Reseña de tesis

Reseñas de algunos trabajos de pregrado de la carrera de Matemáticas Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá. 2021-I

Omar Duque Gómez[1,a]

1. **Acercamiento a las Medidas de Young y sus aplicaciones a Ecuaciones Diferenciales Parciales**

   Estudiante **Haliaphne Acosta***

   Director *Leonardo Rendóon Arbeláez***

   Emails *haacostaa@unal.edu.co, **lrendona@unal.edu.co

   Resumen. El presente trabajo parte de la consideración de una ecuación diferencial parcial hiperbólica no lineal, para la cual es difícil encontrar una solución. Entonces, se considera una perturbación para la ecuación, lo que la convierte en un problema parabólico, para el cual es más sencillo encontrar su solución; seguido a ello, se considera una sucesión de soluciones de la ecuación perturbada. El interés está en saber si el límite de dicha sucesión de soluciones es una solución débil para la ecuación incialmente dada. Para ello, se presentan resultados propuestos por Tartar y Murat: Teorema de la Medidas de Young y Lema Div-Rot, los cuales nos permiten conocer la caracterización o las condiciones necesarias para que el límite de la sucesión de soluciones considerada sea efectivamente una solución débil de la ecuación hiperbólica dada.

2. **Análisis de un modelo matemático relacionado con la invasión tumoral**

   Estudiante **José Fabian Beltrán Joya***

   Director *Vladimir Angulo Castillo***

   Emails *jfbeltranj@unal.edu.co, **vlcastillo@unal.edu.co

   Resumen. En este trabajo se realizó un estudio y análisis de la existencia y unicidad de solución clásica local a un modelo de invasión tumoral modificado de tipo Chaplain-Anderson. En este, el papel de la matriz extracelular activa (MEC*) es tomado en consideración a través de una ecuación de tipo parabólico que modela su efecto. Para la comprensión del

[1]Coordinador Carrera de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
[a]oduqueg@unal.edu.co

modelo, se exploraron algunos conceptos biológicos necesarios que justifican su origen, destacando su relevancia y características. Luego, desde el punto de vista matemático, se reunieron algunos preliminares teóricos importantes para garantizar y analizar la existencia y unicidad de solución clásica local. Entre los contenidos teóricos más relevantes se mencionan los espacios L^p, los espacios de Sobolev $W^{m,p}$, los operadores parabólicos y sectoriales, la teoría de semigrupos, las ecuaciones diferenciales parciales (en particular, parabólicas y elípticas), entre otras. Posteriormente, a través de la teoría de punto fijo, se examinó la existencia de solución local de tipo mild no negativa al problema. Y por último, a partir de resultados de regularidad parabólica, se determinó que tal solución es de hecho solución clásica local. La unicidad se obtuvo mediante la implementación de un argumento de tipo energético.

Palabras clave: Modelo de invasión tumoral, solución clásica, local, unicidad, regularidad.

3. **Sobre el anillo de periodos de Kontsevich-Zagier**

Estudiante **Nicolás Bolaños Cardenas***

Director *John Alexander Cruz Morales***

Emails *nibolanosca@unal.edu.co, **jacruzmo@unal.edu.co

Resumen. Durante siglos las personas, según sus necesidades, han trabajado para crear avances que les permitan resolver problemas específicos. Particularmente en las matemáticas, la manera en que se crearon (o descubrieron según considere el lector) los números que conocemos hoy en día no fueron la excepción. Usualmente, dichos números se nos son presentados casi que de manera cronológica, empezando con los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, que básicamente son los que usamos para contar.

Luego a estos números naturales les podemos agregar las soluciones a ecuaciones del tipo:

$$x + a = 0, \quad a \in \mathbb{N}$$

y obtener los números enteros $\mathbb{Z}$.

De la misma manera, podemos obtener el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ agregando las soluciones a ecuaciones del tipo:

$$qx = p, \quad \text{con } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} - \{0\}, m.c.d(p, q) = 1$$

Luego, con un lenguaje un poco menos algebraico, podemos darnos cuenta que algunas sucesiones de números en $\mathbb{Q}$ son casi convergentes, pero no convergen a ningún número racional, lo que nos lleva a pensar en querer agregar los límites para estas sucesiones. Es así como obtenemos el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Aquí podemos extender este conjunto de números a un conjunto mas rico, al menos desde el punto de vista algebraico. Agregando el simbolo i tal que $i^2 = -1$, es decir, agregando la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$, podemos generar el conjunto de los números complejos como sigue:

$$\mathbb{C} = \{a + i \cdot b \mid a, b \in R\}$$

Ahora, al introducir los números complejos nos podemos preguntar si allí podemos encontrar la solución a cualquier ecuación polinómica con coeficientes en $\mathbb{C}$, la respuesta es si, y es precisamente el enunciado del conocido teorema fundamental del álgebra.

Se puede pensar que al llegar a $\mathbb{C}$ hemos llegado la cúspide pero, dando una mirada hacia abajo, podemos ver que hay números bastante interesantes y que guardan cierta información importante. Si pensamos por ejemplo en todos aquellos números complejos que son solución a ecuaciones polinómicas con coeficientes racionales obtendrémos los *números algebraicos*, denotados por $\overline{\mathbb{Q}}$. Otro ejemplo interesante es la constante π. Esta constante, inicialmente pensada por los antiguos griegos como el cociente entre el diámetro y el radio de cualquier circunferencia, aparece de manera recurrente en casi todas las áreas de las matemáticas. Podemos encontrar varias expresiones para π, unas mas sofisticadas que otras. Si pensamos en la concepción de los griegos, π es el área de una circunferencia de radio 1, pero usando lenguaje del cálculo vectorial encontramos una expresión interesante que es la siguiente:

$$\pi = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx\, dy$$

Si analizamos un poco más esta expresión encontraremos algunas cosas de interes particular en este trabajo. Primero, esta expresión está dada por la integral de la función constante 1, mas aún, siguiendo el hecho de que π es el área de una circunferencia unitaria. Segundo, si bien la región en donde se efectua la integral es la circunferencia unitaria, llama un poco más la atención que esta región pueda ser descrita mediante una desigualdad polinómica con coeficientes racionales. Y por último, podemos notar que la función constante 1 es también una función racional con coeficientes racionales.

Ahora, es bien sabido que π es un número irracional que no es uno de estos número algebraicos mencionados anteriormente pero, sin embargo, se puede expresar mediante algún tipo de información finita y que además de alguna manera es de naturaleza algebraica, como lo podemos ver al expresarlo como una integral sobre una región descrita por una desigualdad polinómica sobre $\mathbb{Q}$ de una función racional.

Así como π, podemos encontrar muchos más ejemplos, que mostraremos a lo largo de este trabajo, de números que surgen de esta manera particular, a los que denominarémos como periodos y que, según los matemáticos Maxim Kontsevich y Don Zagier, parecen ser, "la siguiente clase de números mas importante en la jerarquía de números de acuerdo con sus propiedades aritméticas". Finalmente, en este trabajo pretendemos vislumbrar un poco la importancia mencionada, no solo de acuerdo a sus propiedades aritméticas, sino también su importancia en otras áreas en donde juegan un papel fundamental.

4. **Modelación matemática de la radicalización de una idea**

Estudiante **Brigitte Eliana Cabezas Bayona***

Director *Jorge Mauricio Ruiz Vera***

Emails *becabezasb@unal.edu.co, **jmruizv@unal.edu.co

Resumen. La radicalización ha crecido rápidamente durante los últimos años, por lo que se ha vuelto de gran importancia el estudio de este fenómeno social. Se considera una población mixta compuesta por dos subpoblaciones: inflexible y sensible, esta última, a su vez compuesta por dos subpoblaciones, agentes pacíficos y agentes opositores, donde los opositores son aquellos que pueden adquirir conductas nocivas dentro de la sociedad. Entonces, se estudian las interacciones entre los distintos agentes por medio de una ecuación diferencial anĺoga a una del tipo Depredador-Presa. Se investiga bajo qué condiciones la radicalización va a desaparecer, y por último se analiza la relevancia que tiene la oposición dentro de la población.

Palabras claves: Radicalización, Ecuación Diferencial, Modelación Matemática, Sociofísica.

5. **Sistemas Dinámicos y Teoría Ergódica: Medidas Tipo-SRB para Transformaciones Continuas**

Estudiante **Iván Francisco Díaz Granados Rodríguez***

Director *Serafín Bautista Díaz***

Emails *ifdiazr@unal.edu.co, **sebautistad@unal.edu.co

Resumen. En este trabajo de grado se realizó una recopilación de algunos resultados introductorios de la teoría ergódica y el último capítulo se basa en el artículo *SRB-Like Measures for C^0 Dynamics* de Eleonora Catsigeras. Consideremos una dinámica discreta asociada a una transformación continua $f : X \longrightarrow X$ sobre un espacio X métrico compacto (separable para algunos resultados) como objeto de estudio para poder desarrollar este trabajo, donde definimos las medidas de probabilidad invariantes, ergódicas y tipo-SRB (o observables), sabiendo que estas últimas son una generalización de las medidas SRB (o físicas).

Los teoremas de existencia que demostramos nos dice que f tiene medidas invariantes, ergódicas y tipo-SRB, incluso si no tiene medidas SRB.

Para la existencia de las medidas ergódicas, bastaría pedirle a la transformación que tenga por lo menos una medida invariante, quitandole la hipótesis de continuidad. El espacio de las medidas invariantes resulta ser un espacio convexo, donde toda medida invariante se puede escribir como "suma" de medidas ergódicas. Probamos que el espacio de las medidas de probabilidad borelianas $\mathcal{M}(X)$, el espacio de las medidas invariantes $\mathcal{M}_f(X)$ y el espacio de las medidas tipo-SRB $\mathcal{O}$ son conjuntos compactos en la topología débil*. Este último, el espacio de las medidas observables $\mathcal{O}$, resulta ser el conjunto minimal que contiene todas las medidas límite de las sucesiones $\{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\delta_{f^j(x)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ para Lebesgue casi todo punto $x \in X$. Finalmente, demostramos por casos que cuando el espacio $\mathcal{O}$ es contable finito o infinito existen finitas o infinitas medidas SRB, respectivamente, tales que la unión de sus cuencas de atracción estadística cubren el espacio, según la medida de Lebesgue.

6. **Análisis y optimización del espacio en el diseño de parqueaderos**

Estudiante **Jaime Alberto Gómez Flórez***

Director *Jorge Mauricio Ruíz Vera***

Emails *jagomezf@unal.edu.co, **jmruizv@unal.edu.co

Resumen. En las últimas décadas, en las grandes ciudades de todo el mundo, el número de automóviles ha crecido sin ninguna regulación y podría llegar a ser insostenible. En consecuencia, se produce un gran aumento en la necesidad de áreas para parqueo. En general, las soluciones a esta problemática se enfocan en dos direcciones: Incentivar el transporte público, y optimizar los espacios de parqueo ya existentes. El presente estudio se realiza en esta última dirección. Uno de los factores más importantes que determinan la capacidad de un parqueadero es el ángulo de los puestos de parqueo. Dada la complejidad del problema de encontrar el ángulo óptimo, se fija a priori una distribución específica de las casillas de parqueo y de las vías de circulación. En este trabajo se consideran dos geometrías para el lote del parqueadero: la rectangular y la trapezoidal recta. En base al modelo de [Abdelfatah and Taha, 2014], para el caso rectangular se planteó un modelo de Programación Lineal Entera (PLE) que corrige varios defectos geométricos que no fueron tenidos en cuenta, y se plantea un modelo propio para la geometría trapezoidal. El objetivo es determinar el ángulo apropiado para cada hilera de autos, maximizando el número total de espacios de parqueo. Los resultados muestran que al usar ángulos de parqueo casi siempre diferentes a 90°, se obtiene un aumento en el número de casillas de parqueo entre el 7 % y el 11 %, lo cual trae asociado un aumento proporcional en las ganancias del parqueadero, y en el uso eficiente del área.

Palabras clave: Programación lineal entera, Diseño de parqueaderos, Ángulo de parqueo, Análisis de Sensibilidad.

Referencias

[1] Akmal S. Abdelfatah and Mahmoud. Taha. Parking Capacity Optimization Using Linear Programming. Journal of Traffic and Logistics Engineering Vol. 2, No. 3, September 2014

7. Conexiones entre modelos determinísticos y estocásticos SIS y SIR

Estudiante **Betsy Hernández H.***

Director *Freddy Rolando Hernández***

Emails *bemhernandezhe@unal.edu.co, **fohernandezr@unal.edu.co

Resumen. A lo largo de la historia el ser humano ha enfrentado un sin número de peligros que han puesto en riesgo la supervivencia de la especie. Durante mucho tiempo han sido los desastres naturales y las enfermedades infecciosas las mayores amenazas para la perpetuidad del hombre. Con la evolución de la civilización junto al avance de los conocimientos científicos y tecnológicos, se han desarrollado herramientas que permiten tener una mayor capacidad de reacción frente a estas adversidades. Es aquí donde la modelación matemática adquiere un papel de vital importancia, son los modelos matemáticos los que han permitido tomar decisiones acertadas para que la vigente pandemia de la covid-19 no haya tomado tantas vidas humanas como lo pudo haber hecho. Existen muchos tipos de modelos epidemiológicos, entre los más clásicos se encuentran los modelos Susceptible-Infectado-Susceptible (SIS) y Susceptible-Infectado-Recuperado (SIR).

A su vez, los modelos epidemiológicos tienen distintas versiones de acuerdo al tipo de modelación que utilizan, fundamentalmente resulta interesante la división entre modelos estocásticos y modelos determinísticos. En el análisis que se plantea de estos modelos la versión estocástica está dada por cadenas de Markov, mientras que las determinísticas corresponderan a sistemas de ecuaciones en diferencias o diferenciales.

Dada una población constante es necesario conocer el famoso valor $\mathscr{R}_0$, el número de reproducción básico de la infección, que representa el número de infecciones secundarias producidas por un individuo infectado en una población enteramente susceptible. En los modelos determinísticos $\mathscr{R}_0$ determina totalmente el comportamiento del sistema; es decir, predice si la epidemia va a persistir en el tiempo, se va a presentar un brote infeccioso que luego desaparece o si por el contrario está condenada directamente a la extinción. Si $\mathscr{R}_0 \leq 1$ la enfermedad será erradicada, caso contrario si $\mathscr{R}_0 > 1$, donde la epidemia llega a un equilibrio endémico en el caso SIS o presenta un brote infeccioso con un pico y luego desaparece en el caso SIR.

En contraste, las versiones estocásticas para población constante están siempre predestinadas a la extinción de la enfermedad, independientemen-

te del valor que tome $\mathscr{R}_0$. Esto sucede porque estas cadenas de Markov tienen espacios de estado finitos con un único estado absorbente (número de infectados igual a 0). Bajo esta situación surge la duda ¿Cómo comparar dos modelos que tienen comportamientos distintos cuando $\mathscr{R}_0 > 1$, especialmente en el caso SIS donde la infección no se extinguirá? Sabemos que la cadena de Markov está predestinada a la extinción; no obstante, el tiempo necesario para que eso ocurra puede ser muy grande, tan grande que para efectos de los análisis epidemiológicos resulta más interesante ver que sucede antes del tiempo de absorción.

Para estos casos con tiempos de convergencia tan largos, valiéndose de probabilidades condicionadas a la no extinción, se puede demostrar que cuando $\mathscr{R}_0 > 1$ existe una distribución de probabilidad cuasi-estacionaria cuya media será considerablemente cercana al valor del equilibrio endémico de su contra-parte determinista.

En los modelos epidemiológicos tipo SIR, la epidemia eventualmente se extinguirá independientemente del valor de $\mathscr{R}_0$, tanto en su versión determinística, como estocástica. Por ello el criterio de comparación entre las dos versiones será el tamaño final de la epidemia; es decir, el número total de individuos susceptibles de la población que contrajeron la infección a lo largo del tiempo que esta estuvo vigente. Se observará que cuando $\mathscr{R}_0 < 1$ los tamaños finales de la epidemia serán más cercanos entre ambas versiones del modelo SIR.

8. **Specific errors of Deep Learning**

Estudiante **Gabriel Octavio Lozano Pinzón***

Director *Francisco Gómez***

Emails *golozanop@unal.edu.co, **frgomezgo@unal.edu.co

Resumen. En este proyecto final de pregrado, examinamos problemas específicos de aprendizaje de máquina y los solucionamos usando redes neuronales. Estos problemas están garantizados de tener una solución usando redes neuronales, sin embargo los algoritmos que normalmente se usan no logran obtener una solución adecuada. Examinamos estos problemas y como evadirlos.

9. **Creación y Análisis matemático de un agente conversacional, facilitador de búsquedas en datacatalog en la Gerencia de Analítica de Seguros Bolivar**

Estudiante **Jhonny Alexander Martinez Tenjo***

Director *Jorge Mauricio Ruiz Vera***

Emails *jhamartinezte@unal.edu.co, **jmruizv@unal.edu.co

Resumen. Este trabajo es el fruto de una práctica laboral que se llevó a cabo durante el primer semestre de 2021 en la gerencia de analítica de

la compañía Seguros Bolívar. Durante la práctica se diseñó e implementó un agente conversacional con el objetivo de facilitar y automatizar funciones correspondientes a la oficina de datos. Para la creación del agente se utilizó como lenguaje de desarrollo para el backend la librería flask, Python 3.7 y la herramienta dialogflow que tiene elementos integrados de inteligencia artificial que fueron analizados matemáticamente. Se muestra la construcción y el proceso de creación funcional del agente conversacional, de lo que se derivaron resultados con aplicabilidad a corto y mediano plazo para la compañía; y, que permitirán el mejoramiento constante del agente conversacional.

10. **Monotone path polytopes as combinatorial models**

Estudiante **Mateo Matijasevick***

Director *Lorenzo María Acosta Gempeler***

Emails *mmatijasevick@unal.edu.co, **lmacostag@unal.edu.co

Resumen. Recientemente, Rivera observó que algunos objetos combinatorios pueden ser utilizados como modelos para ciertos espacios topológicos. Más importante aún, notó relaciones estrechas entre estos objetos que aparentemente permiten construir nuevos objetos combinatorios a partir de los anteriores. ¿Qué propiedades tienen estos nuevos objetos? ¿Pueden ser utilizados también como modelos combinatorios de tales espacios topológicos?

Una pregunta fundamental de topología algebraica íntimamente relacionada con combinatoria toma un giro drástico hacia la geometría convexa y se traduce en un problema clásico de esta rama: la conjetura de Baues.

11. **K-Teoría y sucesiones espectrales**

Estudiante **Cristian Joel Osorio Mancipe***

Director *José Manuel Gómez Guerra***

Emails *cjosoriom@unal.edu.co, **jmgomez0@unal.edu.co

Resumen. Dado un espacio topológico podemos considerar dos invariantes algebraicos asociados a este, la K-teoría compleja y la K-teoría real. En este trabajo introduciremos los conceptos básicos para hacer su respectiva construcción. Además, mostraremos que estos invariantes cumplen los axiomas de Eilenberg-Steenrod para una teoría generalizada de cohomología. Posteriormente, usaremos estos axiomas para construir la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch de un CW-complejo, para finalmente mostrar cómo esta sucesión nos ayudará a calcular la K-teoría del CW-complejo.

12. **On a new class of models for paraconsistent set theory**

Estudiante **Luis Felipe Riaño Rodríguez***

Director *Marcelo Esteban Coniglio***, Codirector *Pedro H. Zambrano****

Emails *lfrianor@unal.edu.co, **coniglio@unicamp.br,
***phzambranor@unal.edu.co

Resumen. Una **estructura twist** para la lógica a tres valores **LPT0** ($\{1, \frac{1}{2}, 0\}$), es una estructura algebraica de la forma $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \langle \mathbf{T}_{\mathcal{A}}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\sim}, \tilde{\neg}, 0, 1 \rangle$, descrita sobre el lenguaje $\Sigma = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \sim, \neg\}$, $\neg$ representa la negación paraconsistente. Esta lógica permite, sin trivializar el sistema, afirmar y negar una proposición al mismo tiempo, a diferencia de la lógica clásica [2].

En general, sobre las **estructuras twist**, Carnielli y Coniglio (2021) [2] construiyeron **modelos de valor twist** de **ZFC**, que permite generalizar los modelos booleanos V^B para la teoría de conjuntos, donde B es una álgebra booleana completa. Los modelos booleanos fueron propuestos por Scott, Solovay, Vopenka (1967), y generalizados por Bell (2005) [1], para emplear de forma más natural el método de forzamiento de Cohen (1963).

En particular, un **modelo de valor twist** $V^{\mathcal{T}_{\mathcal{A}}}$ de la teoría de conjuntos para **LPT0**, extiende los modelos clásicos de **ZFC** (es decir, **ZF** más el Axioma de Elección), añadiendo la negación paraconsistente $\neg$. Adicionalmente, cuando se restringen al lenguaje puro de **ZF** (es decir, el lenguaje usual sin negación paraconsistente), estos modelos satisfacen todos los axiomas **ZFC**, dando lugar a la teoría de conjuntos $\mathbf{ZF_{LPT0}}$ [2]. En $\mathbf{ZF_{LPT0}}$ es posible encontrar, entre otras cosas, conjuntos paraconsistentes X, que satisfacen $\neg(X = X)$, además de $(X = X)$.

En este trabajo estudiamos algunas lógicas no clásicas y el método expuesto por Carnielli y Coniglio [2] de los modelos de valor twist, con el que se construyó $\mathbf{ZF_{LPT0}}$. Esta Propuesta plantea paradigmas sobre la identidad (ley de Leibniz) y otros conceptos, que permiten explorar nuevos terrenos, de interés matemático y filosófico.

Palabras claves: Álgebras booleanas, lógica clásica, lógica paraconsistente, modelos booleanos, modelos de valor twist, teoría de conjuntos.

Referencias

[1] Bell, J. L., Set Theory: Boolean-Valued Models and Independence Proofs, Third edition, volume 47 of the Oxford Logic Guides Series, Oxford University Press: Oxford, 2005.

[2] Carnielli W. A. and Coniglio M. E.Twist-Valued Models for Three-Valued Para-consistent Set Theory. Logic and Logical Philosophy, 30, n. 2, 187-226, 2021..ISSN 2300-9802.2021.