



Particle paths beneath forced small amplitude periodic waves in a shallow channel with constant vorticity

Trayectorias de partículas bajo ondas periódicas forzadas de pequeña amplitud en un canal poco profundo con vorticidad constante

Marcelo V. Flamarion 

Received, Feb. 09, 2023;

Accepted, Jun. 06, 2023;

Published, Jul. 27, 2023



How to cite this article:

Flamarion M V. *Trayectorias de partículas bajo ondas periódicas forzadas de pequeña amplitud en un canal poco profundo con vorticidad constante*. *Selecciones Matemáticas*. 2023;10(1):158–163. <http://dx.doi.org/10.17268/SEL.MAT.2023.01.14>

Abstract

Particle paths beneath small amplitude periodic forced waves in a shallow water channel are investigated. The problem is formulated in the forced Korteweg-de Vries equation framework which allows to approximate the velocity field in the bulk fluid. We show that the flow can have zero, one or three stagnation points. Besides, differently from the unforced problem, stagnation points can arise for small values of the vorticity as long as the moving disturbance travels sufficiently fast.

Keywords . Water waves, Gravity-waves, Constant vorticity, KdV equation.

Resumen

En este artículo se investiga sobre trayectorias de partículas bajo ondas forzadas periódicas de pequeña amplitud en un canal de agua poco profundo con vorticidad constante. El problema se estudia a través de la ecuación forzada de Korteweg-de-Vries que permite aproximar el campo de velocidad en el fluido. Se muestra que el flujo puede tener cero, uno o tres puntos de estancamiento. Además, a diferencia del problema no forzado, pueden surgir puntos de estancamiento para valores pequeños de la vorticidad siempre que la perturbación en la superficie libre viaje suficientemente rápido.

Palabras clave. Ondas acuáticas, Ondas de gravedad, Vorticidad constante, ecuación de KdV.

1. Introducción. Las trayectorias de partículas debajo de una onda acuática periódica no lineal se han estudiado desde el trabajo pionero de Stokes [1] (1847). En su trabajo, Stokes demostró que las trayectorias de las partículas siguen bucles con un pequeño desplazamiento horizontal en la dirección de propagación de la onda, lo que ahora se conoce como *Stokes' drift*. En el aspecto numérico, Nachbin y Ribeiro-Jr [2] calcularon numéricamente, con gran precisión, las trayectorias de las partículas utilizando el método de la integral de contorno para las ecuaciones de Euler. Los resultados teóricos sólo han sido probados en los últimos años. Los lectores pueden consultar las obras de Constantin y colaboradores [3, 4]. Además, se han utilizado modelos asintóticos como la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) [5, 6, 7, 8, 9], las ecuaciones de Serre [10] y la ecuación de Schrödinger [11, 12] para obtener informaciones sobre las trayectorias de partículas para las ecuaciones de Euler.

La ventaja de usar modelos reducidos radica en el hecho de que resolver dichos modelos requiere costos computacionales más bajos que las ecuaciones de Euler y aún puede capturar estructuras complejas debajo de las ondas de agua, por ejemplo, en presencia de estructuras de vorticidad constante como los ojos de gato de Kelvin (*Kelvin cat-eyes*) [9, 13, 14, 15]. Dicha estructura se caracteriza por la existencia de puntos

*UFRPE/Rural Federal University of Pernambuco, UACSA/Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho, BR 101 Sul, 5225, 54503-900, Ponte dos Carvalhos, Cabo de Santo Agostinho, Pernambuco, Brazil. (marcelo.flamarion@ufrpe.br).

de estancamiento (puntos críticos del sistema dinámico autónomo de trayectorias de partículas) y zonas de recirculación dentro del fluido [16, 17, 18].

En este trabajo, se investiga la estructura del flujo debajo de ondas periódicas forzadas de pequeña amplitud en canales poco profundos con vorticidad constante. Hasta donde se sabe, este es el primer estudio de trayectorias de partículas bajo ondas forzadas periódicas.

El problema se reformula a través de la ecuación forzada de Korteweg-de Vries que permite aproximar el campo de velocidad en el fluido. A diferencia de las ondas periódicas libres, se muestra que siempre que la perturbación en movimiento viaje lo suficientemente rápido aparecerán puntos de estancamiento en el fluido, incluso para valores pequeños del parámetro de vorticidad. Además, los diagramas de bifurcación en el espacio de vorticidad por velocidad de la perturbación son investigados.

Este artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se presenta la formulación matemática del problema y derivamos brevemente una ecuación fKdV. En la sección 3 se presenta los resultados sobre las trayectorias de las partículas y la conclusión se presenta en la sección 4.

2. Formulación Matemática. Se considera un flujo bidimensional de un fluido incompresible y no viscoso con densidad constante (ρ) en un canal de profundidad finita (h) con vorticidad constante ($-\omega$) bajo la acción de la gravedad (g). Se supone que la perturbación en movimiento (\tilde{P}) aplicada sobre la superficie libre ($\eta(x, t)$) viaja hacia la izquierda a velocidad constante (U). Bajo estos supuestos, las ecuaciones rectoras adimensionales que modelan el problema son las ecuaciones de Euler [19]

$$\begin{aligned} \mu^2 \phi_{xx} + \phi_{yy} &= 0 \text{ en } -1 < y < \epsilon \eta(x, t), \\ \tilde{\phi}_y &= 0 \text{ sobre } y = -1, \\ \eta_t + \epsilon \eta_x (\Omega \eta + \phi_x) - \frac{1}{\mu^2} \phi_y &= 0 \text{ sobre } y = \epsilon \eta(x, t), \\ \tilde{\phi}_t + \frac{\epsilon}{2} (\phi_x^2 + 2\Omega \eta \phi_x + \frac{1}{\mu^2} \phi_y^2) + \eta - \Omega \psi &= -\epsilon \tilde{P}(x + Ft) \text{ sobre } y = \epsilon \eta(x, t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $\phi(x, y, t)$ es la velocidad potencial, ψ su conjugado armónico, $\epsilon = a/h$ es el parámetro de no linealidad, $\mu = h/\lambda$ es el parámetro de aguas poco profundas, $-\Omega = -\omega h/c_0$ es la vorticidad adimensional y $F = U/(gh)^{1/2}$ es el número de Froude.

Se considera el régimen débilmente no lineal ($\epsilon \approx 0$) débilmente dispersivo ($\mu^2 \approx 0$) y que la no linealidad y la dispersión se equilibran como $\epsilon = \mu$. Además, tomando $\tilde{P} = \epsilon P$, $F = 1 + \epsilon f$ e introduciendo las variables viajeras

$$\xi = x - ct \text{ y } \tau = \epsilon t,$$

Flamarion et al. [22] mostraron que, en el orden más bajo, la superficie libre se rige por la ecuación forzada de Korteweg-de-Vries

$$\eta_\tau + f \eta_\xi + \alpha \eta \eta_\xi + \beta \eta \xi \xi_\xi = \gamma P_\xi(\xi), \tag{2.2}$$

donde los coeficientes están dados por

$$\alpha = \frac{\Omega^2 + 3}{2c + \Omega}, \quad \beta = \frac{c^2}{3(2c + \Omega)} \text{ y } \gamma = \frac{-1}{2c + \Omega}. \tag{2.3}$$

y c es la solución de $c^2 + \Omega c = 1$ en el rango negativo, es decir,

$$c = -\frac{\Omega}{2} - \frac{\sqrt{\Omega^2 + 4}}{2}.$$

Cabe mencionar que, una solución $\theta = \theta(\xi, \tau)$ de la ecuación (2.2) se puede escribir en términos de las variables originales como $\Theta(x, t) = \epsilon \theta(x - ct, \epsilon t)$.

Además, el campo de velocidad ($u(x, y, t), v(x, y, t)$) en el fluido se puede aproximar como [13, 20]

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \Omega y + \epsilon \phi_x(x, y, t) \approx \Omega y + \epsilon u_b(x, t), \\ v(x, y, t) &= \phi_y(x, y, t) \approx -\epsilon u_{b,x}(x, t)(y + 1), \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde u_b denota la velocidad horizontal del flujo en el fondo del canal.

3. Resultados.

3.1. Ondas estacionarias exactas. Las soluciones de ondas forzadas periódicas de (2.2) se pueden obtener escogiendo el perfil de perturbación como un problema inverso. De la misma manera que lo hecho por Chardard et al. [21], seleccionamos

$$\eta(\xi) = A \cos^2(k\xi), \quad (3.1)$$

para que sea una solución estacionaria de la ecuación (2.2). Por lo tanto, la perturbación satisface

$$\gamma P(\xi) = 2f\eta + \frac{\alpha}{2}\eta^2 + \beta\eta_{\xi\xi}.$$

En consecuencia, tenemos que

$$P(\xi) = A(f - \beta k^2) \cos(kx) + \frac{\alpha A^2}{2\gamma} \cos^2(kx). \quad (3.2)$$

Eligiendo que la perturbación sea del tipo \cos^2 obtenemos que el número de onda satisface

$$k = (f/\beta)^{1/2}. \quad (3.3)$$

Debido al interés en investigar las trayectorias de partículas para el modelo de Euler usando el modelo de fKdV como una aproximación, es necesario expresar la superficie libre y la velocidad potencial usando las coordenadas de Euler. La onda periódica en coordenadas de Euler es

$$\eta(x, t) = A \cos\left(k(x - (c - \epsilon f)t)\right), \quad (3.4)$$

y la velocidad horizontal evaluada en el fondo del canal es

$$u_b(x, t) = \frac{A}{c + \Omega} \cos\left(k(x - (c - \epsilon f)t)\right), \quad (3.5)$$

donde, k se define en la ecuación (3.3).

3.2. Cálculo de trayectorias de partículas. Calculamos las trayectorias de partículas debajo de la onda periódica (3.4) resolviendo el sistema dinámico no autónomo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \Omega y + \epsilon \phi_x(x, y, t) \approx \Omega y + \epsilon u_b(x, t), \\ \frac{dy}{dt} &= \phi_y(x, y, t) \approx -\epsilon u_{b,x}(x, t)(y + 1). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Con el propósito de calcular los puntos de estancamiento, es conveniente reescribir el sistema (3.6) en el marco de perturbación móvil $X = x - (c - \epsilon f)t$ y $Y = y$. En este nuevo marco, las trayectorias de partículas son soluciones del sistema dinámico autónomo

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \Omega Y - (c - \epsilon f) + \epsilon u_b(X), \\ \frac{dY}{dt} &= -\epsilon u_{b,x}(X)(Y + 1), \end{aligned} \quad (3.7)$$

que se puede ver a través de las líneas de corriente, es decir, las trayectorias de las partículas son las curvas de nivel de la función de corriente

$$\Psi(X, Y) = \epsilon u_b(X)(Y + 1) + \frac{\Omega}{2} Y^2 - (c - \epsilon f)Y. \quad (3.8)$$

Flamarion et al. [22] investigaron las ondas generadas por el paso de una perturbación en movimiento a lo largo de la superficie libre utilizando las ecuaciones de Euler y compararon los resultados con los producidos por la ecuación fKdV en el régimen débilmente no lineal y débilmente dispersivo para distribuciones de presión de pequeñas amplitudes. Demostraron que las soluciones de los dos modelos concuerdan cuando el parámetro de no linealidad es $\epsilon = 0,01$. En base a sus resultados, se ha fijado lo siguiente $\epsilon = 0,01$ y $A = 1$.

Es ampliamente conocido en la literatura que un punto de estancamiento aparece primero en el fondo del canal y debajo de la cresta de la ola para valores grandes del parámetro de vorticidad. A medida que la intensidad de la vorticidad aumenta aún más, este punto se desprende del fondo moviéndose hacia arriba y otros puntos de estancamiento dan lugar a la mayor parte del fluido. Con esto en mente, buscamos los

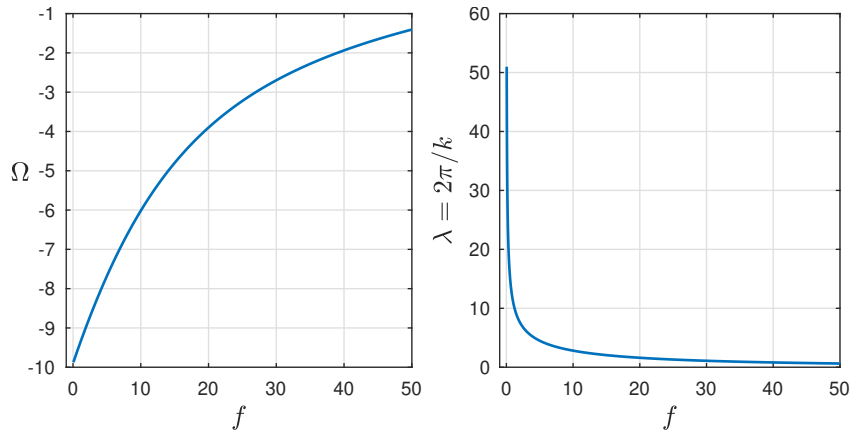


Figura 3.1: Izquierda: el parámetro de vorticidad en función de f . Derecha: la longitud de onda de la onda periódica para la que aparece el primer punto de estancamiento en la parte inferior del canal.

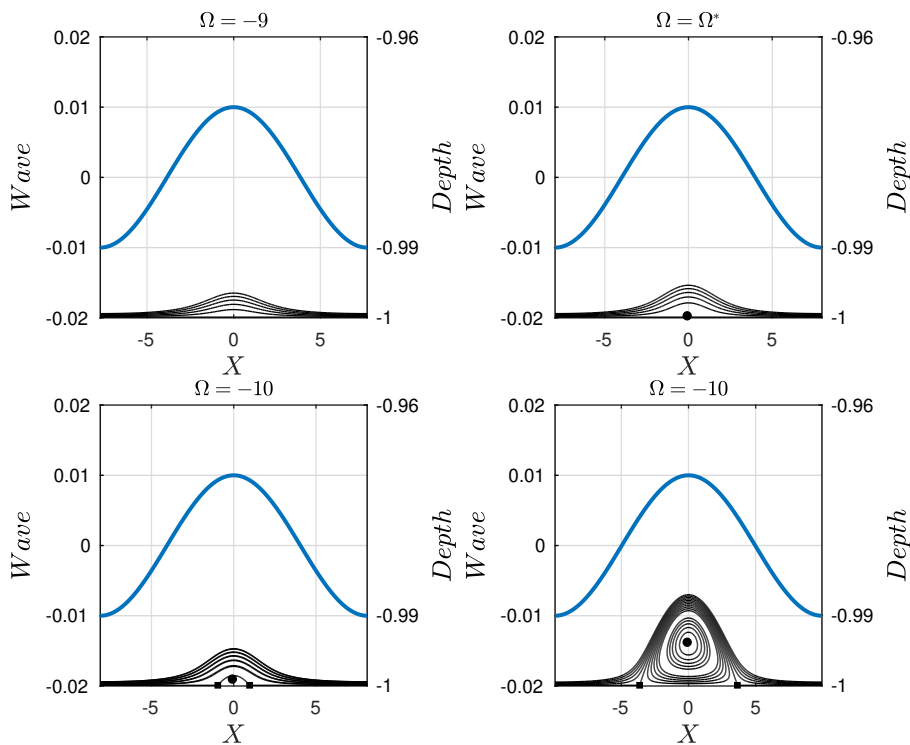


Figura 3.2: Retratos de fase de (3.7) con $f = 8$ y diferentes valores del parámetro de vorticidad. Los círculos corresponden a los centros, los cuadrados a las sillas en el fondo del canal.

valores en el espacio de parámetros (f, Ω) para los cuales aparece este punto de estancamiento notando que la velocidad horizontal se anula en $(0, -1)$. Esto produce la ecuación

$$0 = \Omega(-1) - (c - \epsilon f) + \epsilon u_{b,X}(0) = \Omega(-1) - (c - \epsilon f) + \frac{\epsilon A}{c + \Omega}. \tag{3.9}$$

Las soluciones de esta ecuación describen una curva en el plano $\Omega \times f$ la cuál se muestra en la Figura 3.1 (izquierda) y la longitud de onda de la respectiva onda periódica en la Figura 3.1 (derecha). Se debe tener en cuenta que los puntos de estancamiento surgen en el fondo del canal, incluso para valores pequeños del parámetro de vorticidad, siempre que la perturbación en movimiento en la superficie libre viaje lo suficientemente rápido. Esto es diferente de lo que sucede en el problema no forzado. Ya que se sabe que los puntos de estancamiento solo aparecen en el dominio fluido para valores grandes del parámetro de vorticidad. Debajo de la curva, no hay puntos de estancamiento y arriba hay un centro debajo de la cresta y dos sillas en el fondo del canal. En otras palabras, el flujo puede tener (i) cero puntos de estancamiento, (ii) un punto de estancamiento en el fondo del canal o (iii) tres puntos de estancamiento, un centro y dos sillas

pegadas al fondo formando una zona de recirculación. Los detalles de esta bifurcación se dan en la Figura 3.2 para un valor fijo del parámetro f .

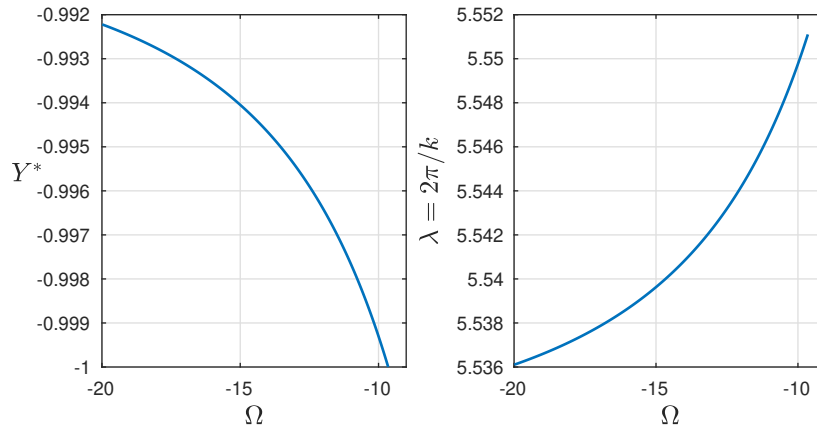


Figura 3.3: Izquierda: la coordenada vertical del punto de centro en función de la vorticidad y la longitud de la respectiva onda (derecha) para $f = 0,5$.

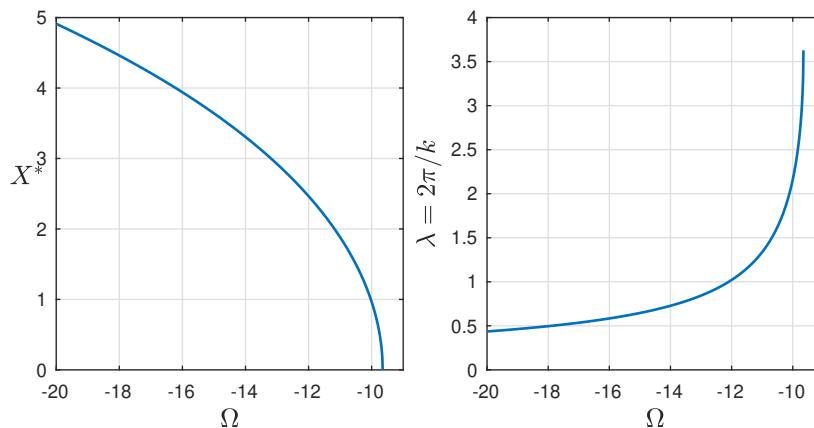


Figura 3.4: Izquierda: la coordenada horizontal del punto de silla en función de la vorticidad y la longitud de la respectiva onda (derecha) para $f = 0,5$.

A continuación, se investiga el efecto de la intensidad de la vorticidad en la posición de los puntos de estancamiento para un valor fijo de la velocidad de la perturbación. El punto de centro (debajo de la cresta de la onda) aparece primeramente en el fondo del canal para un valor crítico de la vorticidad. A medida que aumenta la intensidad de la vorticidad, ese punto se mueve hacia arriba, mientras que la longitud de la onda periódica disminuye (consultese la Figura 3.4 (izquierda)). En cambio, los puntos de silla se alejan a medida que la intensidad de la vorticidad aumenta y la longitud de la respectiva onda disminuye. La Figura 3.4 (izquierda) muestra ese comportamiento para $f = 0,5$.

Como se mencionó al principio de esta sección, se espera que los resultados aquí presentados coincidan con el modelo no lineal. Un intento de comparar ambos modelos parece un camino natural a seguir en el futuro.

4. Conclusión. En este artículo, se han investigado las estructuras de flujo debajo de una perturbación de movimiento periódico en un canal de agua poco profundo, con vorticidad constante. Se muestra que los puntos de estancamiento surgen en el fluido incluso para valores pequeños del parámetro de vorticidad, siempre que la perturbación en movimiento se mueva lo suficientemente rápido. Adicionalmente, se muestra que el flujo puede tener cero, uno o tres puntos de estancamiento en el fluido.

5. Agradecimientos. El autor está enormemente agradecido con IMPA-Instituto Nacional de Matemática Pura y Aplicada por el apoyo financiero durante el Programa de Verano de 2023.

ORCID and LicenseMarcelo V. Flamarion <https://orcid.org/0000-0001-5637-7454>This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)**Referencias**

- [1] Stokes GG. On the theory of oscillatory waves. *Trans Cambridge Phil Soc.* 1847; 8:441-455.
- [2] Nachbin A, Ribeiro-Jr R. A boundary integral method formulation for particle trajectories in Stokes Waves. *DCDS-A.* 2014; 34(8):3135-3153.
- [3] Constantin A, Villari G. Particle trajectories in linear water waves. *J Math Fluid Mech.* 2008; 10:1336-1344.
- [4] Constantin A, Strauss W. Pressure beneath a Stokes wave. *Comm Pure Appl Math.* 2010; 63:533-557.
- [5] Johnson RS. On the nonlinear critical layer below a nonlinear unsteady surface wave. *J. Fluid Mech.* 1986; 167:327-351.
- [6] Borluk H, Kalisch H. Particle dynamics in the kdv approximation. *Wave Motion.* 2012; 49:691-709.
- [7] Alfatih A, Kalisch H. Reconstruction of the pressure in long-wave models with constant vorticity. *Eur. J. Mech. B-Fluid.* 2013; 37:187-194.
- [8] Gagnon L. Qualitative description of the particle trajectories for n-solitons solution of the korteweg-de vries equation. *Discrete Contin Dyn Syst.* 2017; 37:1489-1507.
- [9] Guan, X. Particle trajectories under interactions between solitary waves and a linear shear current. *Theor App Mech Lett.* 2020; 10:125-131.
- [10] Khorsand Z. Particle trajectories in the Serre equations. *Appl Math Comput.* 2020; 230:35-42.
- [11] Curtis C, Carter J, Kalisch H. Particle paths in nonlinear schrödinger models in the presence of linear shear currents. *J. Fluid Mech.* 2018; 855:322-350.
- [12] Carter J, Curtis C, Kalisch H. Particle trajectories in nonlinear Schrödinger models. *Water Waves.* 2020; 2:31-57.
- [13] Flamarion MV. Complex flow structures beneath rotational depression solitary waves in gravity-capillary flows. *Wave Motion.* 2023; 117:103108.
- [14] Flamarion MV, Ribeiro-Jr, R. Solitary waves on flows with an exponentially sheared current and stagnation points. *Q. Jl Mech. Appl. Math.* 2023; hbac021.
- [15] Flamarion MV, Gao T, Ribeiro-Jr, R. An investigation of the flow structure beneath solitary waves with constant vorticity on a conducting fluid under normal electric fields. *arXiv:2110.02072v1 [physics.flu-dyn].* 2023.
- [16] Teles Da Silva AF, Peregrine DH. Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity. *J. Fluid Mech.* 1988; 195:281-302.
- [17] Ribeiro-Jr R, Milewski PA, Nachbin A. Flow structure beneath rotational water waves with stagnation points. *J. Fluid Mech.* 2017;812:792-814.
- [18] Flamarion MV, Nachbin A, Ribeiro-Jr R. Time-dependent Kelvin cat-eye structure due to current-topography interaction. *J. Fluid Mech.* 2020; 889:A11.
- [19] Whitham GB. *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, 1974.
- [20] Flamarion MV. Stagnation points beneath rotational solitary waves in gravity-capillary flows. *Trends in Computational and Applied Mathematics.* 2023; 24(2):265-274.
- [21] Chardard F, Dias F, Nguyen HY, Vanden-Broeck JM. Stability of some steady solutions to the forced KdV equation with one or two bumps. *J Eng Math.* 2011; 70:175-189.
- [22] Flamarion MV, Milewski PA, Nachbin A. Rotational waves generated by current-topography interaction. *Stud Appl Math.* 2019; 142:433-464. DOI: 10.1111/sapm.12253.