# Curiosidades, juegos y rarezas

# Identidades Esperanza

# Hope Identities

Marco Vinicio Vásquez Bernal

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen XIV, Número 1, pp. 75–90, ISSN 2174-0410
Recepción 14 Abr'23; Aceptación: 5 Jul'23

1 de abril de 2024

**Resumen**

Este trabajo surge de la curiosidad por buscar relaciones entre los números cuadrados perfectos, entendiendo que los mismos moldean áreas de formas cuadradas, que pueden juntarse y a la vez generar otras áreas cuadradas de mayor valor, donde los lados de esas áreas resultantes pueden o no ser valores enteros.

Así, teniendo en cuenta las condiciones de las ternas pitagóricas, donde el lado del cuadrado resultante sí tiene como magnitud un valor entero, se propuso buscar una propiedad similar al juntar más de dos cuadrados.

Con un análisis matemático muy claro se logra establecer unas identidades en función de unas variables enteras, dos de las cuales se proponen luego como independientes para plantear una relación con la tercera que se tornaría en dependiente para proponer la identidad en los números enteros.

Luego profundizando algo en estas identidades y su estructura se demuestra que las ternas pitagóricas surgen como resultados de las identidades ESPERANZA y permiten entender la construcción de esas ternas de una manera muy simple y ordenada.

También se observa cómo el manipular esas identidades arroja resultados llamativos de relaciones entre varios números cuadrados perfectos, mostrando que las características de los números guardarán siempre resultados que nos sorprenderán positivamente y generan esperanza.

Este trabajo surge de una investigación individual desarrollada y está dedicado a mi nieta Luciana Elisabeth Araujo Vásquez, quien justamente trajo esperanza en momentos difíciles y cuya luz coincidió con el encontrar estos resultados.

**Palabras Clave: Identidad, cuadrados perfectos, igualdad, suma.**

**Abstract**

This work arises from the curiosity to look for relationships between perfect square numbers, understanding that they mold square-shaped areas, which can be joined together and at the same time generate other square areas of greater value, where the sides of those resulting areas may or may not be exact values.

Thus, taking into account the results of the famous Pythagorean theorem, where the resulting square side does have an integer value as its magnitude, it was proposed to look for a similar property by joining more than two squares.

With a very clear mathematical analysis it is possible to establish identities based on integer variables, two of which are then proposed as independent to propose a relationship with the third that would become dependent to propose the identity in the whole numbers.

Then delving somewhat into these identities and their structure it is demonstrated that the Pythagorean ternas arise as results of the ESPERANZA identities and allow us to understand the construction of these ternas in a very simple and orderly way.

It is also observed how manipulating these identities yields striking results of relationships between several perfect square numbers, showing that the characteristics of the numbers will always keep results that will surprise us positively.

This work arises from an individual research developed by the author as a member of the institutional research group EUREKA 4i of the UNAE and is dedicated to my granddaughter Luciana Elisabeth ARAUJO VÁSQUEZ, who just brought hope in difficult times and whose light coincided with finding these results.

**Keywords: Identity, perfect squares, equality, sum.**

# 1. Introducción

Entender el mundo de los números siempre será un reto apasionante, ya sea por lo fuerte de sus relaciones o por lo curioso de sus comportamientos, se ha llegado a afirmar que "Podría decirse también que la numerología estudia la relación casi mágica entre los números y todo lo creado, entre los números y las circunstancias humanas, entre los números y todo lo que nos rodea", (Los Números nos hablan | Gran Hermandad Blanca )

Mas siempre el reto es desafiante por cuanto siempre habrá la posibilidad de encontrar nuevas relaciones u otras propiedades, donde lo simple o lo complejo no es sino una más de las circunstancias que generan pasión y enriquecen ese espacio.

Mas la riqueza del número es justamente su esencia conceptual abstracta y su capacidad de permitir el entendimiento de realidades de nuestra vida. En torno al número se ha reflexionado mucho, se le ha atribuido propiedades mágicas, se le ha presentado como elemento de distracción, su existencia permite entender objetivamente nuestro entorno, hay algunos que los sienten, los temen o los aman.

Pero todos respetamos su existencia, trabajos como los de (Barón, 2018) indican que los números constituyen elementos que permiten generar criticidad reflexiva y construir ciudadanía libre.

Un aspecto que reafirma su importancia es su condición de elemento generador de equidad y democracia, en vista de que están al acceso de todos, para trabajar con ellos y acceder a sus beneficios y secretos es necesario únicamente disposición y tal vez una hoja de papel y un lápiz y todos sin distinción alguna podemos introducirnos en ese mundo maravilloso donde la belleza surge de las relaciones, donde el respeto es consecuencia de valorar su existencia, donde sus diferencias permiten construir equidad, donde los secretos de sus relaciones intrínsecas nos brindan esperanza para enfrentar lo que vendrá.

Es difícil reconocer al número como elemento abstracto, la cotidianidad de su uso se ha incorporado tanto en nosotros y el normal quehacer de nuestros días, que nos es difícil reconocer su naturaleza absolutamente teórica y abstracta, simplemente porque sus propiedades responden a la realidad sistémica, están ahí, muchas veces invisibles a la vista apresurada de nuestra existencia, pero están ahí para permitirnos entender la naturaleza y los fenómenos sociales.

Tiene sentido entonces escudriñar sus entrañas, buscando esos equilibrios y esos mensajes de esperanza, obviando en primera instancia la aplicación práctica tácita de los resultados encontrados, entendiendo que esos resultados son modelos de realidades que quizá aún no hemos visto.

## 2. Los Cuadrados Perfectos

Una de las características más sobresalientes de los números, sin duda, constituye su indisoluble relación con la geometría, convirtiéndose en su voz para explicar y manifestar sus bondades. Las formas geométricas, creadas para moldear las formas de la naturaleza han podido desarrollar sus beneficios gracias a los números, estos han hecho tangible la importancia y la utilidad de los números.

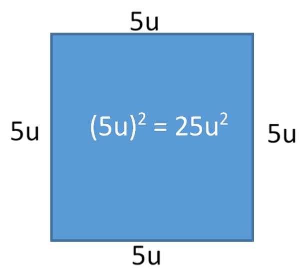


*Figura 1 Área de un cuadrado.*

Así, los números cuadrados perfectos hace esencial y tangible el concepto de área de una de las figuras fundamentales de la geometría, el cuadrado, en una relación intra matemática (Businskas, 2008). El cuadrado de un número es la concepción o el modelo del área de un cuadrado cuyo valor de lado está entendido con ese número (Figura 1).

Por tanto, estos números se asocian con lo bidimensional y la parte del espacio que estos representan, esto no siempre es debidamente reflexionado cuando se los presenta en el currículo educativo, donde simplemente se los plantea como el producto de un número por sí mismo.

Además, en un ejercicio de jerarquización no justificada se brinda importancia mayor a los cuadrados de los números naturales, estableciendo que un número es cuadrado perfecto, cuando existe otro número racional que al multiplicarse por sí mismo da como resultado ese número.

Definición aceptada pero que deja alguna duda en cuanto no explica por qué razón se excluye de esta definición a los números irracionales, misma que puede complementarse recordando que todo número real es el cuadrado de otro número real.

Dicho esto, se puede afirmar que la suma de números cuadrados perfectos constituye el modelo matemático que representa el área de varios cuadrados juntos y su diferencia representará el área que resulta luego de extraer un cuadrado de otro, obviamente más grande.

### 2.1. Teorema de Pitágoras

Un resultado que consolida lo dicho es el famoso Teorema de Pitágoras, que debe ser entendido como una relación de áreas. Algunos autores indican que el real enunciado de este teorema es "La suma de las áreas de figuras geométricas semejantes construidas sobre los catetos de cualquier triangulo rectángulo es igual al área de la figura geométrica semejante construida sobre la hipotenusa de ese triángulo", (Vásquez, 2012).

En la figura 2 se busca evidenciar este enunciado, intentando generalizar el resultado a figuras irregulares semejantes. Teniendo en cuenta que el área de cada una de esas figuras geométricas es proporcional al área del cuadrado construido sobre los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo:

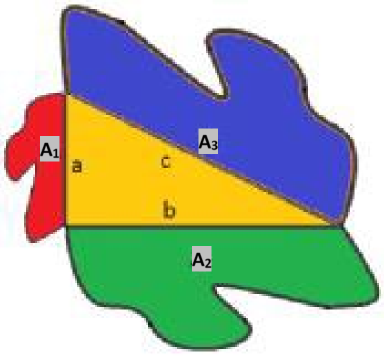


*Figura 2 Relación de áreas irregulares semejantes en función de los lados de un triángulo rectángulo.*

Es decir, teniendo a $\lambda$ como un número real distinto de cero, como las figuras geométricas levantadas sobre cada lado del triángulo rectángulo son semejantes, existe una proporcionalidad entre el área de la figura irregular levantada de cada lado y el área del cuadrado levantado en ese lado.

$A_1 = \lambda a^2$

$A_2 = \lambda b^2$

$A_3 = \lambda c^2$

$A_1 + A_2 = \lambda a^2 + \lambda b^2 = \lambda( a^2 + b^2) = \lambda c^2 = A_3$

Además, como $\lambda$ es un número real, este representa el valor cuadrado de otro número real $\Upsilon$ distinto de cero, tal que $\lambda = \Upsilon^2$.

Consecuentemente la relación presentada anteriormente puede presentarse de la forma:

$A_1 + A_2 = \Upsilon^2 a^2 + \Upsilon^2 b^2 = \Upsilon^2( a^2 + b^2) = \Upsilon^2 c^2 = (\Upsilon c)^2 = A_3$

Por tanto, el resultado del teorema de Pitágoras representa una relación de números cuadrados.

Esta relación permite construir infinitas ternas de números enteros que se sujeten a la misma, las denominadas ternas Pitagóricas.

Mas este resultado nos permite preguntar, ¿Qué pasa cuando sumamos varios números cuadrados?, ¿Es posible encontrar una relación entre números enteros que modelan la suma de áreas de figuras geométricas?

## 2.3. Relación de Cuadrados Perfectos

Buscando establecer una relación general entre los números cuadrados perfectos buscamos una identidad que sirva de base general para presentar esas relaciones en resultados concretos.

Reiteramos que lo que buscamos es encontrar números enteros que al ser sumados o restados entre sí se ajustan a ciertas igualdades, de forma general buscaremos números enteros que cumplan la siguiente condición:

$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 + e^2 + \cdots$

Donde $a, b, c, d$ $y$ $e$ (además de los posibles otros sumandos) son números enteros.

Entre las primeras interrogantes que surgen está aquella de aclarar cuántos elementos deben estar presentes en cada uno de los miembros, para ello partiremos indicando que si se desea que en uno de los miembros esté un único termino y en el otro dos, el caso respondería a una aplicación directa del teorema de Pitágoras generando infinitas alternativas tal como se describe en el documento "Generando números de Pitágoras" (Vásquez, 2015).

Buscando construir una generalización, de partida se plantea la siguiente igualdad:

$$(1)\ n^2 + (n+t)^2 = (n+s)^2 + (n+q)^2$$

Donde $n, t, s, q \in \mathbb{N}$

Para que esa igualdad sea verdadera, para todo $n$, debería cumplirse que $t = s+q$ *y* $t^2 = s^2 + q^2$, teniendo en cuenta que $s$ y $q$ deben ser distintas de $t$ ya que, si una de ellas es igual a $t$, la otra sería cero y tendríamos una identidad.

Si se intenta resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (2)\ t^2 = s^2 + q^2 \\ (3)\ t = s + q \end{cases}$$

Si elevamos la segunda ecuación al cuadrado se tiene

$$(4)\ t^2 = s^2 + 2sq + q^2$$

Igualando (2) con (4) se establece que las únicas soluciones posibles se tendrán cuando s y/o q son igual a cero, es decir no existe otra solución que no sea la identidad.

Por lo tanto, buscando más soluciones se propone

$$(5)\quad n^2 + (n+t)^2 = (n+s)^2 + (n+q)^2 + u^2$$

Donde $u^2 = t^2 - s^2 - q^2$ y $2nt = 2ns + 2qn$

Teniendo en cuenta que $n$, $s$, $t$, $q$ y $u$ y que han de ser naturales.

Es decir, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (6)\ u^2 = t^2 - s^2 - q^2 \\ (7)\qquad t = s + q \end{cases}$$

De donde se tiene que $u^2 = 2sq$

Pero como de (7) se tiene que $q = t - s$

La ecuación (5) puede escribirse como

$$(8)\quad n^2 + (n+t)^2 = (n+s)^2 + (n+t-s)^2 + 2s(t-s)$$

Teniendo en cuenta que $u^2 = 2s(t-s)$

Recordando siempre que $u$, $t$ y s son números naturales.

Por tanto (9) $t - s = r^2(2s)$ , con r número natural.

De tal forma que el último término de la igualdad sea un cuadrado perfecto, como se requiere.

$$(10)\ s = \frac{t}{1+2r^2}\ y \quad u = 2sr$$

Con lo que la expresión (8) puede expresarse como:

$$(11)\quad n^2 + (n + s(1+2r^2))^2 = (n+s)^2 + (n+2sr^2)^2 + (2rs)^2$$

Relación a la que definiremos como identidades ESPERANZA

# 3. Identidades ESPERANZA

Con base en lo anotado anteriormente se afirma que las IDENTIDADES ESPERANZA son igualdades matemáticas de la forma:

$$n^2 + (n+t)^2 = (n+s)^2 + (n+t-s)^2 + (u)^2$$

Que es una identidad con $n$, $s$, $t$ números enteros con las siguientes condiciones:

- r es una variable independiente que, si bien no se muestra en la identidad, sirve para determinar las que sí se muestran.
- s es una variable entera independiente.
- u es una variable dependiente, en función de r y s, u=2rs.
- t es una variable entera dependiente, en función de r y s, t = $s(1+2r^2)$.
- n es una variable entera.

Estos resultados complementan los propuestos por (Dickson, 1920), presentando un proceso que los generaliza, razón que justifica el hecho de plantear que se denominen identidades.

Entonces es posible encontrar esos números partiendo de valores de r y s, así si r = 1, s puede ser 1, 2, 3, 4,... o cualquier entero positivo, t será 3, 6, 9, 12, … un múltiplo de 3 respectivamente y u = 2sr = 2s ya que r es 1.

Pudiendo construir la siguiente tabla:

*Tabla 1. Cálculo de valores de t y r en función de los valores de r y s.*

| **Valor de r, a seleccionar.** | **Valores de s, a seleccionar.** | **Posibles valores de t, a determinar** **t = s$(1+2r^2)$.** | **Valor de u, a determinar** **u = 2sr.** | **Observación** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1, 2, 3, 4, … | 3, 6, 9, 12, …. | 2, 4, 6, 8, … | Los valores de t serán múltiplos de 3. |
| 2 | 1, 2, 3, 4, … | 9, 18, 27, 36, …. | 4, 8, 12, 16, … | Los valores de t serán múltiplos de 9. |
| 3 | 1, 2, 3, 4, … | 19, 38, 57, 76, …. | 6, 12, 18, 24, … | Los valores de t serán múltiplos de 19. |
| 4 | 1, 2, 3, 4, … | 33, 66, 99, 132, … | 8, 16, 24, 32, … | Los valores de t serán múltiplos de 33. |
| … | … | … | … | … |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| r | 1, 2, 3, 4, … | $1 + 2r^2$,$2(1 + 2r^2), 3(1 + 2r^2)$, $4(1 + 2r^2)$, … | 2r, 4r, 6r, 8r, … | Los valores de t serán múltiplos de $(1 + 2r^2)$. |

Así se obtienen identidades de la siguiente forma:

$$(8) \quad n^2 + (n + t)^2 = (n + s)^2 + (n + t - s)^2 + 2s(t - s)$$

Y teniendo en cuenta que

Si r = 1, s = 1

$$n^2 + (n + 3)^2 = (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + 2^2$$

Si r = 1, s=3

$$n^2 + (n + 9)^2 = (n + 3)^2 + (n + 6)^2 + 6^2$$

Si r = 3, s=3

$$n^2 + (n + 57)^2 = (n + 3)^2 + (n + 54)^2 + 18^2$$

## 3.1. Ternas Pitagóricas

Varias son las formas que se han presentado para generar las ternas Pitagóricas, partiendo siempre de valores y planteando procesos que permiten encontrar tres números enteros a, b y c que satisface la siguiente igualdad:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

En el trabajo Generando números de Pitágoras (Vásquez, 2016) se presenta un proceso detallado de cómo encontrar estas ternas, sin embargo, si se parte de la forma general de las identidades ESPERANZA se desarrolla el siguiente análisis.

La forma general de una identidad ESPERANZA es

$n^2 + (n + s(1 + 2r^2))^2 = (n + s)^2 + (n + 2sr^2)^2 + (2rs)^2$

Sin embargo, como n es un valor variable puede asumir cualquier valor entero, se fija para n el valor de 2rs y la forma general de la identidad ESPERANZA genera el siguiente resultado

$$(2rs)^2 + (2rs + s(1 + 2r^2))^2 = (2rs + s)^2 + (2rs + 2sr^2)^2 + (2rs)^2$$

Donde en primer lugar el primer término y el último se eliminan por ser iguales y estar presente en los dos miembros, con lo que se tendría

$$(2rs + s + 2r^2s)^2 = (2rs + s)^2 + (2rs + 2sr^2)^2$$

Se observa que s es factor común en todos los términos, de forma que, si se extrae y ordena, se tendría

$$(s(2r^2 + 2r + 1))^2 = (s(2r + 1))^2 + (s(2r + 2r^2))^2$$

Donde se tiene ya una estructura de terna pitagórica con las siguientes equivalencias

$$a = s(2r + 1)$$

$$b = s(2r + 2r^2)$$

$$c = s(2r^2 + 2r + 1)$$

Sabemos que $a$, $b$ y $c$ son números enteros puesto que $r$ y $s$ lo son.

Ahora s es un número que multiplica a las tres expresiones, por tanto, cumple el rol de multiplicador, si se 3fija en 1, se tendrá que

$$a = (2r + 1)$$
$$b = (2r + 2r^2) = 2r(r + 1)$$
$$c = (2r^2 + 2r + 1)$$

Lo que determinaría las siguientes ternas pitagóricas

*Tabla 2. Tabla para determinar ternas pitagóricas (a,b,c) en función de r.*

| r | a | b | c |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 5 | 12 | 13 |
| 3 | 7 | 24 | 25 |
| 4 | 9 | 40 | 41 |
| 5 | 11 | 60 | 61 |
| … | … | … | … |
| n | (2n+1) | $4\sum_1^n i$ | $4\sum_1^n i$ +1 |

Resultados que serán las ternas pitagóricas que podrían caracterizarse por que a es un número impar y la diferencia entre b y c es 1.

Sin embargo, recordando que habíamos establecido que *r* sea un número natural, es posible generalizarlo para números fraccionarios, si planteamos que r tome valor de ½, el proceso sería: a = 2, b = 3/2, c=5/2

Por tanto, se tendrá:

$$(2)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Que puede aceptarse como una relación pitagórica con números fraccionarios, además si se multiplica cada termino por 4 se tiene la expresión conocida

$$4^2 + 3^2 = 5^2$$

Sin embargo, si r es 3/2

Se tendrá: a = 4, b = 15/2 y c=17/23

Entonces

$$(4)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2$$

Expresión que si se multiplica cada término por 4, dará la expresión

$$(8)^2 + (15)^2 = (17)^2$$

Y así se pueden generar las siguientes ternas

*Tabla 3. Tabla para determinar ternas pitagóricas (a, b, c) en función de r, con r fraccionario.*

| r | a | b | C |
|---|---|---|---|
| 3/2 | 8 | 15 | 17 |
| 5/2 | 12 | 35 | 37 |
| 7/2 | 16 | 63 | 65 |
| 9/2 | 20 | 99 | 101 |
| 11/2 | 24 | 143 | 145 |
| … | … | … | … |
| (n+1)/2 | 2(n+2) | $(n+2)^2-1$ | $(n+2)^2+1$ |

Que constituye otro grupo de ternas pitagóricas, donde *a* es múltiplo de 4 y la diferencia entre *b* y *c* es 2.

Está claro entonces que con procedimientos similares es posible encontrar otros conjuntos de ternas pitagóricas, todas ellas partiendo de identidades ESPERANZA.

Además, estas ternas pueden considerarse básicas ($s$ = 1) ya que cada una de ellas puede generar infinitas ternas más simplemente multiplicando con distintos valores de $s$.

Este resultado presenta de por sí un proceso para generar ternas pitagóricas muy simple y ordenado y evidencia que las ternas pitagóricas constituyen resultados específicos de las identidades ESPERANZA.

## 3.2. Análisis de las Identidades de ESPERANZA

### 3.2.1. Cardinalidad

Está claro que existen infinitas identidades ESPERANZA, puesto que a $r$ se le puede asignar cualquier valor entero positivo y dependiendo de este es posible seleccionar un valor de t que determinarán los valores de s y u.

### 3.2.2. Estructura

Las identidades ESPERANZA contienen en sus dos miembros números cuadrados perfectos, con las siguientes condiciones:

En el primer miembro se tendrá la suma de dos cuadrados perfectos que dependen de una variable $n^2$ y $(n + t)^2$.

En el segundo miembro se tiene tres cuadrados perfectos, dos que dependen de la misma variable que se tiene en el primero $(n + s)^2$ y $(n + t - s)^2$ y un tercer término independiente de esa variable $2s(t-s)$ o $u^2$

### 3.2.3. Explicación Geométrica

Teniendo en cuenta lo propuesto en el teorema de Pitágoras, se puede decir que el primer término de una identidad ESPERANZA representa el área de un cuadrado cuya área equivale a la suma de las áreas de dos cuadrados de lados $n$ y $(n+t)$, En el segundo miembro representa el área de un cuadrado que resulta de sumar las áreas de tres cuadrados, de lados $(n+s)$, $(n+t-s)$ y la raíz de $2s(t-s)$, teniendo en cuenta que $2s(t-s)$ debe ser un número entero.

Así para la identidad

$$n^2 + (n + s(1 + 2r^2))^2 = (n + s)^2 + (n + 2sr^2)^2 + (2sr)^2$$

Se ha desarrollado la construcción en GeoGebra, "ESPERANZA - GeoGebra" que evidencia su certeza para valores no muy grandes de s, r y n.

Así, para r=2 y s=5, se tiene:

$$n^2 + (n + 45)^2 = (n + 5)^2 + (n + 40)^2 + (20)^2$$

Donde n puede tomar valores enteros.

Los dos cuadrados azules corresponden a los términos del primer miembro y los tres cuadrados verdes corresponden a los términos del segundo miembro (Figura 3).


*Figura 3. Áreas de los cuadrados que están en los dos miembros de la identidad.*

Con el procedimiento pitagórico juntamos los dos cuadrados del primer miembro y también dos de los cuadrados del segundo (Figura 4).

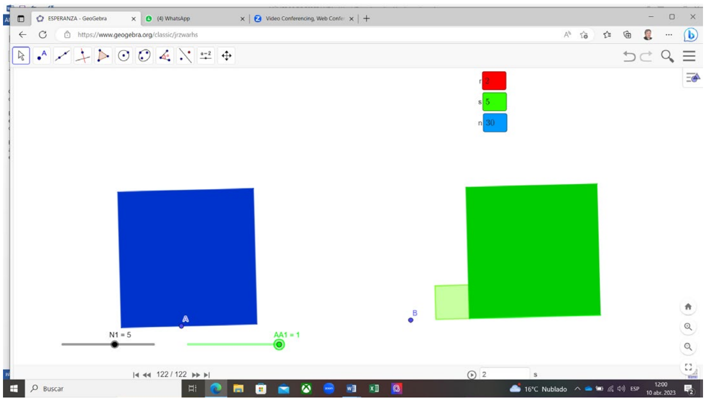

*Figura 4. Resultado de unir las dos áreas del primer miembro y dos de las tres áreas del segundo miembro.*

Luego con ese procedimiento juntamos el cuadrado resultante del segundo miembro con el tercer cuadrado de ese miembro (Figura 5).

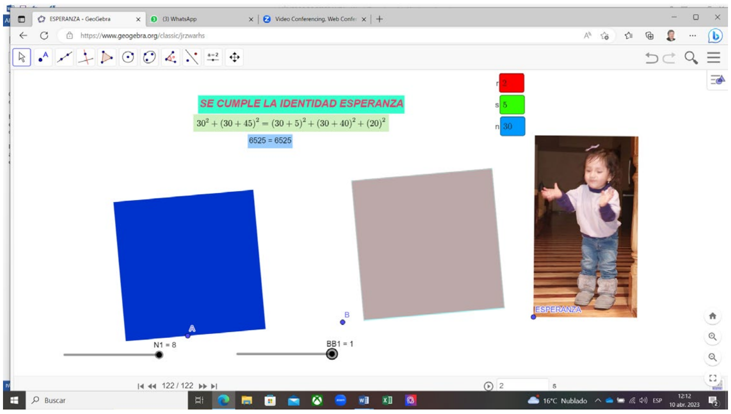


*Figura 5. Resultados de juntar las áreas de los dos miembros de la identidad.*

Se demuestra que el cuadrado que se forma en el segundo miembro es igual al que se formó en el primer miembro, con lo que la identidad queda comprobada.

En la construcción de GeoGebra es posible, variar los valores de r y s con valores no muy grandes y se evidencia que las identidades se cumplen.

# 4. Resultados de Identidades Esperanza

## 4.1. Caso r, s enteros negativos

La identidad Esperanza es válida también para parámetros *r*, s enteros negativos.

Veamos el ejemplo con r = -2 y s = -1.

La identidad ESPERANZA construida para estos valores será

$$n^2 + (n-9)^2 = (n-1)^2 + (n-8)^2 + (4)^2$$

Que genera resultados como los siguientes

Para n=6

$$(6)^2 + (-3)^2 = (5)^2 + (-2)^2 + (4)^2$$

Que es igual a

$$(6)^2 + (3)^2 = (5)^2 + (2)^2 + (4)^2$$

Está claro que si *s* es negativo esto causará que dentro de cada término resulten diferencias en lugar de sumas.

En cambio, si *r* es negativo, esto cambiará el signo únicamente del último término y como este luego se eleva al cuadrado, el resultado final no se ve afectado.

**4.2. Caso s = 0**

Si s=0 entonces t=0 y simplemente se tendrá

$$n^2 + n^2 = (n)^2 + (n)^2 + (0)^2$$

**4.3. Caso r = 0**

Si r=0 entonces t=s y simplemente se tendrá

$$n^2 + (n+s)^2 = (n)^2 + (n+s)^2 + (0)^2$$

Identidad evidente

**4.4. Identidades que surgen de las Identidades ESPERANZA**

Características de las identidades ESPERANZA permiten construir otras igual de interesantes como veremos a continuación.

Así, manteniendo fijo el valor de r =1, y s=1, se puede construir otra identidad con el siguiente procedimiento:

Se parte de que $(i)\ n^2 + (n+3)^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 + (2)^2$ y como esto es verdad para todo n, se toma un n´= n+3

Entonces se tendrá que $(n')^2 + (n'+3)^2 = (n'+1)^2 + (n'+2)^2 + (2)^2$

Que remplazando será $(n+3)^2 + (n+6)^2 = (n+4)^2 + (n+5)^2 + (2)^2$

De donde es posible despejar $(n+3)^2$

Por lo tanto $(n+3)^2 = (n+4)^2 + (n+5)^2 + (2)^2 - (n+6)^2$

Que remplazando en la identidad inicial dará como resultado

$$n^2 + (n+4)^2 + (n+5)^2 + (2)^2 - (n+6)^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 + (2)^2$$

Que al simplificarse dará el resultado

$$n^2 + (n+4)^2 + (n+5)^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+6)^2$$

Que es una nueva identidad donde todos sus términos están en función de la variable n.

De esta identidad derivan los siguientes resultados:

$$1^2 + 5^2 + 6^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2$$

$$2^2 + 6^2 + 7^2 = 3^2 + 4^2 + 8^2$$

$$3^2 + 7^2 + 8^2 = 4^2 + 5^2 + 9^2$$

$$4^2 + 8^2 + 9^2 = 5^2 + 6^2 + 10^2$$

Y así sucesivamente.

Estos resultados resultan interesantes y a su vez podrían generar otros si los combinamos entre sí, por ejemplo, combinando el primero con el cuarto se tendría:

$$4^2 + 8^2 + 9^2 + \ 1^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2 + 10^2$$

También es posible combinar entre identidades que hayan surgido de valores distintos de r y s,

Por ejemplo, como ya hemos visto si r=1 y s=1, la identidad es

$$i)\quad n^2 + (n+3)^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 + (2)^2$$

Y si r=1 y s=2, la identidad es

$$ii)\quad n^2 + (n+6)^2 = (n+2)^2 + (n+4)^2 + (4)^2$$

Si a la primera multiplicamos cada término por 4, se tendrá

$$(2n)^2 + (2(n+3))^2 = (2(n+1))^2 + (2(n+2))^2 + (4)^2$$

El término $(4)^2$ se repite en ambas, por tanto, es posible plantear la identidad

$$iii)\quad n^2 + (n+6)^2 - (n+2)^2 - (n+4)^2 = (2n)^2 + (2(n+3))^2 - (2(n+1))^2 - (2(n+2))^2$$

O su equivalente

$$iii)\quad n^2 + (n+6)^2 + (2(n+1))^2 + (2(n+2))^2 = (n+2)^2 + (n+4)^2 + (2n)^2 + (2(n+3))^2$$

De donde se tendrían resultados como los siguientes

$$(1)^2 + (7)^2 + (4)^2 + (6)^2 = (3)^2 + (5)^2 + (2)^2 + (8)^2$$

$(2)^2 + 2(8)^2 = 2(4)^2 + (10)^2$ que se reduca a $(1)^2 + 2(4)^2 = 2(2)^2 + (5)^2$

$$(3)^2 + (9)^2 + (8)^2 + (10)^2 = (5)^2 + (7)^2 + (6)^2 + (12)^2$$

$(4)^2 + 2(10)^2 + (12)^2 = (6)^2 + 2(8)^2 + (14)^2$ que se reduce a

$$(2)^2 + 2(5)^2 + (6)^2 = (3)^2 + 2(4)^2 + (7)^2$$

Y así sucesivamente.

**4.5. Caso r Número Real**

Puesto que el valor que realmente interviene en los términos de las identidades es el cuadrado de r, es posible entonces construir identidades ESPERANZA siendo *r* la raíz cuadrada de cualquier número, así si r es la raíz de 2 y s es 1, la identidad que surge sería:

$$iv)\quad n^2 + (n+5)^2 = (n+1)^2 + (n+4)^2 + 8$$

Identidad donde uno de sus términos no es un cuadrado perfecto, sin embargo, si combinamos con otra similar, por ejemplo, para n´= n+2, se tendrá

$$(n+2)^2 + (n+7)^2 = (n+3)^2 + (n+6)^2 + 8$$

En vista de que las dos contienen el mismo término independiente, es posible igualarlas para construir la siguiente identidad

$$n^2 + (n+5)^2 + (n+3)^2 + (n+6)^2 = (n+1)^2 + (n+4)^2 + (n+2)^2 + (n+7)^2$$

Identidad donde todos sus términos son cuadrados perfectos, de la que se obtienen los siguientes resultados

$$(5)^2 + (3)^2 + (6)^2 = (1)^2 + (4)^2 + (2)^2 + (7)^2$$

$$(1)^2 + (6)^2 + (4)^2 + (7)^2 = (2)^2 + (5)^2 + (3)^2 + (8)^2$$

$$(2)^2 + (7)^2 + (5)^2 + (8)^2 = (3)^2 + (6)^2 + (4)^2 + (9)^2$$

Y así sucesivamente.

Queda claro entonces que este proceso permite construir identidades ESPERANZA siendo r la raíz cuadrada de cualquier número.

### 4.6. Caso n Negativo

Las identidades presentadas son también válidas cuando n es un entero negativo, así por ejemplo si se parte de identidad iii)

$$iii) \quad n^2 + (n+6)^2 + (2(n+1))^2 + (2(n+2))^2 = (n+2)^2 + (n+4)^2 + (2n)^2 + (2(n+3))^2$$

Y se asigna a n el valor de -3 el resultado será

$$(-3)^2 + (-3+6)^2 + (2(-3+1))^2 + (2(-3+2))^2 99$$
$$= (-3+2)^2 + (-3+4)^2 + (2(-3))^2 + (2(-3+3))^2$$

Que es igual a

$$(3)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (2)^2 = (1)^2 + (1)^2 + (6)^2 + (0)^2$$

Y se reduce a:

$$2(3)^2 + (4)^2 + (2)^2 = 2(1)^2 + (6)^2$$

### 4.6. Caso s Número Real

Es posible construir la estructura de las identidades ESPERANZA siendo s un número real, sin embargo, la identidad resultante se establecerá para valores reales, es decir no para cuadrados perfectos, por tanto, no constituirán identidades ESPERANZA.

Sin embargo, de lo indicado propongamos una estructura similar a las identidades ESPERANZA para s = $\pi$ y r =1.

$$n^2 + (n+3\pi))^2 = (n+\pi)^2 + (n+2\pi)^2 + (2\pi)^2$$

Ahora si se hace un ejercicio similar para s = $\pi$ y r =$\sqrt{2}$

La identidad resultante es

$$n^2 + (n+5\pi)^2 = (n+\pi)^2 + (n+4\pi)^2 + 8\pi^2$$

Identidades que sin duda resultan interesantes y pueden servir para construir otras.

## 5. Conclusiones

Es evidente entonces que se pueden construir infinitas identidades ESPERANZA partiendo de valores para r y s, que pueden ser positivos negativos o cero.

Las identidades ESPERANZA funcionan para n, entero positivo, negativo o cero.

Sr r es la raíz cuadrada de cualquier número entero, es posible construir identidades ESPERANZA combinando identidades que surjan de los mismos valores de s y r.

Las ternas pitagóricas son resultados puntuales de las identidades ESPERANZA.

Las identidades ESPERANZA permiten construir igualdades que parten no únicamente de valores enteros, se evidencia que partiendo de números irracionales es posible construir igualdades que al relacionarlas entre si derivan en identidades ESPERANZA.

Además, si se parte de valores reales, con el procedimiento presentado es posible construir identidades que si bien no se sujetan a números enteros, cumplen el principio de identidad.

# Referencias

[1] BUSINSKAS, Aldona Monica. *Conversations About Connections: how secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*, Mathematics Magazine, pp. 183 -190, Canadá, 1964.

[2] BARÓN VARGAS, Sonia Edelmira. *Escenarios de Aprendizaje en la Educación Matemática Crítica, Una Revisión Documental*, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, pp. 51-54, Colombia, 2018.

[3] DICKSON, Leonard Eugene. *History of the theory of numbers*, Vol 2, pp. 272-286, Estados Unidos, 2020.

[4] VÁSQUEZ, Marco Vinicio. *Una ampliación al teorema de Pitágoras. Revista De Educación Matemática*, Vol. 27 N°3, p. 3 – 22, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, 2012.

[5] VÁSQUEZ, Marco Vinicio. *Generando números de Pitágoras, MASKANA,* Vol. 7, No. 1, p. 61 – 70, Universidad de Cuenca, 2016.

[6] GARCET, Marianel, *Los Números nos hablan,* https://hermandadblanca.org/los-numeros-nos-hablan/

**Autor:**
*Nombre:* Marco Vinicio Vásquez Bernal
*Correo Electrónico:* marco.vasquez@unae.edu.ec
*Institución:* Universidad Nacional de Educación, UNAE, Ecuador.