje, son capaces de justificar la comparación de fracciones: "porque entre más pequeño el número más espacio ocupa y entre más grande menos espacio ocupa". El argumento utilizado remite a la idea de iteración, es decir a las veces que un *pequeño* puede ser iterado para igualar el tamaño de la unidad, entre menor sea el *pequeño* más iteraciones requiere para medir lo mismo que la unidad. Podemos decir entonces que el tamaño relativo de la fracción unitaria permite a los alumnos comparar con éxito fracciones. El argumento se complementa cuando menciona que "$\frac{9}{\boxed{10}}$ es más pequeño porque debería caber 10 veces y aquí solamente tiene 9", lo que es evidencia de que el alumno no solo es capaz de determinar que 1/10 es menor que 1/9 sino también que, para justificar su respuesta, utiliza la noción de inverso multiplicativo, por ello puede darse cuenta que $\frac{9}{\boxed{10}}$ no son suficientes para igualar el tamaño del *Tije,* mientras que $\frac{10}{\boxed{9}}$ lo sobrepasa por una iteración o por un *pequeño*, es decir que fue iterado más allá de la unidad de referencia.

Al observar estos argumentos y la comparación que son capaces de hacer los alumnos, se hace evidente que pueden constituir objetos mentales sobre la fracción impropia si desde los primeros acercamientos a la fracción se le plantea como un número independiente de la unidad y que su tamaño, iteraciones y medida final, no están contenidas dentro del entero. Otra de las ideas necesarias para comprender la fracción impropia tiene que ver con reconocer su propiedad multiplicativa, la cual permite determinar que una subunidad puede ser iterada las veces necesarias para obtener una medida, incluso más allá de la unidad de referencia. En la siguiente respuesta que también hemos transcrito, se puede observar que el alumno comprende que el tamaño de la fracción está determinado por el número de veces que tienen que usar un *pequeño* para medir (iterar).

(A) $\frac{9}{\boxed{10}} < \frac{10}{\boxed{9}}$

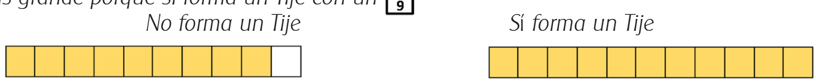
La medida de $\frac{9}{\boxed{10}}$ *es menor que la medida* $\frac{10}{\boxed{9}}$ *porque el pequeño de a diez debe de usarse diez veces para ser como un Tije y el pequeño de a nueve debe de caber nueve veces, pero como es 10 veces, es más grande la medida de* $\frac{10}{\boxed{9}}$

En el argumento anterior se puede apreciar que el alumno comprende que "si A es 9 veces B, entonces B es 1/9 de A", lo que le permite expresar que el 9 (que alude a 1/9) debe "caber" nueve veces para ser igual que un *Tije*, pero como cabe 10 veces es más grande. Esta idea le permite comprender que para comparar fracciones debe revisar si se iguala o no la unidad de referencia. También le permite pensar en la fracción desde una perspectiva multiplicativa. En este sentido el esquema fraccionario iterativo que propone Tzur (2002) ayuda a los alumnos a abandonar la idea de que la fracción está contenida en un entero, también los ayuda a establecer las ideas necesarias para comprenderla como un número que expresa un tamaño que puede ser acumulado e iterado más allá de la unidad de referencia.

En el campo de las fracciones, la relación multiplicativa es una de las nociones que Tzur (2002) y Thompson y Saldanha (2003) señalan como indispensable para que el alumno comprenda el tamaño relativo de la fracción, es decir, el alumno debe reconocer la iteración como un medio para determinar una medida. Esta acción le permite reconocer a la fracción como independiente de la unidad de referencia y generar esquemas para comprender las fracciones impropias, un ejemplo de ello es la siguiente justificación de un alumno.

(A) $\frac{9}{\boxed{10}}$ $\frac{10}{\boxed{9}}$

La medida de $\frac{9}{\boxed{10}}$ *es más pequeño que* $\frac{10}{\boxed{9}}$ *porque* $\frac{9}{\boxed{10}}$ *ni siquiera forma un Tije y* $\frac{10}{\boxed{9}}$ *es más grande porque si forma un Tije con un* $\frac{1}{\boxed{9}}$



En la respuesta anterior, se puede ver que el alumno expresa "$\frac{9}{\boxed{10}}$ ni siquiera forma un *Tije*", en su justificación 9/10 es menor porque no es la unidad completa, mientras que 10/9 sí forman un *Tije* y por lo tanto es mayor.

Conforme el análisis de las respuestas de los alumnos, podemos deducir que estas son evidencias de que los objetivos planteados en esta tercera práctica se han logrado, pues los alumnos ya pueden justificar por qué una fracción es menor, igual o mayor que la unidad de referencia utilizando argumentos relacionados con factores multiplicativos. Además, comprenden la fracción como independiente de la unidad. Estas ideas se han hecho presentes en sus respuestas dadas en las tareas de comparación. Al tener en cuenta que las unidades y subunidades son independientes unas de las otras, los alumnos pueden realizar las iteraciones necesarias sin tener como límite la unidad, de esta manera evitan confusiones respecto de su tamaño.

La tercera práctica concluye cuando los alumnos muestran la capacidad de comparar correctamente el tamaño de medidas mediante las iteraciones de las subunidades y de interpretar la simbología que representa a dichas medidas, símbolos que se integran con dos números, el denominador que alude al tamaño del *pequeño* y el numerador que indica el número de veces que se itera la subunidad. La generalización de estas ideas relativas al significado (fracción) y significante (símbolos) se da una vez que se han implementado las seis prácticas matemáticas de la TEDE.

Las nociones desarrolladas servirán de base para determinar si una fracción es menor o mayor a la unidad de referencia y reconocer cuando es menor, mayor o igual que una medida, con ello se facilita la comprensión de las fracciones impropias y la superación de la dificultad que surge cuando la concepción de las fracciones es construida a partir de las nociones del significado parte-todo.

CONCLUSIONES

Por años se han buscado formas para acercar a los alumnos al mundo de las fracciones porque es uno de los objetos matemáticos más complejos para aprender en la educación básica y dicha complejidad se acentúa en los grados escolares superiores. Por lo anterior las dificultades para su aprendizaje y su enseñanza han sido objeto de estudio en múltiples investigaciones, es el caso de este trabajo que muestra los resultados de un experimento de diseño cuyo objetivo fue la constitución de objetos mentales sobre la fracción impropia y la puesta a prueba de unos medios didácticos para su enseñanza.

Los resultados permiten concluir que mediante el razonamiento de magnitudes continuas, específicamente de longitud, se puede construir una alternativa de enseñanza a las fracciones que haga énfasis en un esquema multiplicativo para contribuir a la interpretación de otras propiedades de estos números.

En el desarrollo de la TEDE, específicamente de la tercera práctica, el objetivo era que los alumnos fueran capaces de reconocer si una fracción es de menor, mayor o igual longitud que la unidad para identificar la independencia entre la unidad y las subunidades, sin desconocer la relación que guardan entre sí. Estas nociones se han desarrollado antes en investigaciones de Cortina y Visnovska (2008, 2013) en las que concluyen que la inmensa riqueza fenomenológica del trabajo con fracciones favorece su interpretación al tomar en cuenta la noción de comparación de medidas realizada por Freudenthal.

Conforme fue avanzando la TEDE se pudo observar que el discurso de los alumnos mostraba la constitución de objetos mentales que les permitían distinguir una medida mayor que otra usando como referencia a la unidad, es decir que comprenden la relación entre la unidad y la subunidad como medidas recíprocas (A es 9 veces B por lo tanto B es 1/9 de A) y si la fracción "llena el *Tije*" (es igual), "no lo llena" (es menor) o "lo rebasa" (es mayor), lo que a su vez les permite comparar fracciones de diferentes tamaños; dichos objetos mentales también les permiten distinguir las fracciones propias de las impropias.

A través de la medición de tiras, como lo plantea la situación contextualizada en los *acajay*, los alumnos lograron determinar cuál tira es más grande y justificar por qué una es mayor que la otra, además utilizaron discursos que evidencian los conocimientos adquiridos con el desarrollo de la TEDE.

Las conversaciones colectivas son el fundamento del principio de interacción, en estas se ha mostrado la efectividad de la implementación de la tercera práctica ya que sus argumentos evidencian que han desarrollado objetos mentales sobre fracciones impropias. Dichas conversaciones se corresponden con la idea de la EMR que postula el aprendizaje como una actividad social en la que los alumnos muestran sus estrategias e invenciones y "al escuchar y observar lo que otros han desarrollado y escuchar las distintas maneras de resolver un problema, se les permite tomar algunas de esas ideas para mejorar naturalmente sus estrategias" (Santamaria, s/f. p. 22). De esta manera las nuevas ideas que se matematizan y reinventan ocupan un lugar entre los conocimientos de los alumnos, posteriormente les servirán para trabajar ideas y conceptos relacionados con las fracciones que regularmente resultan en obstáculos para la apropiación de nuevos saberes.

Los resultados de la tercera práctica nos permiten brindar a los docentes herramientas (objetivos y actividades de la agenda, normas matemáticas para guiar la clase, el concepto de fenomenología didáctica) para iniciar el trabajo con fracciones y también pueden servir de base para futuros investigadores que deseen profundizar y ampliar la TEDE aquí trabajada y buscar los medios propicios para que los alumnos constituyan objetos mentales sobre las fracciones impropias y sobre la comparación de estas. Solo resta recordar que la TEDE aplicada es un recurso inacabado y con posibilidades de mejorarse.

REFERENCIAS

Bressan A., Zolkower B., y Gallego M. (2004). La educación matemática realista. Principios en que se sustenta. *Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática*. Agosto 2004. Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH)

Briceño, O. y Buendía, G. (2015). Los experimentos de diseño y la práctica de modelación: significados para la función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 45*, 65-83. http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/ view/656/1189

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. (Traducción de: FREGONA, Dilma). Editorial Zorzal.

Campo, R y Llinares, S. (2015). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes de educación primaria (9-12 años) [comunicación]. *Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Julio 2015,* https://17jaem.semrm.com/aportaciones/n120.pdf

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.) *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). https://doi.org/10.4324/9781410602725

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *American Educational Research Association*, *32*, 9-13. http://www.jstor.org/stable/3699928

Cobb, P., Visnovska, J., y Zhao, Q. (2008). Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education. *Education et Didactique* (pp. 105-124). https://doi.org/10.4000/educationdidactique.276

Cortina, J. L., Visnovska, J., y Zuñiga, C. (2008). Un punto de partida alternativo para la instrucción de fracciones. *Educación Matemática*, *20*(2), 35-61. https://www.revista-educacion-matematica.com/descargas/Vol25-2.pdf

Cortina, J. L., Cardoso, E. y Zúñiga, C. (2012). El significado cuantitativo que tienen las fracciones para estudiantes mexicanos de 6º de primaria. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *14*(1), 70-85. http://redie.uabc.mx/vol14no1/contenido-cortinacardozo.html

Cortina, J. L., Zuñiga, C., y Jana, V. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*, *25*(2), 7-29. https://www.revista-educacion-matematica.com/pdf/documentos/REM/REM25-2/Vol25-2-1.pdf

Cortina, J. L. (2014). Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño. *Educación Matemática*, 25 años 270-284. https://www.redalyc.org/pdf/405/40540854014.pdf

D'Amore, B., Font, V., y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradígma*, *28*(2), 49-77. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011225120070002000003&lng=es&tlng=es

Delgado, I. y Cortina, J.L. (2021). La educación matemática realista. Naturaleza y posibles aportes en México. En Aguayo, L y Calderón, J. (Eds.). *Formación y profesión docente. Entre prescripciones teorías y prácticas Educativas.* (pp. 325-342). Taberna Librería.

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos.* Editor Magisterio.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Library of Congress Catalog Card Number 72-77872. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2

Freudenthal H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

Freudenthal, H. (1986). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* (Vol. 1). Medios de ciencia y negocios de Springer.

Freudenthal, H. (2005). *Revisando la educación matemática: conferencias en China* (Vol. 9). Medios de ciencia y negocios de Springer.

Gravemeijer, K. y Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: un matemático en didáctica y teoría del currículo. *Revista de estudios curriculares*, *32*(6), 777–796. https://doi.org/10.1080/00220270050167170

Kieren, T. (1980). "The rational number construct–Its elements and mechanisms". En Kieren, *Recent research on number learning* (pp. 125-149).

Luna, C y Aguayo, L.M. (2021). El experimento de diseño. Una alternativa metodológica para la investigación y la innovación. En Aguayo, L y Calderón, J. (Eds.). *Formación y profesión docente. Entre prescripciones teorías y prácticas educativas.* (pp. 325-342). Taberna Librería Editores.

Pruzzo, V. (2012). Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza?. *Revista Pilquen* 8, 1-14. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:169359222

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En Rico, I. (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* (pp. 61-94).

Santamaría, F. (2006). *La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda* [Tesis de maestría, Universidad Nacional del Comahue]. https://docplayer.es/12979482-La-contextualizacion-de-la-matematica-en-la-escuela-primaria-de-holanda.html

Steffe, L. (2002). Una nueva hipótesis sobre los niños en conocimiento fraccional. *Departamento de Educación Matemática.*

Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En Anthony Kelly y Richard Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Lawrence Erlbaum Associates.

Stephan, M., Bowers, J., Cobb, P. y Gravemeijer. (2003). Apoyar el desarrollo de las concepciones de medición de los estudiantes: analizar el aprendizaje de los estudiantes en el contexto social. *Revista de investigación en educación matemática. Monografía,* 12. Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas. http://www.jstor.org/stable/i30037716

Thompson, P. y Saldanha, L. (2003). Fracciones y razonamiento multiplicativo. En J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (Eds), *Investigación complementaria de los Principios y estándares para las matemáticas escolares* (pp. 95-114). Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education. The Wiskobas Project*. Springer Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-3707-9

Tossavainen A. y Helenius O. (2024). Student Teachers' Conceptions of Fractions: A Framework for the Analysis of Different Aspects of Fractions. *Mathematics Teacher Education and Development, 26*(1). https://mted.merga.net.au/index.php/mted/article/view/889

Tzur, R. (1999). Un estudio integrado de la construcción de fracciones impropias por parte de los niños y el papel de los maestros en la promoción de ese aprendizaje, *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 390-416. http://dx.doi.org/10.2307/749707

Valenzuela, C., García, M. y Nájera, A. (2019). Diseño de actividades para iniciar el estudio de las fracciones en educación primaria. En Hernández, Borja, Slisko y Juárez. (Eds.). *Aportes a la educación matemática basados en la investigación.* (pp. 161-183). El Errante Editor

Autor de correspondencia.
Ivette Anel Delgado Valdez

Dirección: Universidad Pedagógica Nacional – Unidad 321, Zacatecas
1975403012@alumnos.upn.mx
4928705291
Paseo de los Encinos 106, Valle de los Encinos; Guadalupe, Zac., C.P. 98604