

# Juegos y rarezas matemáticas

## Celebración del Día de Pi 2022 en la UPM

## Celebration of Pi Day 2022 at the UPM

Pedro M. G. Manchón, Ernesto Nungesser, Andrea Tellini

Revista de Investigación



Volumen XIV, Número 1, pp. 61–74, ISSN 2174-0410  
Recepción: 10 May'23; Aceptación: 25 Jun'23

1 de abril de 2024

### Resumen

Desde 2018 la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) tiene una cita anual con el Día de Pi, que se celebra los días 14 de marzo (3/14 en el calendario de los países anglosajones). En este artículo repasamos los dos problemas y algunas cuestiones del concurso *Quiz* propuestos a todos los alumnos de la UPM en la edición de 2022.

**Palabras Clave:** Día de Pi, Universidad Politécnica de Madrid, Problemas.

### Abstract

Since 2018 the *Universidad Politécnica de Madrid* (UPM) has an annual appointment with Pi Day, which is celebrated on March 14 (3/14 in the calendar of Anglo-Saxon countries). In this article, we review the two problems and some questions of the *Quiz* contest proposed to all UPM students in the 2022 edition.

**Keywords:** Pi Day, Polytechnic University of Madrid, Problems .

## 1. Introducción

En 2019 la UNESCO proclamó el 14 de marzo como Día Internacional de las Matemáticas. Se eligió este día porque, en el calendario de los países anglosajones, esta fecha se indica como 3/14, lo que vienen a ser los primeros dígitos del omnipresente número  $\pi$ . De hecho, ya con anterioridad a 2019, los matemáticos celebraban esta fecha como el “Día de Pi”.

En concreto, la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) tiene una cita anual con el Día de Pi desde 2018. La idea surgió en el Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial, en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial (ETSIDI), y con los años se ha ido extendiendo, tanto en términos de organización como en su relevancia, al resto de Escuelas de la UPM. Además, cabe resaltar que en el curso académico 2021/22 echó a andar

el recién estrenado Grado en Matemáticas en la UPM, así que en el año 2022 había más razones que nunca para celebrar el Día Internacional de las Matemáticas (“Día de Pi”) en la UPM.

En la edición 2022, que es justo la tratada en este artículo, se realizaron dos concursos bien diferenciados. En el primero de ellos los alumnos participantes contaron con algo más de una semana para presentar sus soluciones (totales o parciales) a dos problemas propuestos por los organizadores. Unos días más tarde, y coincidiendo con el Día de Pi, tuvimos una celebración que empezó con la preciosa conferencia sobre teoría de nudos de título “Y tú, ¿cómo te atas los cordones?”, impartida por la profesora de la Universidad de Sevilla, Marithania Silvero Casanova, premio de investigación matemática Vicent Caselles 2019. A la conferencia le siguió un concurso Quiz en línea para mentes ágiles e inquietas con un total de 13 cuestiones; cada cuestión debía responderse en pocos segundos.

Puede consultarse la información de otras ediciones, el listado de ganadores y los carteles originales de cada edición, en la siguiente página web: <http://dmaii.etsii.upm.es/web/dia-de-pi/>

En este artículo discutimos, en la Sección 2, el primero de los problemas propuestos, que trata las funciones beta y gamma. En la Sección 3 visitamos el reino de los nudos y la topología de superficies, revisando una construcción debida a Turaev [2]. Finalmente, la Sección 4 repasa algunas cuestiones del Quiz propuestas a los alumnos.

**DÍA INTERNACIONAL DE LAS MATEMÁTICAS**

**DÍA DE** **3/14/2022**

**CONCURSO DE PROBLEMAS**  
Podrás ganar una magnífica tablet  
Entrega de soluciones **antes del 7 de marzo** a las 14:03 horas

**PI**

Y el **lunes 14 de marzo** a las 16:30 horas...  
**CELEBRACIÓN online en ZOOM**

Programa:

**Y TÚ, ¿CÓMO TE ATAS LOS CORDONES?**  
Conferencia impartida por Marithania Silvero Casanova  
(Universidad de Sevilla)

**CONCURSO QUIZZ**  
para mentes ágiles e inquietas,  
con el que podrás ganar un fabuloso altavoz

Problemas, bases del concurso, registro, enlace a ZOOM  
y toda la información escaneando el QR

Organizan:  
Carmen García-Miguel, Pedro M. G. Manchón,  
Andrea Tellini (ETSII-DI-UPM) y Ernesto Nungesser (ETSIN-UPM)

Ingeniería Industrial

Cartel: Ibai Astier

Cartel del Día de Pi 2022 en la UPM, diseñado por Ibai Astier.

## 2. Las funciones beta y gamma

¡El número  $\pi$  aparece con tantas caras diferentes! Aquí lo vamos a descubrir en medio de imponentes integrales. Definamos en primer lugar la función  $F(x, y)$ , para  $x > 0, y > 0$ , como sigue:

$$F(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

1. Demuestra que

$$F(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta. \tag{1}$$

A continuación definimos una nueva función  $f(x)$ , para  $x > 0$ , como sigue:

$$f(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

2. Demuestra la relación

$$f(x)f(y) = f(x+y)F(x, y). \tag{2}$$

3. Calcula  $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  y después utiliza la relación (2) para demostrar que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Este fue el primer problema propuesto. Detallamos ahora una solución:

1. Basta hacer la transformación  $t = \sin^2 \theta$ . Entonces  $dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$  y si  $t$  varía de 0 a 1, tenemos que  $\theta$  varía de 0 a  $\frac{\pi}{2}$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta)^{x-1} (1 - \sin^2 \theta)^{y-1} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Utilizando la igualdad  $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta)^{x-1} (\cos^2 \theta)^{y-1} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2x-2} (\cos \theta)^{2y-2} \sin \theta \cos \theta d\theta, \end{aligned}$$

lo que finalmente nos lleva al resultado deseado absorbiendo  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$  en las expresiones con los exponentes  $2x - 2$  y  $2y - 2$  respectivamente.

2. Este ejercicio es más difícil. Para mostrar (2) vemos primero que

$$f(x)f(y) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \int_0^\infty s^{y-1}e^{-s}ds = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}s^{y-1}e^{-s}dt ds.$$

El cuadrante  $t > 0, s > 0$ , puede describirse como la unión de los segmentos con extremos  $(u, 0)$  y  $(0, u)$ :

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + (1-v) \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, \quad u > 0, \quad 0 < v < 1,$$

lo que nos lleva al cambio de variables  $t = uv, s = u(1-v)$  con  $u > 0, 0 < v < 1$ , siendo el Jacobiano de la transformación

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix} \right| = -uv - u + uv = -u.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}s^{y-1}e^{-s}dt ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 (uv)^{x-1}e^{-uv}[u(1-v)]^{y-1}e^{-u(1-v)}u dv du, \\ &= \int_0^\infty u^{x+y-1}e^{-u}du \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}dv \\ &= f(x+y)F(x,y). \end{aligned}$$

3. En el último ejercicio se puede usar la expresión (2) que relaciona  $f$  y  $F$ , es decir

$$f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1)F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

Utilizando la expresión de  $F$  dada por la ecuación (1), tenemos que

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi.$$

Por otra parte,

$$f(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1.$$

Nótese que  $f$  es una integral con integrando no negativo, así que  $f \geq 0$ . Esto, junto con (3) y el resultado  $f(1) = 1$ , nos permite deducir que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Hay un modo alternativo de obtener este resultado, partiendo directamente de la definición de  $f$  y considerando la transformación  $t = u^2$ :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^\infty u^{-1} e^{-u^2} 2u du = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du,$$

la última igualdad por ser el integrando una función par. Ahora la clave consiste en considerar el cuadrado de la última integral y pasar a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \pi. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos el resultado de antes dado que  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  es positivo.

La mayoría de las respuestas recibidas a este problema reconocían en  $F(x, y)$  a la función beta, y en  $f(x)$  a la función gamma. También muchas respuestas reconocen que la integral  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  coincide con

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du,$$

que es la conocida integral de Gauss. Un integrando algo más general, a saber

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

es la función de densidad de la llamada distribución de Gauss o distribución normal (con media  $a$  y varianza  $\sigma^2$ ). Dicha distribución aparece con mucha frecuencia en estadística; por ejemplo, describe la distribución de la altura en las personas, la distribución de las notas en un examen, etc. La gráfica de  $G(x)$  es muy característica, y se la conoce como campana de Gauss.

La función beta, que suele denotarse por  $B(x, y)$ , está definida de hecho para números complejos  $x$  e  $y$  con parte real positiva.  $B$  es la letra mayúscula beta del alfabeto griego. En el problema resuelto se ha visto la relación que tiene con la función gamma, que se denota por  $\Gamma(x)$ , que también se puede definir para números complejos con parte real positiva. Partiendo de la definición dada aquí, no es difícil demostrar que, para números enteros positivos, hay una relación directa muy conocida también con el factorial, a saber, que para  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que

$$\int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt = (n-1)!$$

La demostración se puede hacer, por ejemplo, por inducción.

Por último, y ya que estamos celebrando el Día de  $\pi$ , debemos mencionar que existe la llamada función pi, escrita  $\Pi$ , definida como

$$\Pi(z) = \Gamma(z + 1),$$

que, para números enteros positivos  $n$ , coincide con el factorial de  $n$ , es decir,

$$\Pi(n) = n!$$

### 3. Ponga un poco de topología en su vida

Puede imaginar un nudo matemático *anudando* un cordón de los zapatos y pegando después sus extremos entre sí. Un nudo puede representarse mediante diagramas planos, pudiendo apreciar dos de estos diagramas en la Figura 1.

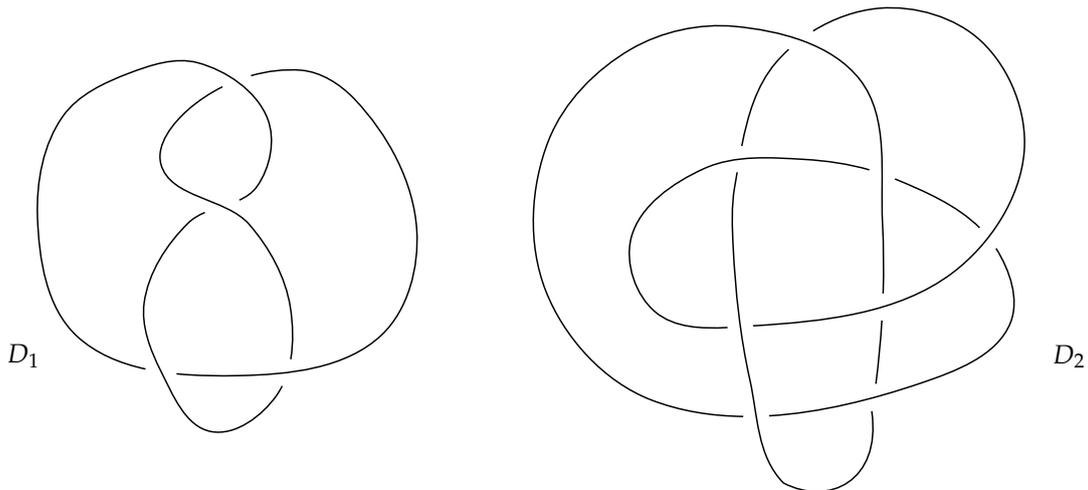


Figura 1. Diagramas de nudos  $D_1$  y  $D_2$

A partir de un diagrama  $D$  de un nudo podemos construir una superficie  $S(D)$  de la siguiente manera: por cada cruce en el diagrama colocamos un pequeño cuadrado, y por cada arista del diagrama añadimos un rectángulo conectando los cuadrados que corresponden a los cruces extremos de la arista, como se muestra en la Figura 2.

Es importante tener en cuenta que hemos *twistado* el rectángulo cuando éste se corresponde con una arista no alternante (una arista no alternante es aquella que pasa las dos veces por encima de sus cruces, o las dos veces por debajo). Y es importante observar hacia qué lado hemos realizamos el *twist*. En la Figura 3 se puede ver un diagrama (con aristas alternantes y no alternantes) y la superficie correspondiente.

Ahora llega el momento de plantear varias cuestiones. En primer lugar quisimos saber si las clases de dibujo artístico que todos recibimos merecen la pena:

1. Dibuje las superficies  $S(D_1)$  y  $S(D_2)$  correspondientes a los diagramas de la Figura 1.

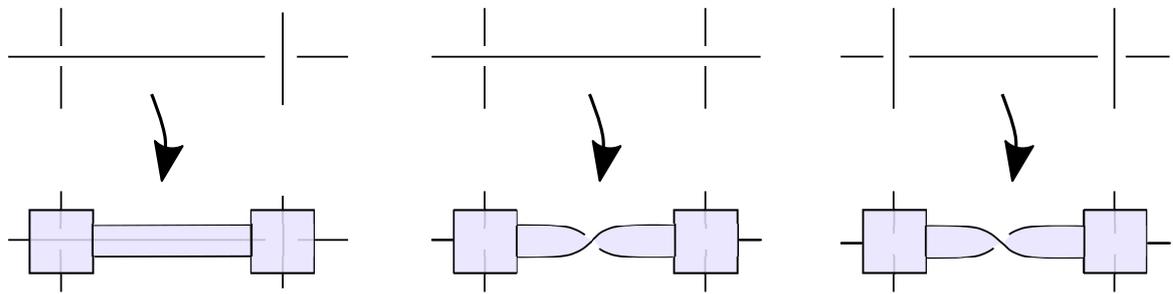


Figura 2. Trozos de superficie correspondientes a aristas alternantes (izquierda) y no alternantes (central y derecha)

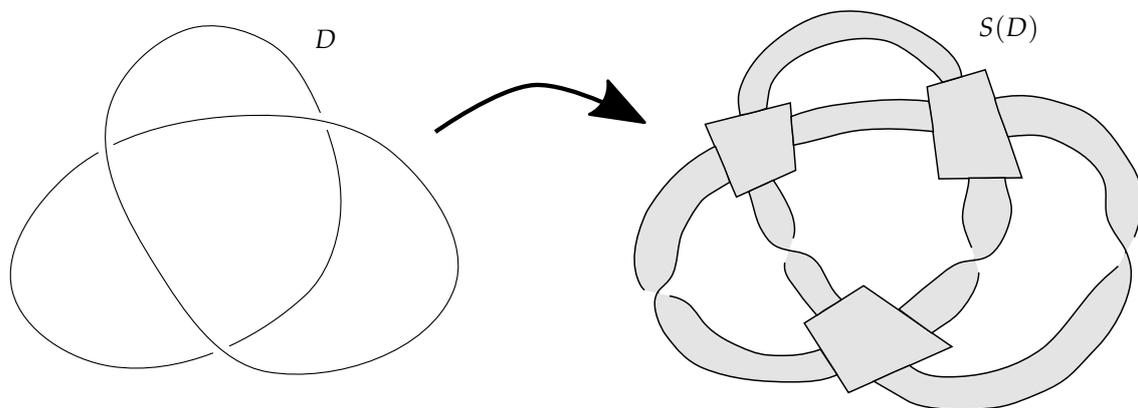


Figura 3. Un diagrama  $D$  (con seis aristas) y la superficie correspondiente  $S(D)$

2. Compruebe que dichas superficies son orientables, es decir, cada una de ellas tiene dos lados (digamos un anverso y un reverso). Para ello se puede colorear cada lado con un color diferente (si por un momento piensa que cualquier superficie es orientable, consulte en Wikipedia la famosa banda de Moebius).

Ahora trataremos las superficies  $S(D)$  en general. A ver qué tal se nos da:

3. Demuestre que, no importa cómo sea el diagrama  $D$  de partida, la superficie  $S(D)$  es siempre orientable.
4. La frontera de la superficie  $S(D)$  la forman  $N$  curvas cerradas simples (por ejemplo,  $N = 3$  para la superficie  $S(D)$  de la Figura 3). ¿Qué relación hay entre este número  $N$  y el número  $c$  de cruces del diagrama  $D$ , cuando el diagrama  $D$  es alternante? Que el diagrama del nudo sea alternante significa que todas sus aristas son alternantes; con otras palabras, el diagrama puede recorrerse alternando el paso por encima/por debajo.

Este fue el segundo problema propuesto. Detallamos a continuación una solución:

- 1, 2. Aquí lo importante es recordar que sólo las bandas que corresponden a aristas no alternantes deben *twistarse*, y el twist debe hacerse del modo adecuado. Para demostrar que dichas superficies son orientables basta ver que tienen dos lados, que pintamos con diferentes colores en la Figura 4 (en el primer dibujo el lado azul queda todo por atrás).

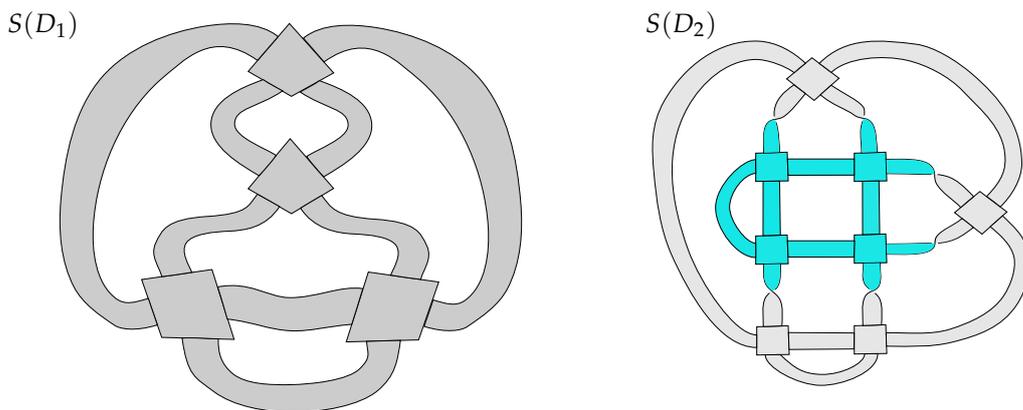


Figura 4. Superficies  $S(D)$  para los diagramas  $D_1$  y  $D_2$  de la Figura 1

3. Se trata de ver que cada ciclo de bandas (es decir, una colección cuadrado-banda-cuadrado-banda-etcétera consecutivos que empieza y termina en el mismo cuadrado) recorre exactamente un número par de aristas twistadas, de manera que no aparece una banda de Moebius. En efecto, si recorremos  $S(D)$  regresando al punto de partida, tras haber caminado por un número impar de bandas twistadas (y tal vez algunas otras no twistadas), se comprueba que el rastro de pintura azul que se ha ido dejando mancha los dos supuestos *lados* de la superficie. ¡Un momento! No intente leer de nuevo la frase anterior, que tiene toda la pinta de ser un jeroglífico egipcio de los difíciles. Mejor, pruebe a construir una superficie de Moebius pegando dos bandas, una plana y otra twistada, y eche a andar por encima de la superficie mientras pinta de azul el terreno por el que pisa...

Ahora bien, para ver que cada ciclo de *bandas* en la superficie  $S(D)$  tiene exactamente un número par de aristas twistadas, basta ver que cada ciclo de *aristas* en el diagrama  $D$  tiene un número par de aristas no alternantes. De este hecho recibimos demostraciones muy diferentes y curiosas. He aquí un modo de verlo: partiendo de un cruce, recorramos las aristas que rodean una cara del diagrama  $D$ , escribiendo signos  $+$  o  $-$  en cada cruce, dependiendo de si llegamos a éste mediante una arista que lo alcanza por encima o por debajo, respectivamente. Por ejemplo, al recorrer la cara que indica la Figura 5, escribiríamos el código  $+ - + - - -$ .

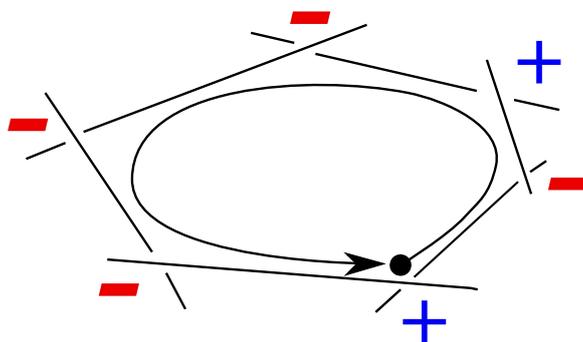


Figura 5. Recorriendo las aristas de una cara y anotando los signos.

Ahora observamos que una arista alternante tiene en sus extremos el mismo signo, mientras que una no alternante los cambia. Por lo tanto hay tantos cambios de signos como aristas *no* alternantes. Dado que el número de cambios de signos es necesariamente par

(porque llegamos al mismo signo del que partimos), tenemos necesariamente un número par de aristas no alternantes.

- Si aún nos quedan fuerzas, veamos cómo demostrar que, si  $D$  es un diagrama alternante, entonces el número  $N$  de curvas cerradas simples que componen la frontera de  $S(D)$  coincide con el número de cruces  $c$  del diagrama  $D$  más dos, es decir,

$$N = c + 2.$$

Hay una observación que hace esto menos difícil de lo que parece. Y es que, si  $D$  es alternante, la superficie  $S(D)$  no tiene bandas twistadas, así que podemos dibujarla contenida completamente en nuestra hoja de papel. En consecuencia  $N$  resulta ser el número de regiones  $r$  que determina el diagrama  $D$  (la región de fuera también hay que contarla). Compruébalo en el dibujo de la Figura 6: a la izquierda el diagrama  $D$  determina seis regiones; a la derecha la superficie  $S(D)$  tiene en su borde seis curvas cerradas simples.

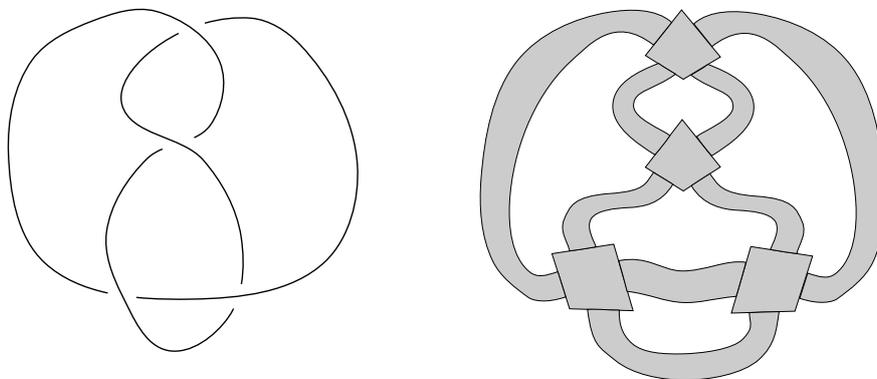


Figura 6. Si  $D$  es alternante,  $S(D)$  no tiene bandas twistadas.

De manera que es suficiente ver lo siguiente: en un diagrama de un nudo (alternante o no) con  $c$  cruces, hay necesariamente  $r = c + 2$  regiones. Hay un argumento, basado en la característica de Euler de la esfera, que da una demostración rápida de este hecho. Pero veamos aquí una demostración *ad hoc*, usando inducción sobre el número de cruces.

Empieza así: si un diagrama no tiene cruces, es un simple círculo y tenemos dos regiones, la de fuera y la de dentro: así que el número de regiones es el número de cruces más dos. Y termina así: supongamos que el número de regiones es dos más el número de caras para todos los diagramas de nudos con  $c - 1$  cruces. Tomemos ahora un diagrama con  $c$  cruces y  $r$  regiones. Queremos ver que  $r = c + 2$ . A partir de nuestro diagrama  $D$  construyamos un diagrama  $D'$  muy parecido, salvo que en las cercanías de un cruce este se ha suavizado, conectando dos regiones que antes eran diferentes. Para  $D'$  tenemos que  $c' = c - 1$  y  $r' = r - 1$  (porque dos regiones se han fusionado). Ya que  $r' = c' + 2$  por hipótesis de inducción, se sigue que  $r - 1 = (c - 1) + 2$ , o sea  $r = c + 2$ .

Terminamos esta sección poniendo en contexto el problema propuesto. En Topología, o más en concreto en teoría de nudos, la superficie  $S(D)$  es el llamado cobordismo de Turaev del diagrama  $D$  (si lo tapamos con los discos adecuados, produce la llamada superficie de Turaev [2]). El género de Turaev de un nudo  $K$  es, por definición, el mínimo género de todas las superficies  $S(D)$ , donde  $D$  es un diagrama de  $K$  (dicho de manera intuitiva, el género de una superficie compacta sin borde es el número de agujeros que tiene). De la lectura del apartado 4 se infiere que el género de Turaev de un nudo alternante (es decir, un nudo que tiene un diagrama alternante), es necesariamente cero. Así que este

género puede interpretarse como una medida de lo lejos que está el nudo  $K$  de ser un nudo alternante. Por ejemplo, se sabe que todo nudo casi alternante tiene género de Turaev uno (un nudo es casi alternante si no es alternante y posee un diagrama  $D$  al que un cambio de uno de sus cruces lo hace alternante). En cambio, a día de hoy no se sabe si todo nudo con género de Turaev uno es necesariamente casi alternante.

## 4. Algunas preguntas del Quiz

En esta sección final comentamos algunas de las preguntas propuestas en el concurso Quiz llevado a cabo. Recordemos que el buen hacer de los alumnos se veía dificultado por la marcha inexorable de un reloj muy exigente...

### 4.1. ¿Cuántos números primos hay?

Supongamos que  $p_1, p_2, \dots, p_r$  son  $r$  números primos distintos entre sí. Sea  $m = 1 + p_1 p_2 \cdots p_r$ . ¿Cuál es la afirmación correcta?

- (a) El número  $m$  es necesariamente primo.
- (b) Puede ocurrir que algún  $p_i$  divida a  $m$ .
- (c) Hay un número primo que divide a  $m$  diferente de  $p_1, \dots, p_r$ .

La respuesta correcta es (c), respuesta que encierra realmente una demostración de que existen infinitos números primos. Se razona así: supongamos que  $p_1, \dots, p_r$  fuese la lista completa de los números primos, y que esta lista fuese finita. Escogemos el número  $m = p_1 p_2 \cdots p_r + 1$ . Entonces  $p_1$  no puede dividir a  $m$ , ya que si fuese  $m = p_1 k$  con  $k$  un número entero, entonces tendríamos  $p_1(k - p_2 \cdots p_r) = 1$  y concluiríamos que  $p_1$  divide a 1, un absurdo. De la misma manera se demuestra que tampoco  $p_2, \dots, p_r$  dividen a  $m$ . Ahora bien, algún número primo debe dividir a  $m$  (algo que necesita una pequeña reflexión), y ninguno de la lista  $p_1, \dots, p_r$  lo hace. Se sigue que debe haber al menos un número primo más que no estaba en la lista original.

Las demostraciones de que existen infinitos números primos deben contarse por decenas, a cada cual más ingeniosa o reveladora de algún aspecto matemático interesante en sí mismo. A Paul Erdős le gustaba hablar de "EL LIBRO", en el cual Dios habría escrito las pruebas perfectas de los grandes teoremas matemáticos. Y esta es la filosofía de un libro humano, de título "Proofs from THE BOOK", de Martin Aigner y Günter M. Ziegler [1], dedicado a recoger un buen número de pruebas elegantes y escritas de modo maravilloso sobre muchos teoremas destacados de las matemáticas. En concreto este libro recoge seis pruebas de la infinitud de los números primos. En nuestro Quiz nosotros pudimos desentrañar la primera de estas demostraciones.

### 4.2. Partiendo pizzas y tartas

1. ¿Cuál es el número máximo de trozos (no necesariamente iguales) en los que puedes partir una pizza de masa extrafina con 3 cortes rectos?

Como a los matemáticos nos gusta *generalizar*, vamos a estudiar el problema para un número genérico  $n$  de cortes. Además, dado que tenemos mucha hambre, podemos pensar que nuestra pizza puede ser tan grande como queramos, es decir que podemos trabajar en todo el plano. Una vez establecida la solución en ese caso, para considerar una pizza pequeña simplemente bastará con llevar la solución "grande" a la escala correcta.

Para empezar, observamos que, si queremos maximizar el número de trozos, no puede haber dos cortes paralelos ni tres cortes que se intersequen en un único punto. En efecto, si ocurriera cualquiera de estas dos opciones, podríamos modificar ligeramente uno de los cortes para obtener un mayor número de trozos (es decir, las rectas que definen los cortes tienen que estar en posición general en el plano).

Una vez observado esto, si llamamos  $p_n, n = 1, 2, \dots$ , al número máximo de trozos en los que podemos partir el plano con  $n$  cortes,  $p_n$  se calcula a partir de  $p_{n-1}$  con el razonamiento siguiente. Gracias a nuestra observación preliminar, sabemos que el  $n$ -ésimo corte, el que añadimos, tiene que intersecar todos los  $n - 1$  cortes ya existentes y lo tiene que hacer en  $n - 1$  puntos distintos. Estas  $n - 1$  intersecciones (mejor dicho, los segmentos que las unen, junto con las dos semirrectas de los extremos) dividen un trozo de la situación anterior en dos, generando por lo tanto un total de  $n$  nuevos trozos en el plano. Entonces, al número  $p_{n-1}$  de trozos que teníamos con  $n - 1$  cortes, al hacer este nuevo corte añadimos  $n$  trozos más, es decir

$$p_n = p_{n-1} + n.$$

Iterando esta relación, obtenemos

$$p_n = p_{n-1} + n = p_{n-2} + (n - 1) + n = \dots = p_1 + 2 + \dots + (n - 1) + n.$$

Dado que con un único corte se obtienen 2 trozos de pizza, es decir  $p_1 = 2$ , la relación anterior queda así:

$$p_n = 2 + 2 + \dots + (n - 1) + n = 1 + 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = 1 + \frac{n(n + 1)}{2}. \quad (4)$$

En particular, con  $n = 3$  cortes podemos obtener  $p_3 = 7$  trozos.

- ¿Cuál es el número máximo de trozos (no necesariamente iguales) en los que puedes partir una tarta con 3 cortes rectos?

A primera vista esta pregunta parece similar a la anterior, pero hay una diferencia sustancial, y es que ahora estamos en un ambiente tridimensional. Por lo tanto, trabajamos en el espacio y los cortes rectos ahora se realizan a través de planos.

En este contexto, que los planos estén en posición general (lo cual garantizará que el número de trozos sea máximo), equivale a decir que tres planos de corte cualesquiera deben tener exactamente un punto en común, mientras que la intersección de cuatro planos será vacía.

A partir de esta observación, llamamos  $t_n, n = 1, 2, \dots$ , al número máximo de trozos en los que podemos partir la tarta (el espacio) con  $n$  cortes. Entonces, si tenemos  $n - 1$  planos y añadimos un  $n$ -ésimo en posición general, este último intersecará todos los anteriores planos en una recta,  $r_i, i = 1, \dots, n - 1$ . Reflexionando un poco (hágalo, querido lector), el hecho de que los planos estén en posición general, implica que dos rectas cualesquiera  $r_i$  y  $r_j$ , con  $i \neq j$ , se intersecan (sobre el plano que hemos añadido) exactamente en un punto, mientras que si las tomamos de tres en tres, nunca hay una intersección común. Lo que acabamos de decir es que las rectas  $r_i$  están en posición general sobre el nuevo plano y lo parten en unos cuantos trozos. ¡Pero ya sabemos calcular este número! ¡Es el  $p_{n-1}$  de la pregunta anterior! Y este es el número de trozos que añadimos en el espacio con el nuevo plano. Entonces se cumple la relación  $t_n = t_{n-1} + p_{n-1}$  y, razonando recursivamente y utilizando (4), se deduce que

$$t_n = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}.$$

Con  $n = 3$  cortes, como se plantea en la pregunta original, obtenemos  $t_3 = 8$  trozos de tarta.

Concluimos con dos pequeñas observaciones adicionales:

- Los números  $t_n$  se conocen, por razones obvias, como los *cake numbers* o *números del pastel*, [4], mientras que los números  $p_n$  constituyen la llamada *sucesión del cortador perezoso* [5].
- ¿Cómo cambian las respuestas a estas dos preguntas si se admiten cortes no rectos (por ejemplo circulares o esféricos)? En el libro [3] encontrarás este y otros muchos problemas interesantes.

### 4.3. Soy el mayor, soy el mayor...

¿Qué número es mayor:  $e^\pi$  o  $\pi^e$ ?

Vamos a demostrar que  $e^\pi > \pi^e$ . Como la función exponencial es creciente, basta (ejercicio) demostrar que  $f(\pi) > 0$  donde  $f(x) = x - e \ln(x)$ . Ahora bien, en el intervalo  $(0, +\infty)$  la función  $f(x)$  es derivable y

$$f'(x) = 1 - \frac{e}{x}.$$

Se concluye que  $f$  decrece en  $(0, e)$  y crece en  $(e, +\infty)$ , por lo que  $f$  posee un mínimo global absoluto en  $x = e$ . Dado que  $f(e) = 0$ , se sigue que  $f(\pi) > 0$ .

### 4.4. ¿Café o vino?

Amable lector, para acabar le dejamos una cuestión más propuesta en el Quiz. Y recuerde que debe responderla en, pongamos, un minuto...

Ana tiene una taza llena de café y Luis un tonel lleno de vino. Y ambos tienen dos cucharas exactamente iguales. Luis colma su cuchara con café de la taza de Ana, y lo echa en su tonel de vino. A continuación, Ana colma su cuchara con el líquido del tonel de Luis (que tiene mucho vino y una cucharada de café), y vierte su contenido en su taza. ¿Qué queda más...?

- (a) Café en el tonel de Luis.
- (b) Vino en la taza de Ana.
- (c) Asignaturas de Matemáticas para julio.
- (d) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

## Referencias

- [1] AIGNER, M. y ZIEGLER, G. M., *Proofs from THE BOOK*, Springer, Sixth edition, 2009.
- [2] TURAEV, V. G., *A simple proof of the Murasugi and Kauffman theorems on alternating links*, Enseign. Math. (2) 33 (1987), no. 3-4, 203–225.
- [3] YAGLOM, A. M. y YAGLOM, I. M., *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions - Vol. 1 Combinatorial Analysis and Probability Theory*, Dover Publications Inc., Nueva York, 1964.
- [4] [https://en.wikipedia.org/wiki/Cake\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Cake_number) (consultado el 12 de mayo de 2023).
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Lazy\\_caterer's\\_sequence](https://en.wikipedia.org/wiki/Lazy_caterer's_sequence) (consultado el 12 de mayo de 2023).

### Sobre los autores:

*Nombre:* Pedro M. G. Manchón

*Correo electrónico:* pedro.gmanchon@upm.es

*Institución:* Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial, Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial, Universidad Politécnica de Madrid, 28012 Madrid, España.

*Nombre:* Ernesto Nungesser

*Correo electrónico:* em.nungesser@upm.es

*Institución:* M2ASAI, Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a las Ingenierías Civil y Naval, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales, Universidad Politécnica de Madrid, 28040 Madrid, España.

*Nombre:* Andrea Tellini

*Correo electrónico:* andrea.tellini@upm.es

*Institución:* Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial, Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial, Universidad Politécnica de Madrid, 28012 Madrid, España.