Revista de Investigación "Pensamiento Matemático"
Universidad Politécnica de Madrid
G.I.E. Pensamiento Matemático
MAIC
ISSN 2174-0410

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA A TRAVÉS DE LA HISTORIA

EXPERIENCIAS DOCENTES

VALORACIONES ESTUDIANTILES DE UNA EXPERIENCIA DE RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

CUENTOS MATEMÁTICOS

CÓDIGO PENAL

INVESTIGACIÓN

A DETAILED EXAMPLE OF BINARY CLASSIFICATION BY QUADRATIC KERNEL AND ITS ASSOCIATED DECISION FUNCTION

LA PROBABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO CHILENOS DE MATEMÁTICA DE 7° Y 8° DE EDUCACIÓN PRIMARIA

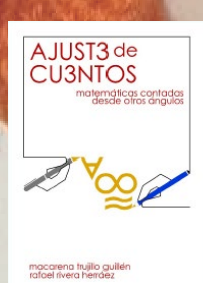
JUEGOS Y RAREZAS MATEMÁTICAS

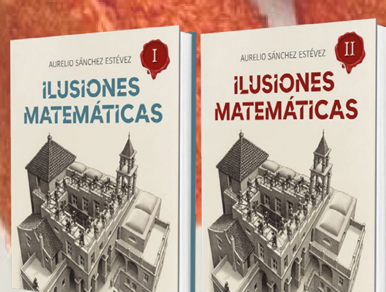
CELEBRACIÓN DEL DÍA DE PI 2022 EN LA UPM

IDENTIDADES ESPERANZA

CRÍTICAS Y RESEÑAS

AJUST3 de CU3NTOS





ILUSIONES MATEMÁTICAS

Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 – 0410

Volumen XIV, Número 1, abril 2024

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC
Diseño de portada/ Sagrario Lantarón
Maquetación / Sagrario Lantarón, Mariló López, Santiago Higuera

Universidad Politécnica de Madrid

Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático

y

Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Universidad Politécnica de Madrid

Volumen XIV, Número 1, ISSN 2174-0410

1 de abril de 2024

Índice de Artículos

Editorial del Número 1 (Volumen XIV)

Equipo Editorial

Revista de Investigación

Volumen XIV, Número 1, pp. 001–004, ISSN 2174-0410

Recepción: 16 Mar'24; Aceptación: 16 Mar'23

1 de abril de 2024

Resumen

Este es el número de Pensamiento Matemático del año 2024. Se presentan artículos muy variados de autores de diferentes países que encontraréis de gran interés. El carácter abierto a todas las aplicaciones y trabajos relacionados con las Matemáticas, así como la procedencia variada de los autores que participan en el número, enriquece la aportación de la Revista y es su sello de identidad.

Los trabajos están distribuidos en cada una de las secciones de la publicación.

Abstract

This is the number of Mathematical Thought of the year 2024. Very varied articles are presented by authors from different countries that you will find of great interest. The open nature of all applications and works related to Mathematics, as well as the varied origin of the authors who participate in the issue, enriches the contribution of the Journal and is its hallmark.

As usual, the works are distributed in each of the sections of the publication.

Introducción.

Durante el año trascurrido desde el último número publicado, nuestra Revista ha recibido trabajos de gran interés y de profesionales de diversos puntos de la geografía mundial que queremos compartir con todos los docentes, investigadores y estudiosos de las matemáticas. Estamos seguros que os interesarán.

Investigación

A detailed example of binary classification by quadratic kernel and its associated decision function. Este interesante trabajo nos llega desde Colombia y muestra los detalles de cálculo internos a los algoritmos de clasificación binaria mediante máquinas de vectores de soporte (SVM). El artículo, pueden ser especialmente interesante para los estudiantes de ciencias de la computación, ingeniería, matemáticas y para cualquier persona interesada en aprender sobre inteligencia artificial.

La probabilidad en libros de texto chilenos de matemática de 7° y 8° de Educación Primaria. Se trata de una investigación donde se analizan las actividades propuestas para el aprendizaje de la probabilidad en los libros de texto de séptimo y octavo de Educación Básica en Chile de dos ediciones (pública y privada), comparando y categorizándolas según su significado, demanda cognitiva y contexto

Experiencias Docentes

Esta sección tiene como objetivo compartir experiencias en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a todos los niveles. En este número se publica la siguiente propuesta:

Valoraciones estudiantiles de una experiencia de recolección y análisis de datos trabaja las valoraciones de un grupo de estudiantes sobre un proyecto de recolección y análisis de datos en un curso de Estadística y Probabilidad. El artículo evidencia que dicho proyecto es relevante en el aprendizaje de la Estadística.

Historias de Matemáticas

Esta sección incluye estudios sobre matemáticas y sus aplicaciones, así como artículos de historia de esta ciencia. En este número se presenta:

La demostración matemática a través de la historia un trabajo muy interesante ya que la demostración se considera esencial y básica en matemáticas y porque las matemáticas han sido consideradas, históricamente hablando, modelo de toda ciencia.

Juegos y rarezas matemáticas

Celebración del Día de Pi 2022 en la UPM. El día de Pi comienza a ser un día celebrado en todo el mundo. Desde 2018 la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) tiene una cita anual con ese día tan especial, que se celebra los días 14 de marzo (3/14 en el calendario de los países anglosajones). En este artículo se repasan los dos problemas y algunas cuestiones del concurso Quiz propuestos a todos los alumnos de la UPM en la edición de 2022.

Identidades Esperanza se trata de un original trabajo dedicado a la nieta del autor que surge de la curiosidad por buscar relaciones entre los números cuadrados perfectos, entendiendo que los mismos moldean áreas de formas cuadradas, que pueden juntarse y a la vez generar otras áreas cuadradas de mayor valor, donde los lados de esas áreas resultantes pueden o no ser valores enteros.

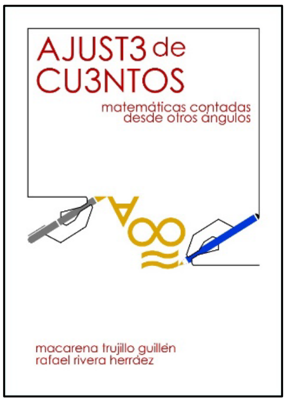
Cuentos

Código penal. Se rescata otro cuento que formó parte del concurso de relatos con contenido matemático organizado por el Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático, de la Escuela de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid. En este caso el contenido matemático del relato se centra en dos aspectos: la codificación y las bases numéricas, en concreto la decimal y la binaria, como medio para encontrar y detener a un fugitivo.

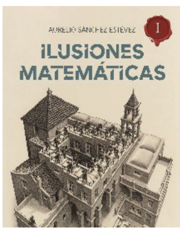
Reseñas

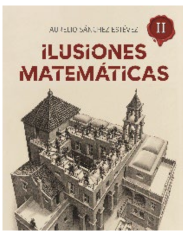
En este número contamos con la presentación de dos interesantes textos:

AJUST3 de CU3NTOS presenta el libro de Rafael Rivera y Macarena Trujillo repleto de historias con el denominador común de acercar las matemáticas a todos los públicos. Se trata de un texto delicioso que representa un intento de descubrir que las matemáticas están inmersas en nuestras vidas de una manera u otra, realizado con un enfoque diferente porque trata de explicarlo desde la propia vivencia de los autores narrada a través de historias.



Ilusiones Matemáticas es un libro de Aurelio Sánchez recién salido del horno. Se trata de una obra de carácter divulgativo con la que se presenta una visión de las matemáticas cercana y asequible. En él se dan a conocer numerosos principios y curiosidades relacionadas con diferentes ramas de las matemáticas y también se presenta la forma en la que se utilizan para crear juegos de magia, acertijos, rompecabezas o ilusiones ópticas entre otras formas de expresión artística. Sin duda un texto recomendable, entretenido y muy enriquecedor.





Investigation

A detailed example of binary classification by quadratic kernel and its associated decision function

Un ejemplo detallado de clasificación binaria mediante kernel cuadrático y su función de decisión asociada

Yeisson Alexis Acevedo Agudelo
Oscar Mario Londoño Duque

Research Journal

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Vol. XIV, Núm 1, pp. 005–017, ISSN 2174-0410
Recepción: 02 Mar'23; Aceptación: 17 Jul'23

April 2024

Resumen

En este artículo se pretende mostrar los detalles de cálculo internos a los algoritmos de clasificación binaria mediante máquinas de vectores de soporte (SVM). En particular, se presenta un ejemplo detallado del uso del algoritmo y el cálculo puntual de los parámetros asociados al sistema de entrenamiento mediante un kernel cuadrático. Las cuentas y definiciones presentadas en este trabajo, pueden ser de beneficio para los estudiantes de ciencias de la computación, ingeniería, matemáticas y para cualquier persona interesada en aprender sobre inteligencia artificial.

Palabras Clave: Clasificación Binaria, Funciones de Similitud, Función de Clasificación; Inteligencia Artificial.

Abstract

This article aims to illustrate the internal computation details of binary classification algorithms using Support Vector Machines (SVM). Specifically, a detailed example of the algorithm's usage and the precise computation of parameters associated with the training system using a quadratic kernel are presented. The computations and definitions presented in this work may be of benefit to students of computer science, engineering, mathematics, and anyone interested in learning about artificial intelligence.

Keywords: Binary Classification, Similarity Functions, Classification Function; Artificial Intelligence.

1. Introduction

Artificial Intelligence (AI) has transformed numerous fields, from medicine and industry to entertainment and education. The ability of AI to analyze vast amounts of data and learn complex patterns has led to significant advancements in problem-solving and decision-making [1]. Furthermore, AI can enhance the efficiency and productivity of businesses and organizations, potentially exerting a significant impact on the global economy.

Binary classification is one of the most common applications of AI [2, 3, 4], employed to segregate datasets into two distinct categories. However, this technique still poses significant challenges and issues, such as lack of precision and a tendency to overfit the training data. These issues can lead to inaccurate results and costly errors in decision-making.

To overcome these challenges, advanced binary classification algorithms, such as classification kernels, have been developed [5, 6]. These algorithms utilize similarity functions to map the data into a high-dimensional space, where it is easier to separate different categories. Furthermore, classification kernels are efficient in terms of computational resource usage, making them ideal for deployment in real-time systems and online applications.

This article will present a detailed example to comprehend the utilization of the quadratic kernel in the context of Support Vector Machines (SVM) for binary classification. In addition to exploring the basics of SVM, specific techniques and necessary steps for constructing a decision or classification function will be detailed, derived from the solution to the optimization problem with Lagrange coefficients. This article aims to serve as a practical guide for constructing decision functions using different kernels in SVM for binary classification problems. It is expected that, through understanding the internal structure of SVM and using different kernels, the concepts presented here can be applied in a variety of classification contexts and different programming languages. With this in mind, this article will not only present the detailed example but also the theoretical concepts necessary to comprehend the technical details behind constructing a decision function in SVM.

2. Preliminaries

In this section, we will establish some fundamental concepts necessary to understand binary classification using a separating hyperplane through Support Vector Machine (SVM).

Binary Classification Binary classification is a fundamental problem in the field of machine learning. It involves assigning instances to one of the two possible classes. For example, it could be the classification of emails as 'spam' or 'non-spam' or the detection of bank transactions as 'fraudulent' or 'legitimate'. In our case, we will focus on the classification of instances into two classes labeled as 'positive' and 'negative'.

Feature Vector. It is a mathematical entity representing a magnitude and direction in a multidimensional space. In the context of classification, each instance is represented by a vector in a vector space. A vector can have multiple components, representing the features of an instance. For example, if classifying images of fruits, the vector components could be the size, color, and texture of the fruit.

Feature Space. It is a representation in a dimensional space where each instance is described by a feature vector. Each component of the vector represents a specific feature. By utilizing a feature space, we aim to transform instances into a space where it is easier to find a linear separation between classes.

Support Vector Machines (SVM). SVMs are a widely used technique in machine learning for binary classification. Their primary objective is to find a separating hyperplane in the feature space that maximizes the margin between instances of different classes. This hyperplane becomes a decision boundary for classifying new instances

Optimization and Training. The training of an SVM model involves finding the optimal parameters that define the separating hyperplane. This is achieved by formulating the problem as an optimization problem and employing optimization techniques, such as quadratic programming or maximizing the objective function. The goal is to find the hyperplane that generalizes well for new instances and minimizes classification errors.

3. Development

Suppose we want to classify with labels 1 or -1, the vectors

$$\mathbf{x} = (-2,1,2) \text{ y } \mathbf{y} = (2,1,3). \tag{1}$$

These could be, for example, the transformed coordinates for measurements obtained from two new patients who underwent a liver examination [7] (size, dimension, degree of alcoholism), and we want to classify whether each of these two patients has a fatty liver or not, using the labels $1, -1$, where 1 represents a healthy classification for a patient.

Additionally, suppose a quadratic kernel was selected for this task, given by $K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + 1)^2$, where $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ is the dot product between vectors $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$.

Remark: According to the Mercer's theorem, not every function can be a kernel; in fact, the theorem states that the function K must be symmetric and positive semi-definite [8, 9]. This is: $i)$ for all $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, it holds that $K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = K(\mathbf{y},\mathbf{x})$, $ii)$ for any finite set of n vectors $A = \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \cdots, \mathbf{x}n$, the Gram matrix $Gij = K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}j)$, with $i, j = 1,2,3,...,n$; must be positive semi-definite (Eigenvalues greater than or equal to zero; or equivalently $\mathbf{x}i^T G\mathbf{x}_i \geq 0$). Various functions satisfy the conditions to be kernels; in [8], the reader can find different definitions of kernels: linear, quadratic, polynomial, Gaussian (RBF), sigmoid, among others.

Next, the previously selected kernel is applied to the vectors $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ from (1):

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = K((-2,1,2),(2,1,3)) = [(-2)(2) + (1)(1) + (2)(3) + 1]^2 = 16.$$

we can observe that $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ could be similar or likely to belong to the same class, but this value 16 is relative (two vectors will be similar or close if, when applying the kernel 'similarity function', a non-close-to-zero number is obtained [10]), and therefore, it is not decisive for classifying vectors $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Consequently, a decision function $f(\mathbf{x})$ must be constructed using a prior training set with known labels and, of course, grounded in the selected kernel $K(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

By the above, let's consider the following three training vectors:

$$x_1 = (2,1,2);\ x_2 = (3,1,0);\ x_3 = (1,3,1) \text{ with their respective labels } y_1 = -1;\ \ y_2 = 1;\ \ y_3 = 1. \tag{2}$$

Remark:

It is common practice to randomly select 70 % from a previously known database for the training of the machine learning method (Machine Learning - AI). On the other hand, the remaining 30 % of the data, along with their respective labels $-1, 1$, is kept for evaluating the accuracy of the constructed model or selection function [11].

Continuing with our goal of establishing the decision function $f(\mathbf{x})$, we must first obtain the following Gram matrix [12], applying the kernel to all training data given in (2):

$$G_{ij} = K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \begin{bmatrix} K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) & K(x_1, x_3) \\ K(x_2, x_1) & K(x_2, x_2) & K(x_2, x_3) \\ K(x_3, x_1) & K(x_3, x_2) & K(x_3, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 64 & 64 \\ 64 & 121 & 49 \\ 64 & 49 & 144 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

We also need to obtain the cross-label matrix (or label Gram matrix) using (2):

$$Y_{ij} = \mathbf{y}_i \mathbf{y}_j = \begin{bmatrix} y_1y_1 & y_1y_2 & y_1y_3 \\ y_2y_1 & y_2y_3 & y_2y_3 \\ y_3y_1 & y_3y_2 & y_3y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Now, it is important to present the decision function $f(\mathbf{x})$, which, according to [8], is given by:

$$f(\mathbf{x}) = Sign\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + b\right] ;\ \text{where:} \tag{5}$$

(I) α_i, are the Lagrange coefficients (They are found by solving the associated convex optimization problem with the training data; this quadratic optimization problem is solved using the method of Lagrange multipliers).

(II) y_i are the respective labels of the training data.

(III) $K(\mathbf{x}, x_i)$, is the similarity function (kernel) applied to the vector $\mathbf{x}$ to be classified with each of the training vectors.

(IV) b is the bias term (also known as the threshold or as the value of the intersection of the separating hyperplane with the vertical axis).

The main problem one always faces in (5) is determining the Lagrange coefficients α_i, which are necessary to obtain the decision function. In the example we are considering, we have vectors in $\mathbb{R}^3$, which, as will be seen below, will not be very difficult to solve for the optimization problem. However, the complexity will increase depending on the binary classification problem addressed, due to the amount of data, the choice of similarity function (Kernel), the number of vector components, and the number of training vectors available. Hence, the indispensable assistance of computers, especially as more and more training data is introduced to enhance the models. Performing the calculations manually becomes complex, and that's why support machines or assistance is required (we refer to such assistance as artificial intelligence (AI)).

To calculate the Lagrange coefficients α_i, we proceed with the following steps:

1. We formulate the objective function: The objective function for the optimization problem is known as the 'Lagrangian for optimization problems' [13], which, for estimating the separating plane, is given by:

$$L_P = \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(y_i \left(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x_i} + b\right) - 1\right), \tag{6}$$

Equation (6) is also known as the Primal Lagrangian (Initial separation region minimization problem), and its equivalent, the Dual Lagrangian [8], is given by:

$$L_D = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j y_i y_j K(\mathbf{x_i}, \mathbf{x_j}); \quad \text{with the constraint } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0. \tag{7}$$

Calculating the Lagrange coefficients using the Dual (7) is always the best option, as the expression allows us to use the matrices (3) and (4), which are known data. Substituting $\lambda_i = \alpha_i$, we have, for our example, that expression (7) transforms into:

$$L(\alpha) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \alpha_i \alpha_j y_i y_j K(x_i, x_j), \text{ with the constraint } \sum_{i=1}^{3} \alpha_i y_i = 0. \tag{8}$$

Remark: The original minimization problem for the primal Lagrangian L_P in (6) becomes a maximization problem for the dual Lagrangian L_D in (7) (See [14]).

2. Expanding in (8), we obtain:
$L(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \frac{1}{2}[(\alpha_1 y_1)(\alpha_1 y_1)K(x_1, x_1) + (\alpha_1 y_1)(\alpha_2 y_2)K(x_1, x_2) + (\alpha_1 y_1)(\alpha_3 y_3)K(x_1, x_3) + (\alpha_2 y_2)(\alpha_1 y_1)K(x_2, x_1) + (\alpha_2 y_2)(\alpha_2 y_2)K(x_2, x_2) + (\alpha_2 y_2)(\alpha_3 y_3)K(x_2, x_3) + (\alpha_3 y_3)(\alpha_1 y_1)K(x_3, x_1) + (\alpha_3 y_3)(\alpha_2 y_2)K(x_3, x_2) + (\alpha_3 y_3)(\alpha_3 y_3)K(x_3, x_3)]$,

   Using (3), (4), and simplifying, we obtain:

$$L(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \frac{1}{2}(100\alpha_1\alpha_1 - 128\alpha_1\alpha_2 - 128\alpha_1\alpha_3 + 121\alpha_2\alpha_2 + 98\alpha_2\alpha_3 + 144\alpha_3\alpha_3). \tag{9}$$

3. Formulate the optimization problem: the optimization problem is to maximize the objective function $L(\alpha)$ in (9), subject to the constraints $\alpha_i \geq 0$ and $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i y_i = 0$.

4. Solve the optimization problem: to find the stationary points, we differentiate $L(\alpha)$ with respect to each α_i and set them equal to zero. Thus, from (9), we have:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = 1 - 100\alpha_1 + 64\alpha_2 + 64\alpha_3 = 0.$$
$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_2} = 1 + 64\alpha_1 - 121\alpha_2 - 49\alpha_3 = 0.$$
$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_3} = 1 + 64\alpha_1 - 49\alpha_2 - 144\alpha_3 = 0.$$

   with $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i y_i = 0$.
   Solving the above system of linear equations, we obtain:

$$\alpha_1 = \frac{25711}{818268}; \ \alpha_2 = \frac{3895}{204567}; \ \alpha_3 = \frac{984}{68189}. \tag{10}$$

   Note that $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ satisfy $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i y_i \approx 0$, in general, they satisfy the equation (9), for $L(\alpha) = 0$.

Finally, we proceed to calculate the threshold (also known as bias or intersection term) b. This can be calculated using the values α_i from (10) and the expression (see section 7.1.2 in [15]):

$$b = \frac{1}{y_i} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j K(x_i, x_j), \tag{11}$$

for any α_i such that $0 \leq \alpha_i$. In this case, we can use α_1, α_2 and α_3 as they are positive. Thus, in (11), it holds

$$b = \frac{1}{y_1} - \alpha_1 y_1 K(x_1, x_1) - \alpha_2 y_2 K(x_1, x_2) - \alpha_3 y_3 K(x_1, x_3),$$

$$b = -1 - \frac{25711}{818268}(-1)(100) - \frac{3895}{204567}(1)(64) - \frac{984}{68189}(1)(64) \approx 0.$$

Thus, with the threshold $b = 0$, we finally have the decision function $f(\mathbf{x})$ defined in (5), for our example, determined by

$$f(\mathbf{x}) = Sign\left[\sum_{i=1}^{3} \alpha_i y_i K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)\right], \tag{12}$$

with $0 \leq \alpha_i$ given by (10).

We proceed then to fulfill our initial objective, classifying the vector $\mathbf{x} = (-2, 1, 2)$. Using $\mathbf{x}$, (2), (10) and the kernel operator in the decision function (12), with which we obtain:

$$f(\mathbf{x}) = Sign\left[\frac{25711}{818268}(-1)(2)^2 + \frac{3895}{204567}(1)(-4)^2 + \frac{984}{68189}(1)(4)^2\right],$$

$$f(\mathbf{x}) = Sign\left[\frac{27947}{68189}\right],$$

$$f(\mathbf{x}) = 1.$$

Similarly, for $\mathbf{y} = (2, 1, 3)$, we obtain

$$f(\mathbf{y}) = Sign\left[\frac{25711}{818268}(-1)(12)^2 + \frac{3895}{204567}(1)(8)^2 + \frac{984}{68189}(1)(9)^2\right],$$

$$f(\mathbf{y}) = Sign\left[-\frac{437204}{204567}\right],$$

$$f(\mathbf{y}) = -1.$$

Then, the proposed objective in our example was achieved, and the respective classifications are$f(\mathbf{x}) = 1,\ f(\mathbf{y}) = -1$.

The decision function $f(\mathbf{x})$ is, in reality, equivalent to establishing a separation function through a separating plane (or separating hyperplane in high dimensions). To corroborate this assertion, the following is a way to construct the separation plane in the feature space, using the Lagrange coefficients α_i obtained in (10) and the value of the bias term b:

Finding the separation hyperplane.

The separating plane in binary SVM classification algorithms is defined by a linear equation of the form $\mathbf{w}^T\mathbf{X} + b = 0$, where $\mathbf{w}$ is a vector normal to the hyperplane that defines the direction of the hyperplane, $\mathbf{X}$ is the feature vector (attributes or input) representing the object to be classified in the feature space, and b is a scalar indicating the distance from the hyperplane to the origin or decision threshold. The expression $\mathbf{w}^T$ denotes the transpose of the vector $\mathbf{w}$. In this context, the task of the SVM algorithm is to find the vector $\mathbf{w}$ and the scalar b that define the optimal separating hyperplane between the two classes.

The vector **w** defines the direction of the hyperplane and is perpendicular to it. Similarly, **w** maximizes the distance between the hyperplane and the points of each class in the feature space. According to [16], the vector **w** is calculated using the expression

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i x_i. \tag{13}$$

Substituting the data for our example, given in (2) and (10), we obtain in (13):

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i y_i x_i = \frac{25711}{818268}(-1)(2,1,2) + \frac{3895}{204567}(1)(3,1,0) + \frac{984}{68189}(1)(1,3,1),$$

$$\mathbf{w} = \left(\frac{3563}{409134}, \frac{8431}{272756}, -\frac{19807}{409134}\right).$$

Furthermore, as in our example $b = 0$, we finally have the separating plane $\mathbf{w}^T\mathbf{X} + b = 0$, it is:

$$\frac{3563}{409134}x_{.1} + \frac{8431}{272756}x_{.2} - \frac{19807}{409134}x_{.3} = 0, \tag{14}$$

for all vector $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{.1} \\ x_{.2} \\ x_{.3} \end{pmatrix}$ of attributes or inputs.

Once the separation plane (Hyperplane or decision boundary) has been found, it is also possible to use it to classify new points using the following three rules:

(a) Take the feature vector of the new point to be classified and substitute it into the equation of the separation plane.

(b) If, upon evaluation, the result is greater than zero, then the point is classified as belonging to the positive class $(+1)$, and if it is less than zero, then it is classified as belonging to the negative class (-1).

(c) If the result is equal to zero, then the point is exactly on the separation plane and can be classified as belonging to either of the two classes, depending on the convention being used (this situation rarely occurs).

It is possible to summarize the three rules above implicitly through the following expression:

$$f(\mathbf{x}) = Sign\left(\mathbf{w}^T\mathbf{X} + b\right).$$

As a result, the equivalence is finally fulfilled

$$f(\mathbf{x}) = Sign\left(\mathbf{w}^T\mathbf{X} + b\right) = Sign\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + b\right].$$

4. Some considerations and model validation

It is possible that the classifications obtained with the separation hyperplane (derived from the Lagrange coefficients) do not match the classifications obtained directly from the decision function (obtained with the Lagrange coefficients and the selected kernel) on new points. This discrepancy can be attributed to various factors:

1. Approximation error: The kernel function uses an approximation to map the data to a higher-dimensional feature space. If this approximation, along with the estimation of Lagrange coefficients, is not accurate, the final decision function $f(\mathbf{x})$ may not capture all the complexities of the data, leading to classification errors.

2. Choice of kernel: The choice of the kernel can impact the model's generalization ability. Some kernels are more suitable for certain types of data than others, so choosing the wrong kernel can result in a suboptimal model.

3. Sample bias: The Lagrange coefficients and the separation plane derived from them are based on the training data. If the training data sample is biased or not representative of the population, the separation plane may not generalize well to new points.

In particular, this last case is the factor in which the example we are considering fails, as the data is not real in the sense that it was not selected from a particular database but rather chosen randomly to illustrate in detail the functioning of the binary classification algorithm using SVM (AI).

In general, it is important to remember that results obtained with machine learning models are always approximations, and practical results may slightly differ from theoretical results. It is always crucial to evaluate the performance of a model on independent test data to ensure that the model generalizes well to new data.

To evaluate the performance of a binary SVM model, it is necessary to use appropriate evaluation metrics for binary classifiers [17]. Some of the most common metrics include:

1. Accuracy:
$$E = \frac{\mathrm{TP}+\mathrm{TN}}{\mathrm{TP}+\mathrm{TN}+\mathrm{FP}+\mathrm{FN}},$$
where TP: True Positives (positively labeled instances correctly classified). TN: True Negatives (negatively labeled instances correctly classified). FP: False Positives (negatively labeled instances incorrectly classified as positive). FN: False Negatives (positively labeled instances incorrectly classified as negative).

2. Precision:
$$P^* = \frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{TP}+\mathrm{FP}}\,.$$
Precision P^*, gauges the model's ability to accurately identify positive instances, disregarding instances of negative classification errors.

3. Sensitivity or True Positive Rate
$$S = \frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{TP}+\mathrm{FN}}\,.$$
Sensitivity measures the model's ability to accurately detect positive instances but does not account for incorrectly classified negative instances (false positives), which constitutes a significant limitation.

4. $F1$ Score:
$$F1 \text{ score} = \frac{2\cdot\text{Precision}\cdot\text{Sensitivity}}{\text{Precision}+\text{Sensitivity}} = \frac{P^*.\,S}{P^*+S}\,.$$

The F1 Score combines both precision and sensitivity into a single measure, making it useful when seeking a balance between the two.

Validation

To validate the constructed model, for our example, let's recall that our decision function is given by $f(\mathbf{x}) = Sign\left[\sum_{i=1}^{3} \alpha_i y_i K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)\right]$, as presented in (12). We will use the Accuracy measure E (also known as 'Exactitud' in Spanish [18]), with $0 \leq E \leq 1$, to assess the performance of our function $f(\mathbf{x})$ or binary classification SVM model.

Consider the following feature vectors and their respective labels as real data presented in the Table 1, for model validation:

Tabla 1: Validation data

Feature vector	*Label*
$(-2,1,2)$	$1\ (Positive)$
$(2,1,2)$	$-1\ (Negative)$
$(3,1,0)$	$1\ (Positive)$
$(1,3,1)$	$1\ (Positivo)$
$(0,2,1)$	$-1\ (Negative)$
$(3,-1,2)$	$1\ (Positive)$
$(2,1,3)$	$-1\ (Negative)$

Tabla 2: Classified data through $f(\mathbf{x})$.

Feature vector	*Label with* $f(\mathbf{x})$	*Element of the confusion matrix*
$(-2,1,2)$	$1\ (Positive)$	TP
$(2,1,2)$	$-1\ (Negative)$	TN
$(3,1,0)$	$1\ (Positive)$	TP
$(1,3,1)$	$1\ (Positive)$	TP
$(0,2,1)$	$1\ (Positive)$	FP
$(3,-1,2)$	$-1\ (Negative)$	FN
$(2,1,3)$	$-1\ (Negative)$	TN

Table 2, presents the classifications obtained through the decision function $f(\mathbf{x})$, along with their respective nomenclature as elements for a confusion matrix (through direct comparison with the Table 1).

Finally, based on the Table 2, we can measure the Accuracy E for the decision function $f(\mathbf{x})$ considered in our example:

$$E = \frac{\mathrm{TP} + \mathrm{TN}}{\mathrm{TP} + \mathrm{TN} + \mathrm{FP} + \mathrm{FN}} = \frac{3+2}{3+2+1+1} = 0,71428571.$$

The accuracy of our decision function is reasonably high $(Aprox. 71,43\,\%)$, since it is above 50 %, which would be the expected accuracy for a model making random predictions in a binary classification.

Remark. An accuracy of 0 means that the model did not correctly predict any samples from either the positive or negative class, indicating that the model is extremely deficient in the classification task. On the other hand, an accuracy close to 1 indicates that the model is predicting correctly almost all samples from both the positive and negative classes, achieving highly accurate classification. It's important to note that accuracy alone can be misleading, especially if the classes are imbalanced, so it is crucial to complement its evaluation with other performance metrics.

5. Conclusions

In this paper, the technical details behind the construction of a decision function using SVM and the use of a quadratic kernel for binary classification problems have been presented. A detailed example was provided, illustrating how SVM can be used to classify vectors into two distinct categories $\{1, -1\}$. Through this example, it was observed that SVM is an efficient and accurate algorithm for binary classification, and its use within AI has multiple applications. Furthermore, it was demonstrated how SVM can be used to avoid problems such as overfitting of training data. In particular, the specific calculations were highlighted where computers can be an ideal support, leading to reduced times and improved accuracy in estimations

Finally, it is important to highlight that the concepts presented in this article can be of great use for students in computer science, engineering, mathematics, and anyone interested in learning about artificial intelligence and binary classification. Además, se espera que este artículo sirva como una guía práctica para la construcción de funciones de decisión utilizando diferentes kernels (acorde al teorema de Mercer) para SVM, así como su integración en diferentes lenguajes de programación.

As for future research, various areas can be further explored regarding the implementation of SVM and its use in binary classification. One of them is the exploration of different kernels, beyond the quadratic kernel used in this example, for specific problems that require greater complexity. Similarly, different techniques for the optimal selection of SVM algorithm parameters can be studied to achieve better performance and avoid overfitting or underfitting. Furthermore, possibilities of implementing SVM in the analysis of large datasets can be explored, which might involve the use of dimensionality reduction techniques such as Principal Component Analysis (PCA), which has gained high importance in AI.

Acknowledgments

Y. Acevedo and O.M.L. Duque are grateful to Universidad EAFIT, Colombia, for the financial support in the project 'Study and applications of diffusion processes of importance in health and computing' with code 11740052022.

Statement of Interests

The authors declare that there are no potential financial or personal conflicts of interest that could have influenced the results or interpretations presented in this study.

Referencias

[1] Acosta, Adan and Aguilar-Esteva, Verónica Carreño, Ricardo and Patiño, Miguel and Patiño, Julian and Martínez, Miguel A, *Nuevas tecnologías como factor de cambio ante los retos de la inteligencia artificial y la sociedad del conocimiento*, Rev. Espacios. vol 41 (05). 2020.

[2] Cano Lengua, Miguel Ángel *Un algoritmo multiplicador proximal para clasificación binaria en máquinas de vectores soporte*, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. 2023.

[3] Meléndez Lorenzo, Adrián. *Estudio, desarrollo y evaluación de técnicas de aprendizaje automático en tareas de clasificación y/o predicción: detección de exoplanetas*, vol 1 (1). 2023.

[4] Fandiño Orjuela. Juan Camilo and others. *Desarrollo de una aplicación web para la clasificación de residuos a través de un modelo de machine learning*, thesis, Ingeniería de Sistemas, 2023.

[5] Pardo Bernardi, Lucas *Estudio, desarrollo y evaluación de técnicas de aprendizaje automático para la identificación de notas, instrumentos y/o compositores en archivos de música*, 2022.

[6] Van Vaerenbergh, S and Santamaría, I. *Métodos kernel para clasificación*, GTAS, Universidad de Cantabria, 2018.

[7] Castro, Lorena and Silva, Guillermo. *Hígado graso no alcohólico*, Revista Médica Clínica Las Condes. Elsevier. vol 26 (5), pag. 600-612, 2015.

[8] Felipe Bravo. *Clasificación Support Vector Machines*, https://felipebravom.com/teaching/svm.pdf. April. (Accessed on 04/11/2023) , 2023.

[9] Lyu, Siwei. *Mercer kernels for object recognition with local features*, in IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05). vol 2, p. 233-299, 2005.

[10] Ossa Sánchez, Jorge Eduardo. *Elementos del álgebra lineal en el aprendizaje de máquina*, Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira, 2016.

[11] Saxena, Pranshu Priya, Kanu Goel, Sachin Aggarwal, Puneet Kumar Sinha, Amit and Jain, Parita. *Rice Varieties Classification Using Machine Learning Algorithms*, p. 3762-3772, 2022.

[12] Drineas, Petros and Mahoney, Michael W *Approximating a gram matrix for improved kernel-based learning*, in Learning Theory: 18th Annual Conference on Learning Theory, Bertinoro, Italy, June 27-30, Springer p. 323-337. COLT 2005.

[13] Suárez, Enrique. *Tutorial sobre máquinas de vectores soporte (sVM)*, V. 1, p. 1-12. 2016.

[14] Andreas Christmann, Ingo Steinwart *Support Vector Machines*, Springer New York, p. 285-329. 2008.

[15] Bishop, Christopher M and Nasrabadi, Nasser M. *Pattern recognition and machine learning*, Springer, vol. 4 (4), 1 Ed. p. 328. 2006.

[16] Valenzuela González, Gema. *Aprendizaje Supervisado: Métodos, Propiedades y Aplicaciones*, Trabajo de revisión bibliográfica, Universidad de Málaga, p. 1- 63. 2022.

[17] Gónzalez Flores, P. G. *Análisis comparativo de algoritmos de clasificación para diagnosticar tipos de leucemia infantil*, Universidad Señor de Sipán, p. 1- 45. 2021.

[18] Mimura, M. Impact of benign sample size on binary classification accuracy, *Expert Systems with Applications*, V. 211, p. 118630. 2023.

About the authors:

Name: Yeisson Alexis Acevedo Agudelo
Email: yaceved2@eafit.edu.co
Institution: Universidad EAFIT
Orcid: orcid.org/0000-0002-1640-9084

Name: Oscar Mario Londoño Duque
Email: olondon2@eafit.edu.co
Institution: Universidad EAFIT
Orcid: orcid.org/0000-0002-5666-8224

Investigación

La probabilidad en libros de texto chilenos de matemática de 7° y 8° de Educación Primaria

Probability in Chilean mathematics textbooks for 7th and 8th grade of Primary Education

Matías Beltrán-Rodríguez, María José General-Leiva, Tamara Torres-Aravena, Danilo Díaz-Levicoy

Revista de Investigación

Volumen XIV, Número 1, pp. 17–34, ISSN 2174-0410
Recepción: 12 Dic'23; Aceptación: 28 Feb'24

1 de abril de 2024

Resumen

En esta investigación se analizaron las actividades propuestas para el aprendizaje de la probabilidad en los libros de texto de séptimo y octavo de Educación Básica en Chile de dos ediciones (pública y privada), comparando y categorizándolas según su significado, demanda cognitiva y contexto. La metodología, de tipo cualitativa, se basó en el análisis de contenido. Los resultados muestran el predominio del significado clásico de la probabilidad, de las tareas de procedimiento con conexión y de las actividades sin contexto.

Palabras Clave: Probabilidad, Libro de texto, Educación Básica, Matemática.

Abstract

In this research, we analysed the activities proposed for learning probability in the textbooks of seventh and eighth grade of Basic Education in Chile of two editions (public and private), comparing and categorising them according to their meaning, cognitive demand and context. The qualitative methodology was based on content analysis. The results show the predominance of the classical meaning of probability, procedural tasks with connection and activities without context.

Keywords: Probability, Textbook, Primary Education, Mathematics.

1. Introducción

A nivel internacional, en los últimos años, la estadística y la probabilidad han cobrado un importante rol en la sociedad, pues, a lo largo de su vida, el ser humano se ve enfrentado a gran cantidad de información a través de los medios de comunicación, la cual suele ser presentada a través de elementos estocásticos, por lo que se hace necesario adquirir la capacidad de lectura e interpretación de dicha información (Holmes, 1980). Así también, Batanero (2006) recalca la importancia de poseer herramientas para orientar la acción ante situaciones de incertidumbre presentes en la vida cotidiana o profesional.

Lo anterior, recibe el nombre de *cultura o alfabetización probabilística*, definida por Gal (2012) como la "capacidad de acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas que implican incertidumbre y riesgo del mundo real" (p. 4), pues, es importante desarrollar en la sociedad un pensamiento crítico, considerando además que la probabilidad tiene utilidad y aplicabilidad en diversos campos del conocimiento (Bennett, 1999; Everitt, 1999).

En Chile, el Ministerio de Educación (MINEDUC) ha implementado dos cambios curriculares, siendo el primero en el año 2009 con la incorporación del eje temático de *Datos y Azar*, incluyendo el tratamiento de la Estadística desde el primer ciclo de la Educación Básica, y la Probabilidad desde el segundo ciclo de Educación Básica (MINEDUC, 2009). Posteriormente, el año 2012, se incorpora el eje temático *Datos y Probabilidades*, cuyo tratamiento se da de forma continua a lo largo de la Educación Básica (MINEDUC, 2012).

Estos cambios se ven reflejados en las actuales bases curriculares, donde se observa el estudio de la probabilidad desde los primeros años de escolaridad, principalmente a través del registro de datos de juegos aleatorios, de manera manual en 2° y 3° año básico e incluyendo software educativo en 4° año. Se espera que desde 5° año básico los estudiantes sean capaces de describir eventos y las posibilidades de ocurrencia de estos, de forma cualitativa, para luego llegar a conjeturar acerca de tendencias de resultados obtenidos en la repetición de un experimento. Para los últimos cursos de Enseñanza Básica, se pretende que los estudiantes sean capaces de explicar las probabilidades de eventos, vinculando estas al significado intuitivo y frecuencial, haciendo también una comparación con la probabilidad obtenida de manera teórica a través de la definición clásica, apoyándose de diagramas de árbol o tablas (MINEDUC, 2018).

Todo lo anterior, mencionado en el currículum, debe estar en concordancia con el tratamiento que se da a la probabilidad en los libros de texto, pues este recurso es un nivel de *transposición didáctica* (Chevallard, 1991), es decir, que presenta una propuesta y tratamiento didáctico del saber a enseñar. Esto hace del libro de texto, una herramienta importante en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, lo que se ve reflejado en el presupuesto destinado por el Estado para adquirir libros de texto que son distribuidos en colegios públicos y particulares subvencionados, el cual asciende a US $52 millones cada año (Biblioteca Nacional del Congreso [BCN], 2020).

Otro factor a tener en cuenta, y que suma importancia al libro de texto en el aula (Díaz-Levicoy et al., 2016), es la limitada formación del profesorado chileno en la enseñanza de la probabilidad tanto en conocimiento didáctico como disciplinar (Vásquez y Alsina, 2015a), situación que motivaría su uso frecuente, sin mayor análisis del tratamiento que se da a su contenido mediante las actividades planteadas en este recurso.

De acuerdo con la pregunta de investigación, el presente estudio busca analizar las actividades sobre probabilidad propuestas en los libros de texto de matemática para séptimo y octavo año de Educación Básica en Chile.

2. Marco teórico

2.1. Significados de la probabilidad

Batanero (2005) realiza un estudio en el cual parte de un modelo teórico sobre el significado de los objetos matemáticos, considerando seis elementos diferenciados y se distingue entre el significado dado al objeto por una institución de enseñanza y el personal. Además, analiza los distintos significados históricos de la probabilidad y cómo han sido considerados para la enseñanza de la probabilidad.

La autora destaca que un objeto matemático puede enseñarse desde diversos niveles de complejidad, por lo que su significado puede ser diferente en diversas instituciones escolares. En este caso, al analizar el concepto de probabilidad es importante tener en cuenta que las diferencias de significado pueden reflejar las distintas concepciones que intervienen en la solución de problemas, y ayuda a entender los errores que se cometen. A lo largo de la historia, diferentes significados se han asociado al concepto de probabilidad, entre ellos:

Significado intuitivo. Este significado se origina a partir de los juegos de azar, son ideas intuitivas comunes en todas las civilizaciones primitivas que no han estudiado la probabilidad, de igual manera usan expresiones coloquiales para cuantificar sucesos inciertos y su creencia en ellos.

Significado clásico o laplaciano. Está basado en la definición de probabilidad de Laplace (1985): "una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables, y cuyo denominador, el número de todos los casos posibles" (p. 28). Esta definición trae restricciones como que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades e indica la necesidad de reducir los acontecimientos con casos igualmente posibles.

Significado frecuencial. Se define la probabilidad como el número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse (Von Mises, 1952), aceptando la existencia teórica de dicho límite, cuya frecuencia relativa observada es una aproximación, pues no se obtiene el valor exacto de la probabilidad, es decir, sólo es una estimación.

Significado subjetivo. Es lo que se entiende cuando la regla de Bayes permite transformar las probabilidades a priori de varias causas, una vez observadas sus consecuencias, en probabilidades a posteriori que incluye información de los datos observados.

Significado matemático. Diferentes autores a lo largo del siglo XX contribuyeron al desarrollo de una teoría matemática formalizada sobre la probabilidad. Kolmogorov dedujo una axiomática que han aceptado todas las escuelas, en la cual la probabilidad es simplemente un modelo matemático que podemos usar para describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios.

2.2. Demanda cognitiva

Stein et al. (2000) establecen distintos niveles de demanda cognitiva presentes en tareas matemáticas. Las autoras definen el concepto de demanda cognitiva como "el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para resolver exitosamente la tarea" (p. 11). En esta clasificación se encuentran las tareas de bajo nivel de demanda cognitiva y de alto nivel de demanda cognitiva.

Las tareas con *bajo nivel de demanda cognitiva* consisten en memorizar o utilizar algoritmos en ausencia de un contexto o significado adicional, como se describen a continuación:

Tareas de memorización. Son aquellas que reproducen hechos aprendidos previamente como reglas, fórmulas o definiciones de memoria, pues para su resolución no existe un procedimiento. En cuanto a las instrucciones, estas no son ambiguas.

Tareas de procedimiento sin conexión. Son definidas como aquellas enfocadas en producir respuestas correctas en lugar de desarrollar comprensión matemática. En estas tareas se utilizan procedimientos, algoritmos, ya sean específicamente solicitados o bien basados en las instrucciones de la tarea. El trabajo requerido no tiene conexión con los conceptos o significados que subyacen a los procedimientos que están siendo utilizados.

Por otro lado, las tareas con *alto nivel de demanda cognitiva* son aquellas en que los estudiantes pueden también utilizar procedimientos, pero de una forma tal que construyan conexiones para comprender conceptos y significados. Además, se busca que exploren y razonen para llegar a una respuesta que tenga sentido y se pueda justificar.

Tareas de procedimiento con conexión. Son aquellas cuyos procedimientos sugeridos (implícita o explícitamente) para su resolución, tienen una conexión cercana con ideas conceptuales que subyacen de dichos procedimientos. Este tipo de tareas pueden ser representadas de múltiples maneras como diagramas visuales, símbolos, situaciones problemas, etc. Su principal foco es la comprensión.

Tareas de hacer matemática. Son aquellas que exigen un pensamiento complejo y no algorítmico, pues no hay un camino sugerido para su resolución, por lo que exige que los estudiantes exploren y comprendan la naturaleza de los conceptos, procesos o relaciones matemáticas. Exigen un esfuerzo cognitivo considerable y pueden implicar cierto nivel de ansiedad para el estudiante debido a la impredecible naturaleza de la solución del problema.

3. Antecedentes

Diversos autores han estudiado el tratamiento que se da a la temática de probabilidad en los libros de texto, destacando entre sus investigaciones el análisis de las situaciones problemas, lenguaje, conceptos-definiciones, contextos, entre otros. En el siguiente apartado se presentan algunos de los estudios más relevantes sobre libros de texto, tanto en estadística como en probabilidad.

Gea et al. (2013) analizan las situaciones problemas sobre la correlación en ocho libros de texto en el primer curso de Bachillerato. Entre los aspectos estudiados se encuentran el signo de la correlación, la intensidad de la dependencia, los contextos de aplicación, clasificando estos últimos en seis categorías: fenómenos biológicos, estudio en ciencias, deportivos, economía, educativos, sociología y demografía. De este análisis se destaca el gran número de tareas descontextualizadas, entre las que se encuentra la categoría *expresión matemática*, lo que se contradice a las recomendaciones en la enseñanza actual, pues, de acuerdo con Wild y Pfannkuch (1999) uno de los modos fundamentales de razonamiento estadístico es la integración de la estadística con el contexto.

Vásquez et al. (2019) utilizan la adaptación de los niveles de demanda cognitiva creada por Salcedo (2015) para analizar esta en las tareas matemáticas relacionadas con estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Primaria chilena. En cada texto, se consideraron ejercicios, actividades y/o problemas de unidades y lecciones que abordaban temas de estadística y/o probabilidad, clasificándolas de acuerdo con la taxonomía antes mencionada. Se analizaron un total de 189 tareas matemáticas, entre las cuales un bajo porcentaje se vincula al estudio de la probabilidad, centrándose la mayor cantidad en 2° y 4° de Primaria, reflejando un desequilibrio en cuanto a la cantidad de tareas presentadas en los libros de texto para el aprendizaje de la probabilidad y la estadística, lo que va en desmedro del desarrollo de una adecuada cultura probabilística. Además, en cuanto a la demanda cognitiva, se observó un predominio de tareas de alto nivel de demanda cognitiva, donde destacan las que se vinculan a procedimientos con conexión. Por esto, se hace necesario que el profesorado esté atento a la hora de planificar sus clases, de manera que este desequilibrio presente en los libros de texto no sea reflejado en el aprendizaje de los estudiantes.

Vásquez y Alsina (2015b) presentan un análisis sobre la presencia de la probabilidad a partir de sus significados, mediante la identificación de situaciones problemas, elementos lingüísticos y conceptos-definiciones. Se analizaron seis libros de texto edición 2013 distribuidos por el MINEDUC. Los resultados arrojan diferencia en los significados de la probabilidad trabajados a través de situaciones problemas, observándose escasamente aquellas vinculadas al enfoque subjetivo, al contrario de las vinculadas al significado frecuencial. En cuanto al lenguaje común y probabilístico, se presenta una predominancia de expresiones vinculadas al significado frecuencial y laplaciano, manifestándose un mayor énfasis en el desarrollo de la probabilidad desde dichos enfoques. Los conceptos y definiciones trabajados en los libros de texto muestran que estos están asociados en su mayoría a los significados frecuencial, intuitivo y clásico de la probabilidad, y en menor frecuencia aquellos relacionados al significado subjetivo. Finalmente, los autores recalcan la gran influencia de las directrices de la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) en los libros de texto, y un desajuste en cuanto a lo establecido en las directrices curriculares chilenas.

Por su parte, Gómez-Torres et al. (2014) estudian el tratamiento de los significados de la probabilidad en 10 libros de texto españoles, a través de la identificación y clasificación de conceptos y propiedades presentes en ellos. En cuanto a los conceptos, se observaron aquellos propios del significado intuitivo en todos los ciclos, mientras que los significados clásico, frecuencial y subjetivo, sólo en los últimos dos. En la Serie 2 se presenta con mayor atención conceptos del significado clásico, mientras que la Serie 1 también desarrolla conceptos del significado frecuencial. Por otro lado, en cuanto a las propiedades, se observa la presencia continua de propiedades del significado intuitivo, mientras que las propiedades fundamentales de los significados clásico y frecuencial se presentan gradualmente, con mayor frecuencia del primero y escasa atención a la experimentación. Los autores destacan que la presentación de la probabilidad en los libros de texto podría conducir a un uso diferenciado de los significados de la probabilidad dependiendo de la editorial y el ciclo educativo, por lo que se sugiere mejorar la formación de docentes en la probabilidad y su estadística.

Seguidamente, Gómez-Torres et al. (2015) analizan, a través de situaciones problemas, lenguaje, procedimientos, propiedades y argumentos, el tratamiento que se da a los significados de la probabilidad en 10 libros de texto de Educación Primaria en España. De sus resultados destaca el análisis hecho sobre el lenguaje utilizado, observando un uso frecuente de expresiones cotidianas sobre formales, el menor uso de lenguaje simbólico a diferencia del numérico, presentándose los números enteros desde el primer ciclo, mientras que se presentan las fracciones en segundo ciclo, junto con la aparición del significado frecuencial y clásico. El uso del lenguaje tabular se asocia en un inicio a la presentación de datos, avanzando para el final de la educación primaria al uso de tablas de frecuencias. Se encuentra presente en las series analizadas los diagramas de barras, de sectores, pictogramas y diagramas de árbol, aunque de este último no se hace una conexión explícita con el cálculo de eventos compuestos. Los autores destacan la riqueza del lenguaje en los libros de texto como componente comunicativo para el desarrollo de la alfabetización probabilística, destacando especialmente el verbal y numérico.

4. Método

4.1. Paradigma y tipo de investigación

La presente investigación es de tipo cualitativa (Salgado, 2007), sustentada en el paradigma interpretativo, el que se caracteriza por no concebir la medición de la realidad, sino su percepción e interpretación, como una realidad cambiante, dinámica, dialéctica, que lleva en sí sus propias contradicciones (Rivera 2010).

4.2. Diseño y técnica de investigación

Para estudiar las actividades de probabilidad en libros de texto se ha recurrido al diseño de estudio de casos, que se entiende como el "estudio de un fenómeno contemporáneo", considerando los textos distribuidos por el MINEDUC y de una editorial privada de amplio uso a nivel nacional.

Respecto de la técnica de investigación, se utiliza el análisis de contenido, definido como una "técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto" (Krippendorff, 1990, p. 28). El proceso de análisis de contenido se ha realizado de forma cíclica e inductiva, como se recomienda en el análisis de datos cualitativos. Se realizaron varias lecturas de los capítulos, elaboración progresiva de las categorías y una revisión continua y constante antes de llegar a los resultados planteados.

Las unidades de análisis consideradas en este estudio están basadas en investigaciones previas y el marco teórico desarrollado en el capítulo anterior. Estas se detallan a continuación:

Significados de la probabilidad. Se hace referencia a los distintos significados asociados al concepto de probabilidad. Hemos utilizado los definidos por Batanero (2005) los cuales son: 1) intuitivo; 2) clásico o laplaciano; 3) frecuencial; 4) subjetivo; 5) matemático.

Niveles de demanda cognitiva. Se consideran los cuatro niveles definidos por Stein et al. (2000): 1) tareas de memorización; 2) tareas de procedimiento sin conexión; 3) tareas de procedimiento con conexión; 4) hacer matemática.

Contextos. Se destaca la importancia de relacionar problemas planteados en un contexto dado, tal como se plantea en los Marcos y pruebas de evaluación PISA (OCDE, 2013). Se consideran los cuatro contextos definidos en el marco de matemáticas para clasificar las preguntas elaboradas por dicho estudio. Estos son: 1) *Personal*. Se centra en actividades propias del estudiante, su familia y grupo de iguales, tales como compras, transporte, deporte, viajes, etc.; 2) *Profesional*. Las preguntas pueden referirse a cualquier nivel de la mano de obra, desde el trabajador no especializado hasta profesionales. Se incluyen actividades tales como cálculo de costos, contabilidad, control de calidad, mediciones, etc.; 3) *Social*. Se centra en la comunidad, local, nacional o global, entre los que se pueden encontrar los sistemas electorales, las políticas públicas, la demografía, estadísticas nacionales, etc., destacando la perspectiva comunitaria; 4) *Científico*. Se relaciona con la aplicación de la matemática al mundo natural y, también con la ciencia y la tecnología. Pueden incluir problemas relacionados con la meteorología, la ecología, la medicina, la genética y el propio mundo de las matemáticas.

En cada sección de los libros de texto se analizaron las actividades sugeridas para los estudiantes, es decir, ejemplos, ejercicios, talleres, evaluaciones y desafíos. El análisis se realizó en cada actividad, la que puede estar formada por diversas tareas, y se contabilizaron todas las categorías observables en las unidades de análisis, que, en el caso de los contextos, la demanda cognitiva o los significados de la probabilidad pueden ser más de uno. Esta situación hace que la suma de los porcentajes sea mayor a 100 en las tablas de resumen de la información.

Finalmente, para asegurar la objetividad en la clasificación de las actividades según cada unidad de análisis, especialmente los significados de probabilidad y nivel de demanda cognitiva, cada integrante de la investigación analizó y clasificó las diferentes actividades de forma personal, para luego ser comparadas en conjunto. Se consideró el criterio de coincidencia del 75%. De esta forma se logró categorizar todas las actividades propuestas en los cuatro libros de texto, llegando a un completo acuerdo de las unidades de análisis que demandaban mayor atención.

Cada categoría de las unidades de análisis será explicada y ejemplificada en el apartado de resultados.

4.3. Contexto y muestra

En Chile, actualmente, existen tres grupos de establecimientos educacionales, cada uno con un tipo de financiamiento distinto. Por una parte, los establecimientos municipales se financian fundamentalmente de aportes del Estado, recibiendo un monto por estudiante que asiste a clases y son administrados por los municipios. Por otra parte, los establecimientos privados son financiados únicamente por aportes de cada estudiante matriculado. Por último, existen los establecimientos particulares subvencionados, financiados de manera compartida entre el estado chileno y los estudiantes (Bellei et al., 2010).

Para este estudio, se eligió una de las editoriales más usadas en la educación pública y privada en Chile. Por un lado, la editorial SM se ha adjudicado la licitación de las ediciones de textos para el MINEDUC, los que son utilizados en los centros públicos y particulares subvencionados y las ediciones utilizadas en los centros privados, como se detallan en la Tabla 1.

Tabla 1. Libros de texto incluidos en el análisis

Codigo	Nivel	Título	Autores	Editorial	Edición
T1	7° Básico	Texto del estudiante Matemática 7° Básico	Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B. y Rupin, P.	SM	2017
T2	8° Básico	Texto del estudiante Matemática 8° Básico	Catalán, D., Pérez, B., Prieto, C. y Rupin, P.	SM	2017
T3	7° Básico	Sé protagonista Matemática 7° Básico	Schwerter, S., Aguilar, M. y Maulén, M.	SM	2014
T4	8° Básico	Sé Protagonista. Matemática 8° Básico	Castro, C., Curiche, A. y Vega, M.	SM	2014

Los códigos T1 y T2 hacen referencia al texto del estudiante de Matemática de 7° y 8° básico, respectivamente, cuya edición se realiza para el MINEDUC y es utilizada en las instituciones escolares subvencionadas por el Estado. A su vez, los códigos T3 y T4 hacen referencia en adelante al libro de texto Sé Protagonista de 7° y 8°, respectivamente. Si bien la editorial es la misma que la de los textos públicos anteriormente mencionados, esta edición es creada para ser utilizada en instituciones escolares particulares, debiendo pagar el costo asociado a estos.

5. Resultados

5.1. Actividades analizadas

En la Tabla 2 se muestra la distribución de las actividades analizadas para esta investigación. De ella se observa que los libros de texto editados para el MINEDUC concentran la mayor cantidad de actividades relacionadas con probabilidad, reuniendo entre ambos cursos (7° y 8°) el 60% de ellas. La cantidad de actividades fluctúa entre 42 y 80, en el texto de 8° de la edición privada y 7° del texto editado para el MINEDUC, respectivamente.

Tabla 2. Frecuencia y porcentaje de las actividades analizadas

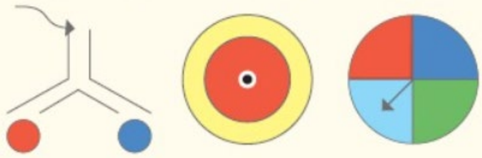
Curso	Frecuencia	Porcentaje
7° M (T1)	80	30,5
8° M (T2)	79	30,2
7° P (T3)	61	23,3
8° P (T4)	42	16,0
Total	262	100

5.2. Significados de la probabilidad

Esta unidad de análisis está relacionada con los significados de la probabilidad que establece Batanero (2005). De acuerdo con el análisis de los libros de texto, se han observado tareas en las que intervienen los siguientes significados.

Significado intuitivo. Tiene relación con el uso de la probabilidad en situaciones de incertidumbre mediante expresiones coloquiales que expresan el grado de creencia frente a dichas situaciones. El único ejemplo encontrado se muestra en la Figura 1, en ella el estudiante debe comparar los grados de creencia de tres situaciones diferentes, eligiendo la que tiene mayor probabilidad asignada.

2. Analiza la siguiente situación.
En un parque de diversiones se dispone de tres tipos de juegos en los que gana el participante que acierte al color rojo.



¿En cuál de los juegos anteriores es más probable ganar? Justifica tu elección.

Figura 1. Ejemplo de actividad de significado intuitivo (T1, p. 352)

Significado clásico. El uso de la probabilidad relacionado con este significado se observa en actividades que enfocan su desarrollo en el uso práctico del cálculo de probabilidades de sucesos sencillos, aplicando la razón entre casos favorables y casos totales. Un ejemplo de esta categoría se muestra en la Figura 2, donde el estudiante debe calcular la razón entre casos favorables y totales para obtener la respuesta a la pregunta planteada.

17. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una cara y un sello al lanzar dos monedas simultáneamente?
A. 0,25
B. $0,\overline{3}$
C. 0,5
D. 0,75

Figura 2. Ejemplo de actividad de significado clásico (T4, p. 254)

Significado frecuencial. Las actividades en las cuales se desarrolla este significado utilizan la probabilidad a través de la aproximación de la frecuencia relativa observada en experimentos que se pueden repetir un gran número de veces. La Figura 3 muestra un ejemplo de actividad que abarca la probabilidad desde el enfoque frecuencial, en la cual se pide al estudiante comparar las probabilidades de cada suceso y estimar el porcentaje de cada color de bolitas.

6. Considera el experimento de extraer una bolita, registrar su color en la tabla, devolverla, y repetirlo 2000 veces.

a. Completa la tabla.

Extracción de una bolita		
Color	f	f_{rel}
Rojo	1329	
Azul	671	

b. ¿Qué observas de las probabilidades frecuenciales?

c. ¿Qué se espera de la probabilidad de cada suceso?

d. Estima el porcentaje de bolitas de cada color.

Figura 3. Ejemplo de actividad de significado frecuencial (T1, p. 345)

Otros. Esta categoría se ha creado, dado que estas actividades no se han podido asociar a alguno de los cinco significados de la probabilidad definidos por la literatura. La Figura 4 muestra un ejemplo de este tipo de actividades, en la cual el estudiante debe clasificar distintos experimentos según su naturaleza.

Ejercicios resueltos

1. Clasifica cada experimento como determinístico o aleatorio.

a. Abrir un libro y observar el número de la página. → *Aleatorio*

b. Lanzar un dado y observar el número de puntos obtenido. → *Aleatorio*

c. Calcular el promedio de mis notas en Matemática a fin de año. → *Determinístico*

d. Analizar si el agua a 100 °C inicia su proceso de ebullición. → *Determinístico*

e. Extraer una bolita roja de una urna con bolitas rojas y azules. → *Aleatorio*

f. Observar si amanece mañana. → *Determinístico*

g. Predecir el ganador de una competencia de atletismo. → *Aleatorio*

Figura 4. Ejemplo de actividad categoría Otros (T3, p. 236)

En la Tabla 3 se muestra la distribución de los significados de la probabilidad en las actividades analizadas. En ella se observa que sobre el 60% de las actividades, en cada uno de los textos, trabaja la probabilidad desde el enfoque clásico o laplaciano. El enfoque frecuencial se trabaja en una menor proporción, alcanzando un 31% de las actividades en la edición privada del libro de texto de 7° básico. No se observan actividades que trabajen el significado subjetivo ni matemático de la probabilidad, y sólo se presenta una actividad que abarca la probabilidad desde el enfoque intuitivo.

Tabla 3. Frecuencia (y porcentaje) de las actividades analizadas según significado de probabilidad

Significado	MINEDUC		SM		Total
	7°	8°	7°	8°	
Intuitivo	1(1,3)	0(0)	0(0)	0(0)	1(0,4)
Clásico	49(61,3)	77(97,5)	38(62,3)	35(83,3)	199(76)

Tabla 3. Frecuencia (y porcentaje) de las actividades analizadas según significado de probabilidad

Significado	MINEDUC		SM		Total
	7°	8°	7°	8°	
Frecuencial	19(23,8)	0(0)	19(31,1)	0(0)	38(14,5)
Otros	12(15)	2(2,5)	4(6,6)	8(19)	26(9,9)
Total	80(100)	79(100)	61(100)	42(100)	262(100)

5.3. Nivel de demanda cognitiva

Esta unidad de análisis está relacionada con definir y caracterizar los distintos niveles de demanda cognitiva presentes en las tareas matemáticas establecidos por Stein et al. (2000). De acuerdo con el análisis de los libros de texto, se han observado tareas que exigen los siguientes niveles de demanda cognitiva:

Memorización. En estas actividades los estudiantes deben clasificar experimentos dados, según definiciones aprendidas, reconocer elementos del espacio muestral y casos favorables en experimentos y eventos simples, respectivamente. Además, deben leer información presentada a través de imágenes o tablas. En el ejemplo de la Figura 5 el estudiante debe definir algunos conceptos probabilísticos.

1 Define con tus palabras cada concepto. (4 puntos)

a. Experimento.
b. Evento.
c. Probabilidad.
d. Aleatorio.

Figura 5. Ejemplo de actividad de memorización (T2, p.336)

Procedimiento sin conexión. Este tipo de actividades se caracterizan por exigir al estudiante reconocer eventos simples y compuestos por medio de los elementos del espacio muestral, describir este y reconocer casos favorables en experimentos compuestos de baja complejidad mediante diagramas de árbol. Además, deben realizar cálculos simples a través del principio multiplicativo para determinar la cardinalidad del espacio muestral en situaciones dadas. En la Figura 6 se presenta un ejemplo en el cual el estudiante debe definir los casos favorables de cada suceso.

2. Determina el conjunto de casos favorables para cada suceso.

a. Suceso A: obtener un número mayor que 4 al lanzar un dado.
b. Suceso B: obtener un número primo al lanzar un dado.
c. Suceso C: obtener un número impar al lanzar un dado.

Figura 6. Ejemplo de actividad de procedimiento sin conexión (T1, p. 348)

Procedimiento con conexión. Estas actividades se caracterizan por exigir comprensión de los conceptos involucrados. En ellas los estudiantes avanzan al cálculo de probabilidades utilizando la fórmula establecida por Laplace, o bien estimando estas a través de la interpretación de gráficos y frecuencias, además de analizar y comparar probabilidades de eventos compuestos diferentes, dentro de un mismo experimento. En el ejemplo de la Figura 7 el estudiante debe hacer uso de la fórmula trabajada en el significado clásico, recordando y reconociendo conceptos como casos favorables y casos totales (espacio muestral) en el contexto dado.

8. Se anota la venta de 544 productos de una cafetería. Estima la probabilidad de que al escoger una persona, esta haya comprado un café con endulzante.

Venta de una cafetería	
Tipo de café	Frecuencia
Con endulzante	204
Sin endulzante	340

Figura 7. Ejemplo de actividad de procedimiento con conexión (T1, p. 345)

En la Tabla 4 se muestra la distribución de los niveles de demanda cognitiva en las actividades analizadas. Con respecto a las tareas de memorización, se observa que los libros de texto editados para el ministerio presentan más actividades de este tipo que los de edición privada, en ambos niveles. Las actividades de procedimiento sin conexión están presentes en todos los textos analizados, el porcentaje en el T1 comparándose con el T3 es mayor, mientras que, la diferencia no es significativa en las actividades de los textos de 8° año. En el nivel de tareas con conexión se presentaron mayoritariamente en los T3 y T4. Con los datos obtenidos se puede dar cuenta que el análisis arroja que hay mayor porcentaje de tareas de memorización en los textos públicos y el mayor porcentaje de tareas con conexión se concentra en los textos privados.

Tabla 4. Frecuencia (y porcentaje) de las actividades analizadas según nivel de demanda cognitiva

Demanda cognitiva	MINEDUC		SM		Total
	7°	8°	7°	8°	
Memorización	11(13,8)	9(11,4)	5(8,2)	2(4,8)	27(10,3)
Procedimiento sin conexión	33(41,3)	23(29,1)	20(32,8)	14(33,3)	90(34,4)
Procedimiento con conexión	40(50)	50(63,3)	39(63,9)	31(73,8)	160(61,1)
Total	80(100)	79(100)	61(100)	42(100)	262(100)

5.4. Contexto

Esta unidad de análisis tiene relación con los cuatro contextos descritos en los marcos y pruebas de evaluación PISA (OCDE, 2013). Respecto al entorno en el cual están descritas las actividades analizadas dentro del libro de texto, podemos observar los siguientes contextos.

Contexto personal. Las actividades se relacionan con acciones que una persona puede realizar en un día normal. En la Figura 8 se observa este tipo de ambiente personal porque hace referencia a un viaje a una ciudad en la cual se realiza un tour para una cantidad de turistas.

Aplica

5. En un *tour* por Valparaíso hay 20 turistas: 8 son franceses, 5 japoneses, 6 ingleses y 1 alemán.

a. Determina los casos favorables para el suceso "que el primero en subir al bus sea japonés".

b. ¿Cuál es la probabilidad de este evento, si todos tienen la misma probabilidad de subir primero al bus?

Figura 8. Ejemplo de actividad de contexto personal (T1, p. 348)

Contexto profesional. Son actividades que aluden a un contexto netamente laboral. En la Figura 9 se detalla una actividad donde se menciona una empresa y se pide las combinaciones posibles de su producto.

3. Resuelve los problemas.

a. Una determinada zapatilla se fabrica en 3 estilos diferentes y en 4 colores distintos. Si la zapatería desea mostrar a su clientela pares de zapatillas en todos los estilos y colores disponibles, ¿cuántos pares distintos deberán colocar en la vitrina?

Figura 9. Ejemplo de actividad de contexto profesional (T2, p. 339)

Contexto social. Aquí se incluyen las actividades centradas en la sociedad, ya sea una comunidad local o global. Por ejemplo, en la Figura 10 se puede observar que la actividad se centra en una patente, objeto que individualiza dentro de una comunidad al vehículo.

7. **Desafío.** Supón que una patente de automóvil está formada por cuatro letras seguidas de dos números. Las letras pueden ser tomadas de las 27 del abecedario castellano y los números, de los dígitos del 0 al 9.

a. Si se elige una patente de automóvil al azar, ¿de cuántas formas se podría elegir?

b. Si se elige una placa de automóvil al azar, ¿de cuántas formas se podría elegir de tal manera que no se repita ningún número ni letra?

Figura 10. Ejemplo de actividad de contexto social (T2, p. 343)

Contexto científico. Son actividades que hacen uso de la matemática dentro del mundo de la ciencia. En la Figura 11 se muestra un ejemplo de estas actividades, en el que se menciona un laboratorio y la creación de un medicamento específico, es decir, se está trabajando una situación propia de la aplicación de las matemáticas en la ciencia.

1. Un laboratorio farmacéutico crea dos medicamentos, alercín y alergiol, para mejorar los síntomas de la alergia al polen. Se realiza un experimento para saber cuán eficaces son estos medicamentos, obteniéndose que alercín logra que 72 pacientes mejoren de 90 a los que se le aplicó, mientras que alergiol logra mejoras en 42 de 75 pacientes. ¿Cuál de los dos medicamentos es más eficaz? Explica tu procedimiento.

Figura 11. Ejemplo de actividad de contexto científico (T1, p. 357)

Otros. Aquí se presentan las actividades donde el contexto no tuvo cabida en ninguno de los anteriormente mencionados. Se incluyen aquellas que se desarrollan en un contexto de juegos de azar, sin la participación de uno o más personajes y actividades sin contexto. En la Figura 11, se observa una actividad formulada sin contexto claro.

15. ¿Cuántas claves distintas se pueden formar con una vocal seguida de un dígito?

A. 5

B. 10

C. 45

D. 50

Figura 12. Ejemplo de actividad cuyo contexto no se encuentra en las categorías anteriores (T4, p. 254)

En la Tabla 5 se muestra la distribución de los contextos involucrados en las actividades analizadas en los cuatro libros de texto. De esta se puede observar que no se presenta ninguna actividad asociada a un contexto social en el T1, siendo esta unidad la que menos frecuencia presenta en la totalidad de las actividades. Por otro lado, el contexto definido que más se manifiesta en todos los libros de texto es el personal, alcanzando el 42% en el T4. Cabe mencionar que la tabla muestra que las actividades donde el contexto no está definido dentro de las otras son las que más frecuencia presentan.

Tabla 5. Frecuencia (y porcentaje) de las actividades analizadas según su contexto

Contexto	MINEDUC		SM		Total
	7°	8°	7°	8°	
Personal	20(25)	23(29,1)	19(31,1)	18(42,9)	80(30,5)
Profesional	3(3,8)	3(3,8)	1(1,6)	1(2,4)	8(3,1)
Social	0(0)	2(2,5)	1(1,6)	3(7,1)	6(2,3)
Científico	2(2,5)	3(3,8)	2(3,3)	1(2,4)	8(3,1)
Otros	56(70)	48(60,8)	47(77)	30(71,4)	181(69,1)
Total	80(100)	79(100)	61(100)	42(100)	262(100)

6. Conclusión

En esta investigación se han categorizado las actividades propuestas en los libros de texto para la enseñanza de la probabilidad, donde se obtuvieron importantes hallazgos en sus análisis, comparando con aportes realizados por distintos autores en investigaciones anteriores. Además, estas unidades de análisis pueden ser de utilidad para estudios en otros niveles y contenidos matemáticos.

Respecto de los significados de la probabilidad que intervienen en las actividades analizadas, estos no condicen con lo establecido en las actuales bases curriculares, concordando con lo señalado en Vásquez y Alsina (2015b) en su estudio sobre objetos matemáticos en libros de texto chilenos de Educación Básica. En cada uno de los libros de texto utilizados en el presente estudio se da tratamiento a la probabilidad desde los enfoques frecuencial y clásico, dejando de lado aquellas actividades que utilizan el significado intuitivo. Estos resultados, al diferir con lo mencionado en las directrices curriculares en el 7° año, hacen necesario un rol activo del profesorado para cubrir esta falta de contenido. En este sentido, es importante que los profesores se encuentren informados sobre las actualizaciones de las bases curriculares (MINEDUC, 2018) para desarrollar una visión completa de la probabilidad, impidiendo desarrollar vacíos en la enseñanza al no trabajar estos contenidos desde todas las aristas o enfoques correspondientes.

Sobre el total de las actividades analizadas, se presenta un predominio de aquellas con alto nivel de demanda cognitiva, específicamente de las tareas de procedimiento con conexión, lo que concuerda con lo expuesto por Vásquez et al. (2019) en su estudio sobre cómo se fomenta el estudio de la estadística y la probabilidad en los libros de texto chilenos de 1° a 6° de Educación Básica. Sin embargo, al comparar las ediciones: privada y pública, se observa una pequeña tendencia a desarrollar actividades de baja demanda cognitiva por parte de las ediciones públicas, mientras que las ediciones privadas presentan una ventaja respecto a las de alta demanda. Es por esto que los profesores deben prestar atención a la hora de planificar las clases, para soslayar la disparidad presente en los libros de texto, y con ello reducir estas pequeñas desigualdades entre la enseñanza de la educación pública y privada.

Con respecto a los contextos de las actividades analizadas, los resultados obtenidos no tienen relación con lo expuesto por Gea, Batanero, Contreras y Cañadas (2013), pues, se presentan algunas diferencias en las categorías definidas. Debido a la temática estudiada en la presente investigación, se añadió a la categoría sin contexto, aquellas actividades cuyos contextos no se adherían a las categorías establecidas, denominando este nuevo grupo otros. Dentro de este se encuentran la mayor cantidad de actividades, relacionadas principalmente a contextos de juegos de azar sin la participación de personajes y la aplicación de algoritmos.

En cuanto a la comparación entre los textos de uso público y privado, se observan características similares, con diferencias puntuales en algunos elementos de análisis, las que generan ventajas y desventajas de unos sobre otros, pero que no permiten generalizar cómo se trabaja esta temática en ediciones distribuidas por el MINEDUC ni en aquellas privadas. A pesar de esto, es importante tener en consideración los resultados expuestos, especialmente en la unidad de análisis de significados de la probabilidad y en la de contexto.

En cuanto a la primera, se recomienda trabajar esta temática a partir de actividades que utilicen un lenguaje cercano al estudiante, para así retomar la noción intuitiva que tienen respecto del concepto de probabilidad, debido a la importancia de abarcar progresivamente el desarrollo de este contenido al transitar por los distintos enfoques.

Refiriéndose al contexto, la alta frecuencia de actividades asociadas a juegos de azar se contrasta con la tendencia a promover la alfabetización probabilística descrita por Batanero (2006), como la necesidad de dar al hombre herramientas para orientar la acción ante situaciones de incertidumbres presentes en la vida cotidiana o profesional, por lo que se sugiere que en la enseñanza de la probabilidad estén presentes situaciones de diversos contextos, poniendo mayor énfasis en las categorías correspondientes a profesional, social y científico.

Entre las limitaciones de este trabajo está la muestra de textos considerados en este análisis, dado que con dos cursos analizados no es suficiente para evaluar todo el proceso de enseñanza y generalizar algunos aspectos de este. Además, el considerar solo dos editoriales no permite obtener una visión general de cómo se presenta esta temática en los libros de textos públicos y privados.

Finalmente, entre las proyecciones derivadas de esta investigación se encuentran: 1) realizar estudios con libros de texto de otros países, para poder así comparar resultados; 2) analizar las actividades sobre probabilidad en libros de texto de todos los niveles de Enseñanza Básica y Media; 3) estudiar la comprensión de la probabilidad tanto en estudiantes de 7° y 8° Básico como de profesores que imparten clases en estos niveles, de acuerdo con la caracterización entregada en este estudio; 4) consultar a los profesores de matemática sobre sus criterios para la selección de actividades y su visión sobre la calidad de las mismas en los libros de texto.

Referencias

[1] BATANERO, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 247-263.

[2] BATANERO, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. En P. FLORES y J.L. LUPIÁÑEZ (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y azar* (pp. 1-17). Sociedad de Educación Matemática Thales.

[3] BELLEI, C., CONTRERAS, D. y VALENZUELA J. P. (2010). *Ecos de la revolución pingüina: avances, debates y silencios en la reforma educacional*. Santiago: Pehuén.

[4] BENNETT, D. J. (1999). *Randomeness*. Cambridge: Harvard University Press.

[5] BNC (2020). *Educar en pandemia: textos escolares y su futuro*. Valparaíso: Biblioteca del Congreso Nacional de Chile.

[6] CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

[7] DÍAZ-LEVICOY, D., GIACOMONE, B., LÓPEZ-MARTÍN, M. M., y PIÑEIRO, J. L. (2016). Estudio sobre los gráficos estadísticos en libros de texto digitales de educación primaria española. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 20*(1), 133-156.

[8] EVERITT, B. (1999). *Chance rules: an informal guide to probability, risk and statistics*. New York,

NY: Copernicus, Springer-Verlag. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-77415-2

[9] GAL, I. (2012). Developing probability literacy: needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula. En S. J. CHO (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-7). Seúl: ICMI.

[10] GEA, M. M., BATANERO, C., CONTRERAS, J. M. y CAÑADAS, G. (2013). Variables y contextos en los problemas de correlación: Un estudio de los libros de texto. En INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA (Ed.), *III Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos* (pp. 1-9). Costa Rica: Instituto Tecnológico de Costa Rica.

[11] GÓMEZ-TORRES, E., CONTRERAS, J. M. y BATANERO, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 73-87). Alicante: SEIEM.

[12] GÓMEZ-TORRES, E., ORTIZ, J. J. y GEA, M.M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en los libros de texto españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 5*, 49-71.

[13] HOLMES, P. (1980). *Teaching statistics 11 - 16*. Slough: Foulsham Educational for the Schools Council.

[14] KRIPPENDORFF, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.

[15] LAPLACE, P. S. (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. Madrid: Alianza Editorial [Trabajo original publicado en 1814].

[16] MINEDUC (2009). *Propuesta ajuste curricular: Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios.* Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

[17] MINEDUC (2012). *Bases curriculares 2012: Educación Básica*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

[18] MINEDUC (2018). *Bases curriculares 2018: Educación Básica*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

[19] OCDE (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012*. Madrid: Secretaría General Técnica.

[20] RIVERA, Y. (2010). ¿Cómo se pueden aplicar los distintos paradigmas de la investigación científica a la cultura física y el deporte? *Revista Electrónica Ciencia e Innovación Tecnológica en el Deporte, 5*(1), 1-10.

[21] SALCEDO, A. (2015). Exigencia cognitiva de las actividades de estadística en textos escolares de Educación Primaria. En J. M. CONTRERAS, C. BATANERO, J. D. GODINO, G. CAÑADAS, P. ARTEAGA, E. MOLINA, M. M. GEA y M. M. LÓPEZ-MARTÍN (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria 2* (pp. 307-315). Granada: Universidad de Granada.

[22] SALGADO, A. (2007). Investigación cualitativa: diseños, evaluación del rigor metodológicos y retos. *Liberabit, 13*(13), 71-78.

[23] STEIN, M. K., SMITH, M. S., HENNINGSEN, M. y SILVER, E. A. (2000). *Implementing standards based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York, NY: Teachers College Press.

[24] VÁSQUEZ, C. y ALSINA, Á. (2015a). Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesorado de Educación Primaria sobre Probabilidad: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática, 29*(52), 681-703. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a13

[25] VÁSQUEZ, C. y ALSINA, Á. (2015b). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 19*(2), 441-462.

[26] VÁSQUEZ, C., PINCHEIRA, N., PIÑEIRO, J. L. y DÍAZ-LEVICOY, D. (2019). ¿Cómo se promueve el aprendizaje de la estadística y la probabilidad? Un análisis desde los libros de texto para la Educación Primaria. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática, 33*(65), 1133-1154. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a08

[27] VON MISES, R. (1952). *Probabilidad, estadística y verdad*. Madrid: Espasa- Colpe. [Trabajo original publicado en 1928].

[28] WILD, C. J. y PFANNKUCH, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

Sobre los autores:

Nombre: Matías Beltrán-Rodríguez
Correo Electrónico: matias.beltran@alu.ucm.cl
Institución: Universidad Católica del Maule, Chile.

Nombre: María José General-Leiva
Correo Electrónico: maria.general@alu.ucm.cl
Institución: Universidad Católica del Maule, Chile.

Nombre: Tamara Torres-Aravena
Correo Electrónico: tamara.torres@alu.ucm.cl
Institución: Universidad Católica del Maule, Chile.

Nombre: Danilo Díaz -Levicoy
Correo Electrónico: dddiaz01@hotmail.com
Institución: Universidad Católica del Maule, Chile.

Experiencias Docentes

Valoraciones estudiantiles de una experiencia de recolección y análisis de datos

Student evaluations of an experience about data collection and analysis

Luis Rojas-Torres

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen XIV, Número 1, pp. 35–42, ISSN 2174-0410
Recepción: 22 Feb'24; Aceptación: 11 Mar'24

1 de abril de 2024

Resumen

El objetivo de este trabajo es evaluar las valoraciones de un grupo de estudiantes sobre un proyecto de recolección y análisis de datos en un curso de Estadística y Probabilidad. Para este objetivo se aplicó un cuestionario a 34 estudiantes del curso. Se obtuvo que la mayoría de los estudiantes reportaron que la actividad les ayudó a mejorar sus conocimientos de la materia, el manejo del software utilizado, la percepción de la importancia de la estadística y algunas habilidades en didáctica e investigación. El artículo brinda evidencia de que los proyectos son relevantes en el aprendizaje de la Estadística.

Palabras Clave: proyecto, actitud hacia la estadística, estadística aplicada

Abstract

The objective of this work is to analyze the evaluations of a group of students on a data collection and analysis project in a Statistics and Probability course. For this objective, a questionnaire was applied to 34 students of the course. It was obtained that most students reported that the activity helped them improve their knowledge of the subject, the management of the software used, the perception of the importance of statistics and some skills in didactics and research. The article provides evidence that the projects are relevant in learning Statistics.

Keywords: Project, statistics attitude, applied statistics

1. Introducción

Uno de los problemas más grandes que enfrenta la educación estadística es cuando las clases se basan en problemas irreales o peor aún, en problemas asociados a conjuntos de datos sin un contexto. De hecho, Batanero & Díaz (2011) indica que la Estadística es la ciencia de los datos y los datos no son simplemente números, sino números con contexto.

El problema de la educación estadística basada en números descontextualizados es que se pierde el sentido de la enseñanza de esta disciplina. La recolección y el análisis de los datos surgen de la necesidad de los individuos por resolver problemáticas que los ocupaban. La recolección de datos la realizaron distintos pueblos para conocer los bienes con que contaban. El cálculo de promedios se realizó para estimar las mediciones más esperables. El uso de estadísticos de asociación se implementó para estudiar las relaciones entre distintas variables. Por tanto, la Estadística desde su génesis tiene como objetivo solucionar problemas reales de los sujetos (Caro & García, 2011; Lightner, 1991).

El enfoque ontosemiótico (Godino et al., 2007) indica que uno de los elementos que dota de significado a un objeto matemático es el conjunto de problemas y situaciones en que se utiliza el objeto. Lo anterior permite al estudiantado comprender la utilidad que tiene el aprendizaje del objeto y entender la razón por la cual el objeto está siendo estudiado. Además, el objeto adquiere un referente en la mente del individuo, lo que le permite un manejo del objeto de forma más concreta (por ej. el promedio no solo será una fórmula, sino también una medida representativa apropiada de algunos conjuntos de datos).

Según Batanero (2001) algunos de los beneficios del uso de los datos reales en la enseñanza de la Estadística son que el estudiantado:

- Entenderá que la Estadística no se limita a problemas teóricos, con contextos forzados.
- Valorará más la información estadística.
- Será más propenso a colaborar con seriedad en los estudios que implican recolección de datos.
- Entenderá la importancia de obtener respuestas confiables.
- Podrá enlazar los conocimientos estadísticos con otras áreas disciplinares.

1.1 Proyectos

Una de las metodologías que permiten una experiencia significativa en el uso de los datos reales en la Estadística son los proyectos. El proyecto es una metodología en la que el estudiantado se plantea una pregunta relevante de investigación relacionada con un contexto de interés, la cual debe ser estudiada por medio de una pequeña investigación, en la que se generen varios productos públicos sobre los resultados obtenidos, tales como reportes, exposiciones o infografías (Sotomayor et al., 2021). El proyecto debe ir enlazado a un conjunto de contenidos específicos que se profundizarán en la ejecución del trabajo.

El proyecto es muy apropiado para la Estadística, ya que uno de los diseños de investigación más populares es el cuantitativo no experimental, cuyas fases características son la recolección de datos de un fenómeno de interés y el análisis estadístico apropiado. Ambas fases son muy relevantes dentro de la Estadística, ya que esta disciplina estudia con detalle cómo se deben recolectar y analizar los datos (Gómez, 2012).

Según Batanero (2001), los proyectos permiten que el estudiantado:

- Enlace la estadística con un tema de interés para el estudiantado, lo cual posibilita que se interesen colateralmente en la estadística requerida.
- Conozca los campos de aplicación de la Estadística.
- Se acerque a conceptos, propiedades, notaciones y representaciones estadísticas.
- Se apropie de técnicas y procedimientos discutidos en clase, como: recolección de datos, construcción de gráficos, cálculo de estadísticos, interpretación de resultados o uso de software.
- Desarrolle actitudes positivas hacia la Estadística, como valorar la utilidad de la disciplina para analizar datos o valorar la importancia de presentar claramente la información.

1.2.Objetivo del artículo

El objetivo de este estudio es adjuntar evidencia empírica de que el uso de experiencias reales de uso de datos es valorado positivamente por el estudiantado, como factor incidente en la comprensión de los conceptos, el desarrollo de actitudes positivas hacia la Estadística y el mejoramiento de habilidades tecnológicas y profesionales. Para lograr este objetivo se trabajó un proyecto de Estadística con un grupo de estudiantes universitarios y posteriormente, se les consultó sus apreciaciones sobre el trabajo realizado.

2. Metodología

2.1.Participantes

El trabajo se desarrolló con 34 estudiantes de un curso de Introducción a la Estadística y la Probabilidad de una carrera de docencia en matemática de Costa Rica. Este curso se imparte al inicio del tercer año de carrera, lo cual quiere decir que este grupo de estudiantes tenía un bagaje de dos años de conocimientos en aspectos de la disciplina.

2.2.Instrumento

El cuestionario aplicado a los estudiantes del curso de Estadística y Probabilidad estuvo compuesto por 17 preguntas de formato likert sobre la incidencia del proyecto en: a) la valoración de la Estadística (n=5, 5 preguntas), el proyecto me permitió comprender que muchos fenómenos pueden ser estudiados con la Estadística), b) la comprensión de conceptos básicos (n=4, el proyecto me ayudó a comprender cómo se interpretan diversos conceptos estadísticos), c) el dominio del software estadístico (n=4, el proyecto me permitió mejorar mis habilidades en el uso de Excel) y d) el crecimiento como docente/investigador (n=4, el proyecto me brindó ideas para el diseño de actividades en mis futuras clases de Estadística). Además, el instrumento presentó dos preguntas abiertas sobre los aprendizajes obtenidos durante el proyecto y sobre la disposición a utilizar proyectos similares cuando ejerzan como docentes.

2.3.Procedimiento

El proyecto

El proyecto realizado por los participantes de esta investigación consistió en estudiar algunos factores psicológicos asociados al aprendizaje de la geometría en grupos de octavo o noveno año de secundaria, por medio de cuestionarios y entrevistas semiestructuradas a docentes y estudiantes. Este proyecto se realizó en tríos, los cuales tuvieron que aplicar 100 cuestionarios a estudiantes de un mismo nivel de secundaria y realizar 3 entrevistas a estudiantes. Cada trío trabajó en un colegio distinto con estudiantes de octavo o noveno año. En total, se visitaron 15 secundarias ubicadas en distintas regiones de Costa Rica.

Para la recolección de datos se solicitó a una persona docente de matemática del colegio que concediera un espacio de aproximadamente 20 minutos de su clase, en 4 grupos distintos. La recolección de los datos, en su mayoría, fue con cuestionarios impresos. Es importante mencionar que varios tríos intentaron desarrollar una aplicación en línea, pero estos se toparon con problemas de ausencia de dispositivos y falta de internet. Luego de la recolección, se llevó a cabo un proceso de tabulación de las respuestas.

El cuestionario aplicado contenía preguntas de interés, ansiedad y autoeficacia en geometría y una sección de conocimientos básicos sobre cuadriláteros. En el análisis de datos se debía concluir cuál era el nivel de la población estudiada en cada una de las variables de interés, por medio del uso de distribuciones de frecuencias y estadísticos descriptivos. Este análisis se debía contrastar con elementos teóricos y empíricos, derivados de entrevistas a docentes y al estudiantado de secundaria. Entre los resultados obtenidos destacan a) los conocimientos en geometría presentaron un nivel bajo, b) el interés por la geometría fue medio-alto, c) el interés observado fue contrario a las predicciones realizadas por la mayoría de las personas docentes entrevistadas, ya que estas pronosticaron niveles bajos.

Los cuestionarios a las personas que implementaron el proyecto

Luego de la finalización del proyecto, se envió un cuestionario a las personas encargadas de aplicar el proyecto, con respecto a la valoración de la experiencia en dicha actividad. El cuestionario fue completado en la plataforma Google forms.

2.4.Análisis de datos

Una vez recolectados los datos, se calculó una puntuación promedio para cada uno de los cuatro componentes del cuestionario: incidencia de los proyectos en a) la valoración de la estadística, b) la comprensión de conceptos básicos, c) el dominio del software estadístico y d) el crecimiento como docente/investigador. Con base en la definición anterior se concluye que las 4 puntuaciones se definieron en una escala de 1 a 5, donde los valores 1, 2, 3, 4 y 5 significan muy en desacuerdo, en desacuerdo, ni en desacuerdo ni de acuerdo, de acuerdo y muy de acuerdo, respectivamente.

Posteriormente, se analizaron las distribuciones de frecuencias de cada una de las puntuaciones, para determinar cuáles fueron los rangos de concentración de las puntuaciones estudiadas. Con respecto a las preguntas abiertas, las respuestas obtenidas fueron agrupadas en categorías para obtener una frecuencia de las ideas centrales reportadas.

3. Resultados

3.1. Análisis descriptivo de las puntuaciones de las secciones del cuestionario

En la tabla 1 se observan las estadísticas descriptivas de las 4 variables estudiadas. En todas las variables se obtuvieron medianas mayores o iguales a 4,25, por lo cual, al menos el 50% de los participantes reportaron valores altos en las cuatro variables. Además, las cuatro variables presentaron correlaciones entre ellas superiores a 0,50, esto indicó que los aumentos en los valores de una variable se asociaron a aumentos en los valores de las otras variables.

Tabla 1. Estadísticas descriptivas de las puntuaciones de las habilidades observadas en la población del estudio.

Variable	Pr	Med	DE	Correlaciones			
				Val	Comp	Soft	Doc-Inv
Valoración	4,71	4,80	0,37	1,00			
Comprensión	4,50	4,50	0,58	0,86	1,00		
Software	4,51	4,50	0,42	0,59	0,57	1,00	
Doc-Inv	4,23	4,25	0,58	0,62	0,59	0,61	1,00

Nota: Las variables valoración, comprensión, software y doc-inv indican incidencia de los proyectos en a) la valoración de la estadística, b) la comprensión de conceptos básicos, c) el dominio del software estadístico y d) el crecimiento como docente/investigador. n= frecuencia absoluta observada. Pr.=Promedio, Med.=Mediana, DE=Desviación Estándar.

3.2. Análisis de frecuencias de las secciones del cuestionario

En la tabla 2 se observan las frecuencias observadas de las 4 variables estudiadas. El porcentaje del estudiantado que indicó que estuvo entre de acuerdo y muy de acuerdo en que el proyecto incidió en la valoración de la Estadística, la comprensión de los conceptos básicos, el dominio de software utilizado y en el crecimiento como docente o investigador fue de 94,1%, 94,1%, el 91,2% y 70.1%, respectivamente. Se puede concluir que el estudiantado reportó mayoritariamente que el proyecto incidió positivamente en todas las habilidades estudiadas.

En la codificación de la pregunta abierta sobre los aprendizajes que dejó el proyecto se obtuvieron cuatro categorías principales. A continuación, se presentan las categorías, la frecuencia reportada de la categoría (las categorías no son excluyentes, ya que algunas respuestas se ajustaron a dos categorías) y un comentario reportado por alguno de los estudiantes que se incluyó en la categoría:

- Un mejoramiento de las capacidades de análisis e interpretación de datos (n=17): *Considero que el hecho de aplicar la estadística a un ejemplo o al estudio de una situación en particular me permitió apreciar y comprender mejor algunos conceptos estadísticos presentes en el estudio de los datos recolectados*.

- El conocimiento de los resultados obtenidos en el proyecto (n=13): *El proyecto me permitió observar los diferentes pensamientos que pueden tener los docentes con la realidad de los datos brindados por los alumnos*.

- Una comprensión de la utilidad de la Estadística (n=11): *Pude ver la estadística como herramienta para tomar decisiones en el aula.*

- Una valoración del proceso de recolección de datos (n=7): *Aprendí que a la recolección de los datos hay que darle mucha importancia ya que no es fácil obtenerlos*.

Tabla 2. Distribución de frecuencias de las puntuaciones de las habilidades observadas en la población del estudio.

Puntuación	Valoración		Comprensión		Software		Doc.-Inv.	
	n	%	n	%	n	%	n	%
[1.0; 1.5[	0	0.00	0	0.0	0	0	0	0.00
[1.5; 2.0[	0	0.00	0	0.0	0	0	0	0.00
[2.0; 2.5[	0	0.00	1	2.9	0	0	0	0.00
[2.5; 3.0[	0	0.00	0	0.0	0	0	0	0.00
[3.0; 3.5[	0	0.00	1	2.9	0	0	3	8.82
[3.5; 4.0[	2	5.88	0	0.0	3	8.82	7	20.59
[4.0; 4.5[	4	11.76	8	23.5	7	20.59	8	23.53
[4.5; 5.0]	28	82.35	24	70.6	24	70.59	16	47.06

Nota: Las variables valoración, comprensión, software y doc-inv indican incidencia de los proyectos en a) la valoración de la estadística, b) la comprensión de conceptos básicos, c) el dominio del software estadístico y d) el crecimiento como docente/investigador. n= frecuencia absoluta observada.

Por último, 30 de los 34 estudiantes indicaron que sí utilizarían un proyecto durante la enseñanza de la Estadística en secundaria. Entre las razones asociadas a esta respuesta estuvieron: "*sí usaría un proyecto, ya que se ponen en práctica una gran parte de los conceptos abordados durante el curso, lo cual les puede ayudar a comprender mejor la materia*" y "*claro, quizás no con tantos datos por una cuestión de tiempo, pero sí pensaría en actividades similares o acercamientos a la recolección, análisis e interpretación de datos. Cuando apreciamos la importancia de las aplicaciones de la estadística, podemos tener una mejor comprensión sobre los temas y sería algo que ayude mucho a los estudiantes*". Por otro lado, hubo dos estudiantes que dijeron que no estaban seguros y dos que dijeron que no, una de las razones del no fue la siguiente: "*No, ya que los proyectos están más enfocados a las carreras universitarias, ya que se estudian temas específicos, que a muchos estudiantes de secundaria no les interesarían*".

4. Discusión

Los resultados obtenidos en este trabajo brindan una evidencia a favor de que el trabajo con los datos reales en Estadística puede incidir en un mejoramiento de la comprensión de los conceptos, en el desarrollo de habilidades (manejo de software y aspectos asociados a la enseñanza y la investigación) y en actitudes positivas (valoración de la Estadística).

Los resultados observados en las puntuaciones del mejoramiento en la comprensión de los conceptos fueron respaldados con las respuestas de las preguntas abiertas. La mayoría de las respuestas de la pregunta sobre aprendizajes obtenidos hizo referencia al mejoramiento en la comprensión y análisis de datos. Lo anterior tiene mucho sentido, debido a que el estudiar un conjunto de datos reales, las interpretaciones deben realizarse en función del contexto, lo cual demanda un paso más allá del simple cálculo de la función estadística solicitada.

Una de las principales evidencias de que el proyecto incidió en el crecimiento como docentes es que la mayoría de los participantes reportaron que les gustaría aplicar un proyecto cuando enseñen Estadística. Esta tendencia refleja que docentes en formación conocieron y apreciaron una metodología distinta de la enseñanza de la Estadística, la cual se caracteriza por el tratamiento de un problema de interés para los aprendices.

En cuanto a las actitudes positivas promovidas por los proyectos, el estudiantado respaldó con comentarios el fomento a la valoración de la utilidad de la Estadística. Lo anterior era un resultado esperado, ya que al usar la Estadística para resolver una pregunta de investigación real se construye un argumento de peso sobre la utilidad de la disciplina. Otra actitud que resaltó en los comentarios fue la valoración del proceso de recolección de datos, lo cual coincide con Batanero (2001), ya que el estudiantado comprendió que esta etapa de la investigación es fundamental para la obtención de resultados con un alto nivel de veracidad.

Un elemento por destacar en las respuestas sobre los aprendizajes obtenidos durante el proyecto es la cantidad de menciones al conocimiento de los resultados de la investigación. Este aspecto se debe resaltar porque ejemplifica cómo una temática apropiada puede comprometer al estudiantado con la metodología seleccionada. En este trabajo es posible que algunos estudiantes no estuvieran tan interesados en aprender Estadística, sino en conocer si la población evaluada realmente estaba interesada en la Geometría. No obstante, la selección de la temática apropiada tuvo como efecto secundario la profundización en el estudio de la Estadística requerida.

Ahora bien, es importante mencionar que una limitación de este estudio es que se basó en reportes estudiantiles sobre la percepción de las incidencias del proyecto en sus habilidades, por lo cual no se puede concluir ninguna relación causal. Una primera aproximación hacia el análisis causal sería implementar un diseño experimental con una comparación de un pretest y post test, en el cual se evalúen directamente aspectos de comprensión de conceptos, uso de software y actitudes hacia la Estadística.

Los altos porcentajes de valoraciones positivas del uso de proyectos en la enseñanza de la Estadística constituyen una razón para su implementación en el aula. En Batanero (2001) se encuentran varios proyectos descritos con detalle que pueden ser replicados en las aulas, los cuales pueden contribuir a que la educación estadística de nuestro estudiantado tenga una mayor calidad.

Referencias

[1] BATANERO, Carmen. (2001). *Didáctica de la Estadística*. GEEUG, España, 2001.

[2] BATANERO, Carmen, & DÍAZ, Carmen. *Estadística con proyectos*. Universidad de Granada, España, 2011.

[3] CARO, Raquel, & GARCÍA, Fernando. Historias de Matemáticas ¡Qué Historia esto de la Estadística! *Pensamiento Matemático*, 1(1), 1-9, 2011.

[4] GODINO, Juan Diego, BATANERO, Carmen, & FONT, Vincent. The onto-semiotic approach to research in mathematics education, *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 2007.

[5] GÓMEZ, Miguel. *Elementos de Estadística Descriptiva.* EUNED, Costa Rica, 2012.

[6] LIGTHNER, James E. A Brief Look at the History of Probability and Statistics. The *Mathematics Teacher*, 84(4), 623-630, 1991.

[7] SOTOMAYOR, Cecilia, VACCARO, Carla, & TÉLLEZ, Antonia. *Aprendizaje basado en proyectos: Un enfoque pedagógico para potenciar los procesos de enseñanza*. Fundación Chile, 2021.

Sobre el autor:
Nombre: Luis Rojas-Torres
Correo Electrónico: luismiguel.rojas@ucr.ac.cr
Institución: Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

Historias de Matemáticas

La demostración matemática a través de la historia

Mathematical proof through history

Antonio Rosales Góngora

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen XIV, Número 1, pp. 43−60, ISSN 2174-0410
Recepción: 3 Ene'23; Aceptación: 28 Feb'23

1 de abril de 2024

Resumen

La matemática se distingue de la filosofía y de las demás ciencias fundamentalmente por el uso de demostraciones rigurosas. El concepto de demostración marca la diferencia y da cohesión a la vez que atemporalidad. Nuestro objetivo es contar su historia y explicar su importancia.

Lo que distingue a las matemáticas teóricas de las demás disciplinas es la cadena de razonamientos que, siguiendo reglas lógicas, nos llevan a determinadas conclusiones. Esta es la razón por la que podemos confiar en las matemáticas que hizo Euclides hace 2300 años lo mismo que creemos en las matemáticas actuales

Palabras Clave: Demostración, Historia de las Matemáticas,

Abstract

Mathematics is distinguished from philosophy and the other sciences fundamentally by the use of rigorous proofs. The demonstration concept makes the difference and gives cohesion as well as timelessness. Our goal is to tell its story and explain its importance.

What distinguishes theoretical mathematics from other disciplines is the chain of reasoning that, following logical rules, leads to certain conclusions. That is why we can trust Euclid's mathematics of 2300 years ago as much as we believe in today's mathematics.

Keywords: Demonstration, History of Mathematics

1. Introducción

¿Por qué demostrar?, ¿qué es demostrar?, ¿qué sentido tiene demostrar? Los conceptos y teorías matemáticas tienen una historia, al igual que la noción de rigor o la idea de demostración. La historia de las matemáticas arroja luz sobre estas cuestiones, por tanto, examinándolas podremos investigar cuáles fueron los significados de la demostración fijándonos en lo esencial: el nacimiento de la idea de demostración y las dos grandes rupturas de los siglos XVII y XIX.

"Verdad como que dos y dos son cuatro" es una expresión popular de confianza en las evidencias numéricas y, por tanto, en las matemáticas. Los matemáticos añaden nuevos resultados a los ya conocidos y tratan de presentarlos en un conjunto bien organizado de definiciones y de teoremas por medio de deducciones lógicas o de otros argumentos en lo que se llaman demostraciones.

Consideramos que hay demostración cuando un resultado de una cierta generalidad se establece basándose en resultados anteriores ya admitidos como verdaderos o correctos, bien como evidentes o como demostrados. Por ejemplo, verificar que 5 es solución de la ecuación $3x+4=19$ no constituye una demostración aunque sí se establezca como tal en algunos escritos antiguos. Pero establecer con ayuda de propiedades que la solución de $ax+b=c$ es $x=(c-b)/a$ (si $a\neq0$) si será una demostración.

En la historia de la demostración en occidente podemos distinguir grandes etapas que pasamos a desarrollar

2. Antes de los griegos o las matemáticas sin demostración

Dejando a un lado las matemáticas de los pueblos llamados primitivos, no queda mucho más que las matemáticas mesopotámicas y egipcias. Remontándonos al primer tercio del segundo milenio a.c., las informaciones son fragmentarias, las tablas de arcilla cocidas mesopotámicas y los papiros egipcios dan testimonio de una actividad que solo los muy escrupulosos y puristas se negarían a calificar de matemáticas. Se encuentran medidas de áreas o volúmenes, soluciones de ecuaciones lineales o cuadráticas etc. en un lenguaje muy diferente al nuestro.

Quizás la primera "prueba" matemática en la historia registrada se deba a los babilonios. Parece que (junto con los chinos) conocían el teorema de Pitágoras mucho antes que Pitágoras. Los babilonios tenían ciertos diagramas que indican por qué el teorema de Pitágoras es cierto, y se han encontrado tablillas para validar este hecho.

Hay que hacer notar la ausencia de generalidad en los enunciados y la inexistencia de demostraciones. Así en las tablillas babilónicas, en lo referente a nuestras ecuaciones, se trata de problemas numéricos expresados de manera retórica, sin ninguna notación simbólica y cuya solución se presenta como una sucesión de reglas a efectuar con ausencia de toda justificación. Algunos historiadores consideran que el autor del papiro de Rhind (aprox 1650 a.c.) tiene una idea de métodos generales aplicables a grupos de problemas y que muchos de los problemas son problemas teóricos enunciados bajo una forma concreta para garantizar su utilidad.

A lo largo de la historia, incluso hoy día, la matemática ha sido mucho más una práctica que un sistema bien estructurado de enunciados generales lógicamente conectados entre ellos de manera ajustada

3. El periodo griego

Pitágoras (569–500 a. C.) fue tanto una persona como una sociedad (los pitagóricos). Además fue una figura política y un místico. Fue especial en su época, entre otras razones, porque involucró a las mujeres como iguales en sus actividades. Un crítico caracterizó al hombre como "*una décima parte de él genio, nueve décimas pura tontería*". Pitágoras murió, según la leyenda, en las llamas de su propia escuela incendiada por fanáticos políticos y religiosos que incitaron a las masas a protestar contra la ilustración que Pitágoras buscaba traerles.

Los pitagóricos son recordados por dos contribuciones monumentales a las matemáticas. La primera de ellas fue establecer la importancia y la necesidad de las demostraciones en matemáticas: que los enunciados matemáticos, especialmente los enunciados geométricos, deben verificarse mediante prueba rigurosa. Antes de Pitágoras, las ideas de la geometría eran generalmente reglas empíricas que se derivaban empíricamente, simplemente de la observación y (ocasionalmente) de la medición. La segunda gran contribución fue el descubrimiento y la prueba del hecho de que no todos los números son racionales.

Fue Eudoxo (408 a. C. –355 a. C.) quien inició la gran tradición de organizar las matemáticas en teoremas. Eudoxo fue uno de los primeros en utilizar la palabra "teorema" en el contexto de las matemáticas. Eudoxo era un hombre de muchos intereses y muchos talentos. Sabía mucho sobre astronomía y teoría de números. Desarrolló la teoría de las proporciones y se basó en las ideas de Pitágoras para idear métodos para comparar números irracionales. Esto, a su vez, le permitió desarrollar su método de exhaución, que es un precursor de la moderna teoría de la integración.

Lo que Eudoxo ganó en el rigor y la precisión de sus formulaciones matemáticas, lo perdió porque no probó nada. La demostración formal aún no era la tradición en matemáticas. Como hemos señalado anteriormente, las matemáticas en sus inicios eran un tema en gran parte heurístico y empírico. Nunca se le había ocurrido a nadie que había alguna necesidad de probar algo.

Aunque Euclides no es tan conocido (como Arquímedes y Pitágoras) por sus ideas matemáticas originales y profundas, y aunque no hay muchos teoremas que lleven el nombre de Euclides, ha tenido un efecto incisivo en el pensamiento humano. Después de todo, Euclides escribió un tratado (que consta de trece libros), ahora conocido como los Elementos de Euclides, que ha estado continuamente disponible durante más de 2000 años y ha sido editado una gran cantidad de veces.

Como sucede a menudo con los científicos, los artistas y los eruditos de inmensos logros, hay desacuerdo y cierto debate sobre quién o qué era realmente Euclides. Las tres escuelas de pensamiento son estas:

• Euclides fue un personaje histórico, un solo individuo, que de hecho escribió los Elementos y las demás obras académicas que comúnmente se le atribuyen.

• Euclides era el líder de un equipo de matemáticos que trabajaban en Alejandría. Todos ellos contribuyeron a la creación de las obras completas que ahora se atribuyen a Euclides. Incluso continuaron escribiendo y difundiendo libros bajo el nombre de Euclides después de su muerte.

• Euclides no fue un personaje histórico en absoluto. De hecho, "Euclides" fue un seudónimo adoptado por un grupo de matemáticos que trabajaban en Alejandría. Se inspiraron en Euclides de Megara (que de hecho fue una figura histórica), un destacado filósofo que vivió unos 100 años antes de cuando se cree que vivió Euclides el matemático.

La mayoría de los eruditos de hoy suscriben la primera teoría: que Euclides fue ciertamente una persona única que creó los Elementos. Pero reconocemos que hay evidencia para los otros dos escenarios. Ciertamente, Euclides tuvo una vigorosa escuela de matemáticas en Alejandría, y no hay duda de que sus alumnos participaron en sus proyectos.

Se cree que Euclides debe haber estudiado en la Academia de Platón (430 a. C.-349 a. C.) en Atenas, ya que es poco probable que hubiera habido otro lugar donde pudiera haber aprendido la geometría de Eudoxo y Teeteto en la que se basan los Elementos.

Justamente una presentación sistemática es lo que ofrece al lector Los Elementos de Euclides (300 a.c.). Definiciones, axiomas y postulados donde los enunciados generales son demostrados con ayuda de proposiciones precedentes, de axiomas y de postulados. Los Elementos ofrecen una síntesis extensa, una construcción sólida, un modelo sin igual que durante veinte siglos suscitó la admiración y el asombro. Los Elementos son una culminación y no una creación a partir de cero. Las tendencias a la generalización y a la demostración se remontan, al menos, a Thales (640 a.c.-546 a.c) y a Pitágoras y su escuela (siglos VI y V a.c.). Una buena parte de los libros de contenido aritmético en Los Elementos expresan resultados pitagóricos. Además, según Proclo (siglo V a.c.), Euclides ha plasmado en demostraciones irrefutables lo que sus predecesores (Eudoxo, Teeteo,…) habían mostrado de una manera relajada.

Euclides, del que no conocemos casi ningún detalle biográfico, incluso la fecha de nacimiento o muerte, habría sido sobre todo un excepcional redactor más que un creador o descubridor de todos los resultados que expone. En su género, Los Elementos no han tenido igual durante 2000 años y sus lagunas lógicas no han sido descubiertas, identificadas y corregidas más que al final de este largo intervalo de tiempo.

Página tras página a propósito de números, triángulos o cualquier objeto matemático se encuentra el esquema correspondiente al célebre "*Todo hombre es mortal, Sócrates es un hombre, luego Sócrates es mortal*". Más generalmente "*Si todo ser del tipo T tiene la propiedad P*" es suficiente demostrar que lo que se estudia es de tipo T para deducir que tiene la propiedad P.

El silogismo ((P➔Q) y (Q➔R))➔(P➔R) es la segunda regla presente en Los Elementos completamente integrada en la argumentación euclídea.

Una tercera regla es la del razonamiento por reducción al absurdo o por contradicción, particularmente útil para evitar recurrir al infinito. Podemos encontrar ejemplos en el método de exhaución; se prueba que "*las áreas de los círculos son entre ellas como el cuadrado de sus diámetros*" (proposición 2 del libro XII) probando que la razón de las áreas de los dos círculos no puede ser ni inferior ni superior a la razón de los cuadrados porque resultaría una contradicción. Una aplicación más simple de este razonamiento establece la existencia de un número infinito de números primos (proposición 30 del libro IX). Euclides razona suponiendo que A, B y C son los únicos números primos (el argumento es aplicable para un número finito) , entonces ABC+1 es un número primo (distinto de A, B, C) o divisible por un número primo que no puede ser ni A ni B ni C porque dividiría entonces a (A.B.C+1)-A.B.C, es decir dividiría a la unidad, lo cual es imposible en virtud de la definición de número en la definición 2ª del libro VII: pluralidad compuesta de unidades.

Los razonamientos de Euclides fueron, para muchos matemáticos griegos y sus sucesores, el modelo por excelencia para demostrar la verdad de resultados matemáticos. Incluso el mismo Arquímedes siente la necesidad de demostrar según estos cánones los resultados que había obtenido por consideraciones de tipo mecánico o heurístico, tal y como expone en una carta a Eratóstenes conocida hoy como "El método".

4. La edad Media Occidental

La Edad Media también fue llamada Edad Oscura, y no sin razón. Este fue un largo período (más de 1000 años según algunas medidas) de estancamiento intelectual. Es cierto que los árabes desarrollaron algunas de sus ideas seminales en álgebra durante este tiempo. Algunas otras culturas, incluidos los africanos, los incas y los chinos, lograron algunos avances matemáticos durante este período (desde aproximadamente 500 d.C. hasta 1500 d.C.). Pero se hizo muy poco para desarrollar la idea de la demostración matemática. Este es un concepto muy sofisticado, uno de los pináculos del pensamiento humano. Y esperaba un momento fértil en Europa para ver los próximos pasos importantes en el desarrollo.

Los matemáticos romanos del final del imperio habían sido más rudimentarios, no había tradición ni interés para comprender y apreciar una estructuración del conocimiento y, en particular, para entregarse a la demostración.

Con el progreso económico y tecnológico se traducen los textos de los matemáticos griegos a través de versiones árabes y se fundan universidades. Incluso entonces, el espíritu es diferente al de los clásicos griegos. El interés de los escolásticos medievales por las matemáticas pertenece a la cultura general más que a la práctica intensiva de una disciplina viva. Por supuesto algunos tienen conciencia de la importancia de la demostración, es el caso de Adelardo de Bath o de Campano de Novara en los que el interés lo suscita la demostración más que el contenido matemático.

Ciertamente había buenos matemáticos en Europa en la Edad Media: Fibonacci, Oresmes,… pero en las universidades, la preocupación teológico- filosófica relegaba las matemáticas a un papel subalterno y, a lo mejor, didáctico.

No se encuentra casi nunca descubrimientos matemáticos expresados en forma demostrativa. No hay interés en comprender y aún menos en mejorar el conjunto de demostraciones existentes en tanto que estructura de una disciplina científica

5. Fin del Renacimiento y Edad Clásica

En el siglo XVI la actividad matemática en general se vuelve más abundante, más diversificada e innovadora: resolución de ecuaciones de tercer y cuarto grado por la escuela italiana, logros y sueños de los ingenieros – arquitectos, la perspectiva en pintura…

¿Cómo justificar y situar tales trabajos y tales prácticas, cómo demostrar su validez o generalidad, cómo asegurar el dinamismo de la investigación al mismo tiempo que la certeza de los resultados? Es para responder a tales inquietudes que se genera una preocupación por cuestiones de método entre pensadores, humanistas matemáticos, gentes de ciencia y filósofos. La demostración matemática verá su papel y su fisonomía renovada de diversas maneras en esta empresa de orden metodológico.

Un primer cambio afecta al orden y dirección del movimiento del pensamiento. La deducción usual se hacía de lo conocido (o lo ya demostrado y aceptado) a lo desconocido. Este proceso se conoce como síntesis y tiene en Viete a su más ilustre representante. Pappus (aprox. 300) y Theon (siglo IV) entre otros, habían hablado de este método de análisis. Viete pretende restaurarlo, convertirlo en un "*nuevo análisis*", el álgebra simbólica que desarrolla será la herramienta por excelencia del análisis entendido en el sentido de los antiguos.

Según él, "*Nuestro arte es el método de invención más cierto en matemáticas*". Ese propósito no es pura fanfarronería. Viete demuestra de manera más bien estándar y sintética en sus "Notae Priores…" donde establece la validez de fórmulas algebraicas de las cuales se servirá en otras obras, y de manera analítica en sus cinco libros de Zetética donde resuelve problemas. Recordemos que lo esencial del arte analítico es conjugar las virtudes heurísticas de un método propio adecuado para el descubrimiento (o invención) y la necesidad de respetar y asegurar la veracidad de las proposiciones. Esta seguridad podría obtenerse, si no se tiene, haciendo de manera sintética el recorrido del análisis cuidando, si es necesario, de identificar las condiciones de validez de los enunciados, para evitar, por ejemplo, sustraer un mayor de un menor lo que daría un resultado negativo prohibido en la época de Viete. El objetivo fundamental está expuesto al final de su obra "Introducción al arte analítico: Resolver cualquier problema". Encontrar y demostrar (casi) simultáneamente parece ahora factible.

Descartes (1596 – 1650) participa también en esta búsqueda de un método aplicable incluso a las ciencias en general y no solo a las matemáticas. Otros contemporáneos, entre ellos Francis Bacon, representantes de un pensamiento ciertamente diferente basado en la inducción pero con una ambición universal, comparten esta voluntad metódica.

El trabajo de choque de Descartes, aparecido en 1637, tiene un título muy revelador en este sentido "Discurso del método para conducir bien la propia razón y buscar la verdad en las ciencias". Aquí nuevamente se expresa un deseo de dinamismo ("buscar") en el ejercicio de un método correcto ("conducir bien la propia razón", "verdad").

Inspirados por la lógica, el análisis geométrico de los antiguos y el álgebra, Descartes acepta solo evidencias (las ideas claras y distintas), divide las dificultades en parcelas, ir de lo simple a lo complicado y, en fin, verificar frecuentemente el razonamiento, es decir, hacer enumeraciones completas y resúmenes generales para estar seguro de no omitir nada.

A propósito de la importancia del análisis y del conocimiento que de él tenían los antiguos, Descartes es muy claro y afirma que los antiguos geómetras solían servirse de esta síntesis en sus escritos, no es que ignorasen enteramente el análisis sino que lo reservaban solo para ellos, como un secreto importante.

La "Geometrie" no es más que uno de los tres ensayos puestos como anexos en su Discurso del Método pero tiene un estatus eminente, incluso decisivo para Descartes, según una de sus numerosas cartas a Mersenne, fechada aproximadamente a finales de diciembre de 1637 en la que asegura que con su Dióptrica (Óptica) y con Meteoros (Meteorología) había tratado de persuadir que su método era mejor que el usual, pero que creía haberlo demostrado con su Geometría.

Para Descartes, su Geometría es un modelo y una garantía de validez del método. Pero esta geometría nosotros la llamamos analítica acertadamente si entendemos la palabra análisis en el sentido de los antiguos y de Viete, pero se han propuesto otros términos para describirla como el método de las coordenadas pues Descartes se sirve de estas, algo que ya hizo Apolonio pero sin álgebra, para el estudio de las cónicas en el siglo III. Incluso se le podría denominar Geometría algebraica si esta ahora no tuviese otro significado. Quizás el término más extendido sea Geometría analítica aparecido a principios del XIX. Parece ser que Biot en 1803 propuso este término en sustitución de "álgebra aplicada a la geometría". Pero más allá de las palabras recordemos que Descartes aplica el método analítico a la geometría, utilizando eficazmente la herramienta algebraica y haciendo elecciones juiciosas de coordenadas (y no, como se cree generalmente con un sistema fijo de referencia ortonormal, los famosos ejes coordenados). Descartes no duda en afirmar su superioridad cuando se le pregunta sobre Viete al tiempo que señala que apenas lo había leído antes de escribir su Geometría. Descartes aporta a la práctica matemática la necesidad de las ideas claras (y la aplicación general del álgebra). Esta es la segunda modificación importante en cuanto a las demostraciones: la necesidad de claridad y la confianza en la evidencia conceptual. Es tal la confianza de Descartes que a menudo deja agujeros en las exposiciones, enunciados a veces sin demostración, en particular en cuestiones de tipo infinitesimal. Sus éxitos son notables, por ejemplo, da la solución general de un problema de Pappus: Encontrar el lugar de los puntos cuyo producto de distancias a unas rectas dadas y según unos ángulos dados sea proporcional al producto de las distancias a otras rectas dadas y según unos ángulos dados.

Para la mayoría de los matemáticos del XVII y XVIII los resultados justificaban el empleo del método. Dos herramientas sirvieron cada vez mejor para probar: la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral. El uso del lenguaje notacional y de cálculo, que son las aportaciones del álgebra, tiene tantos resultados hermosos que los hallazgos de rigor imperfectos pesaron muy poco en comparación con estos, al menos durante un tiempo.

Como vemos en el siglo XVII el significado de la demostración cambia: la demostración no se da para convencer, se pretende iluminar, esclarecer. No se trata de forzar la razón a reconocer la validez lógica de una argumentación sino de hacer ver (y luego comprender) ciertas ideas.

Todo parece ir a mejor en el mundo de las matemáticas especialmente porque se podían hacer demostraciones de manera geométrica o euclidiana, por tanto impecables, de resultados puestos en duda por los ultrapuristas. Esto es lo que se dice que hizo MacLaurin para el cálculo diferencial e integral de Newton para limpiarlo de las sospechas levantadas por el obispo Berkeley que, por ejemplo, había hablado sarcásticamente sobre estos "*fantasmas de cantidades evanescentes*" que eran los infinitésimos que son a la vez tanto no nulos (para permitir que sirvan como divisores) como nulos y desaparecen. Berkeley cuestionó el método usado por Newton y otros usuarios de lo que llamamos cálculo diferencial e integral, que se convirtió en la principal herramienta de los matemáticos.

¿Cómo adquirir y conservar la certeza si no se sabe incluso de qué se habla, si se usa, por ejemplo, la razón de cantidades que se postulan como nulas en un momento crucial del razonamiento?, ¿dónde está la claridad y el rigor?

Al parecer Berkeley estaba movido por motivos religiosos. Se rebelaba contra los que, siendo muy críticos con los misterios de la religión, no se apercibían de las oscuridades, incluso contradicciones, en el corazón de su actividad intelectual científica. Pero el valor de sus críticas no está disminuido por todo eso. El cálculo infinitesimal aún no tenía una base segura. El problema no era solo ontológico (y no habría sido, solo por eso, tan molesto, incluso atormentador). Incluso los mejores matemáticos estaban cometiendo errores. Por ejemplo Leibniz (1646-1716) pone x=1 en el desarrollo en serie

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x}$$

y obtiene 1-1+1-1+…=1/2, lo que trata de justificar haciendo dos reagrupamientos diferentes del miembro de la izquierda:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+0+\ldots = 0$$

y

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-...=1-0-0-0-...=1$$

y tomando la media de ambos resultados:

$$\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

El concepto de radio de convergencia, fuera del cual las fórmulas ya no son válidas, nos permite hoy evitar tales errores. Estas dificultades, como las relativas a las nociones de límite, de instante, etc. no pueden ser ignoradas. El siglo XIX se aplicará en resolverlas.

Desarrollos importantes en otras ramas de las matemáticas, en particular álgebra y geometría, contribuyeron también a la reconsideración de lo que son las matemáticas y sus contenidos y modificaron considerablemente las exigencias de los matemáticos con respecto a las demostraciones.

El hermoso ideal de la intuición, la naturalidad y la evidencia quedará guardado en el baúl de los recuerdos de un tiempo entusiasta y un poco naif

6. Siglo XIX: nuevos objetos, nuevos conceptos y afán de rigor

La manera de considerar las matemáticas y más concretamente, las exigencias en cuanto a la calidad de las demostraciones, han evolucionado notablemente en el periodo que va desde la fundación de La Ecole Polytechnique en plena Revolución francesa hasta el descubrimiento de las paradojas de la teoría ingenua de conjuntos hacia finales del XIX. Hay dos factores capitales: la institucionalización y profesionalización universitaria de la actividad matemática y la exposición considerable de los objetos, conceptos y métodos matemáticos.

La Ecole Polytechnique fue la primera institución de enseñanza superior donde la investigación matemática fue sistemáticamente alentada e integrada en los mismos cursos. La universidad alemana adopta, muy entrado el XIX, el mismo modelo de profesorado: investigador y docente. Este modelo se fue implantando poco a poco en casi todos los países. Como consecuencia, la aparición de manuales y tratados, la redacción por los profesores para sus alumnos de apuntes de cursos etc. todo dentro de una perspectiva de clarificación y sistematización de los conceptos.

En este contexto es donde podemos situar, por ejemplo, en análisis (en el sentido moderno de estudio del infinito, de lo infinitamente pequeño y de conceptos relacionados con ellos: límite, derivadas, continuidad, series, áreas…) obras como las de Lacroix (1797), Lagrange (1797, 1808), Cauchy (1821, 1823, 1829), Weiertrass (apuntes de los cursos tomados por E. Kossak en 1865-1866 publicados en 1872), Dedekind (cursos a partir de 1858, publicación en 1872 de " Continuidad y números Irracionales) y de numerosas contribuciones de otros matemáticos universitarios. Investigación y enseñanza, lejos de enfrentarse e ignorarse, se enriquecen mutuamente.

Los métodos matemáticos así como los contenidos sufrieron profundas modificaciones en casi todos los dominios, especialmente en análisis, álgebra y geometría.

6.1 Análisis

Lagrange trató de algebrizar el estudio de las funciones considerando su desarrollo formal en series de Taylor y definiendo la derivada n-ésima de f en $x=a$ a partir del coeficiente del término en $x-a$ de grado n de la serie. Así, a partir de la serie formal

$$f(x) = f(a) + c_1\left(x-a\right) + c_2\left(x-a\right)^2 + \ldots + c_n\left(x-a\right)^n + \ldots$$

se define la derivada n-ésima por $fn(a) = n!\, cn$. Por no poder asegurar la existencia y la convergencia de tal desarrollo en serie, esta aproximación, que pretendía evitar el recurrir a lo infinitamente pequeño, no constituiría una fundamentación valida a los ojos de la comunidad matemática.

Cauchy poco a poco, desarrolló el concepto de límite a partir del cual la derivada y las diferenciales pueden ser definidas y la integral extendida a funciones con una discontinuidad o un número finito de discontinuidades. Difícil en sí, el concepto de límite era aún más difícil de dominar correctamente en las demostraciones, por falta de cuantificadores bien claros y puestos en el orden correcto. Así Cauchy cree haber demostrado que el límite de una sucesión de funciones continuas era necesariamente una función continua. Pero, poco después, en 1826, señaló que la función

$$s(x) = senx - \frac{sen\left(2x\right)}{2} + \frac{sen\left(3x\right)}{3} - \frac{sen\left(4x\right)}{4} \ldots + (-1)^{n+1}\frac{sen\left(nx\right)}{n} \ldots$$

es discontinua para todo x de la forma $(2n+1)\pi$, a pesar de que cada una de las funciones de la serie del miembro de la derecha de la ecuación es continua en todas partes y por lo tanto las sumas parciales son continuas en todas partes. En particular, $s(\pi) = 0$ pero $s(x) = x/2$ si $-\pi < x < \pi$ y por tanto

$$\lim_{x\to\pi} s(x) = \frac{\pi}{2} \neq 0 = s\left(\pi\right).$$

La representación gráfica de la serie es

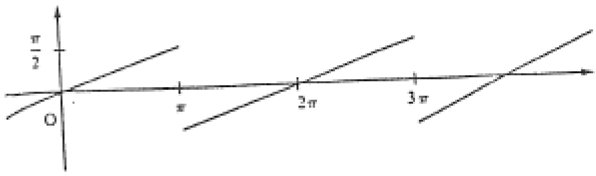


Figura 1. Representación gráfica serie s(x)

Se necesitó cierto tiempo para reparar el error de razonamiento en la demostración de Cauchy. En efecto, había utilizado implícitamente el concepto, aún no formulado, de convergencia uniforme incluso sin suponer la convergencia ordinaria. La distinción entre los dos conceptos de convergencia y la puesta a punto de una técnica rigurosa fue obra de Weiertrass y su escuela. De ellos viene el uso de $\varepsilon - \delta$ y $\varepsilon - N$ bien cuantificados. Por ejemplo, una sucesión de funciones de término general f_n, converge hacía f sobre un cierto dominio D de números reales si:

Definición I: Para todo x en D y para todo $\varepsilon > 0$, existe un natural N (dependiendo de x y de $\mathcal{E}$ en general) tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todos los n superiores a N

La convergencia uniforme quedaría así:

Definición 2: Para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N (dependiendo solo de ε) tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todos los n superiores a N y todos los x de D.

Una escritura abreviada es aún más significativa:

Definición 1:

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N \, tal \, que \, n > N \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

Definición 2:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, t.q. n > N \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \;\; \forall x \in D$$

Mover el cuantificador $\forall x$ es suficiente para cambiar el concepto (y los resultados que dependen de él). Las demostraciones, por tanto, resultan cada vez más minuciosas.

Las distintas teorías de integración fueron, de manera similar, objeto de extensiones y de clarificaciones sucesivas para acomodar funciones cada vez más curiosas, incluso patológicas según la apreciación de muchos matemáticos. En 1829 Lejeune-Dirichlet dio el ejemplo de una función discontinua en todo punto de un intervalo finito, la que es igual a una cierta constante para todos los valores racionales y a otra constante para todos los valores irracionales. Esta función no es integrable en el sentido de Riemann (1854) pero si en el sentido de Lebesgue (1902).

Podemos encontrar otras rarezas, como una función continua cuya derivada no existe en ningún punto (geométricamente es una curva sin ninguna tangente) o una función continua cuya curva correspondiente ocupa todo un cuadrado (el plano)… lo que hace decir a Henri Poincaré “ *cómo puede la intuición engañarnos hasta ese punto*”, y continuó después de haber distinguido entre varios tipos de intuiciones: “ *la lógica y la intuición tiene cada una su papel necesario, ambas son indispensables, la lógica que puede solo dar la certeza es el instrumento de la demostración, la intuición es el instrumento de la invención*”.

La inevitable desconfianza en adelante hacia la intuición geométrica condujo a las diversas construcciones de los números reales (hacia 1860 – 1875) y a querer basarlo todo en la aritmética. La naturaleza de los problemas y los tipos de herramientas para las demostraciones se encuentran fuertemente afectadas por esta aritmetización del análisis. La continuidad ya no se corresponde con una llamada expresión analítica y menos aún al trazado de una curva hecha a mano y regular. La intuición del XVIII, espacial o física, es reemplazada, al menos en las demostraciones, por sistemas de inecuaciones, cada sistema expresando una infinidad de implicaciones de desigualdades e incluso un infinito del que estábamos a pocos años de probar que era de un orden superior al infinito de los números naturales.

6.2 Grandes transformaciones del Álgebra en el XIX

El objetivo principal del álgebra fue durante mucho tiempo la resolución de ecuaciones y una herramienta fundamental desarrollada poco a poco para tal fin fue el lenguaje simbólico (Diofanto hacia 250 y Viete a finales del XVII). Este lenguaje o notación abstracta, con la ayuda de letras usuales del alfabeto, se integró rápidamente en la práctica de la escritura matemática.

Descartes (1637) ya lo utilizó mucho más que Viete, y leer a un autor del XVII como Euler no es nada exótico desde el punto de vista de la escritura.

La generalidad de los enunciados y de las demostraciones, facilitados en gran medida por la escritura algebraica era ya un gran activo entre los matemáticos al principio del XIX. Es más bien el contenido o los objetos del álgebra los que cambiaron y con ellos, los tipos de problemas y los métodos de investigación y presentación de los resultados en las demostraciones.

Como primer y más simple ejemplo consideremos los números negativos. Su estatus es aún muy ambiguo a principios del XIX. Por supuesto durante mucho tiempo y en distintas civilizaciones, las matemáticas podían efectuar operaciones donde había diferencia de números. Las reglas eran descritas de manera equivalente a nuestra "menos por menos da más". En notación actual se trataba de situaciones como: $(a-b)(c-d)=ac-bd-bc+bd$. No se consideraban números negativos aislados, las soluciones negativas eran generalmente rechazadas como "Imposibles", "ficticias" o "Imaginarias". ¡Pero si -9 no tiene sentido $\sqrt{-9}$ tiene aún menos!

Sin embargo, los números negativos y los que nosotros llamamos números complejos, eran utilizados por los matemáticos, ¿cómo conciliar la utilidad y lo aparentemente absurdo? Sin respuesta correcta a este problema, nadie podría asegurar que no se llegase a resultados falsos al utilizar números mal fundamentados conceptualmente hablando.

Retrospectivamente, se pueden distinguir dos tipos de justificaciones. La primera consiste en interpretar los negativos y los complejos usando los positivos o la geometría, para proceder a una extensión de los conceptos que nos aseguren que las propiedades deseadas se cumplan. La segunda renuncia al significado para concentrarse sobre las propiedades operacionales.

Algunos reconocieron la dificultad de interpretar los números negativos y los complejos pero se hicieron intentos en este sentido. En su "Álgebra" (1673) John Wallis decía primero "es *también imposible que una cantidad sea negativa. Por eso no es posible que una magnitud sea menos que nada, o un número menos numeroso que ninguno*" pero él recurre enseguida a la dirección del movimiento sobre una recta "*Así +3 significa 3 yardas adelante y -3 significa 3 yardas hacia atrás pero sobre la misma recta, y cada una designa (al menos sobre la misma línea infinita) un punto y uno sólo*".

Esta correspondencia entre los números y los puntos de un eje (recta que tiene un punto origen, nuestro cero, una unidad de longitud y una dirección) es estándar en las clases de hoy. Pero la aceptación de los números negativos por los matemáticos y más generalmente por la comunidad intelectual no era aún un hecho logrado en los aledaños de 1800. Lazare Carnot, por ejemplo, no estaba convencido de la explicación de Wallis (no sabemos si había leído o no sus textos) e ironizaba sobre "*un movimiento hacia Occidente, o un movimiento hacia el Norte y un movimiento hacia el Sur, yo preguntaría cómo es un movimiento hacia el Norte-Este, hacia Norte-Oeste, hacia Sur-Sur-Oeste etcétera y de qué signos estarían afectadas esas cantidades en el cálculo*". Y reincidía en 1803 "*para obtener realmente una cantidad negativa aislada necesitaría sustraer una cantidad efectiva de cero, eliminar cualquier cosa de nada: operación imposible. Cómo concebir pues una cantidad negativa aislada*"

Sin embargo, es este enfoque el que asume Argand en 1806, comienza como Wallis justificando el uso de números negativos por argumentos esencialmente direccionales sobre una recta (balances, déficit) y, sobre todo, tiene éxito al representar los números complejos en el plano, lo que Wallis no llegó a hacer y que Carnot ni siquiera pensó en intentarlo. La aceptación de los números complejos como entidades "legítimas" no se produce hasta que Gauss y Cauchy les dieron legitimidad con su uso. En cuanto a los números negativos, Hoüel en 1874 dice que se incorpora el símbolo que designa una cantidad, el signo indica en qué sentido debe ser llevada esta cantidad.

Otra manera de salir del apuro era renunciar al significado para concentrarse sobre las propiedades, lo cual conducirá a una visión puramente simbólica, combinatoria y lógica del álgebra. El álgebra simbólica surgirá de un gran debate entre los británicos en cuanto a los razonamientos correctos, a la abstracción en el sentido de los términos generales y a los signos, debate donde elementos matemáticos y filosóficos estaban relacionados de manera íntima y quizás inseparable.

El álgebra simbólica británica se desarrolla en respuesta a los problemas de los números negativos y de los números imaginarios. George Peacock (publicó su Tratado de Álgebra en 1830) y otros algebristas británicos propusieron como solución del problema el enfoque simbólico del álgebra, con sus símbolos y signos vacíos de sentido. Pese a que era posible, como se ha visto, interpretar los números negativos y los complejos, la resistencia no desaparecía. Y además van apareciendo otros objetos incrementando así las dificultades de interpretación. Algunos de estos objetos son los cuaterniones de Hamilton (y su producto no conmutativo), las matrices (y su producto también no conmutativo), los grupos de permutaciones (el producto de composición no es conmutativo)… Se privilegia la forma, las propiedades relacionadas y las reglas más que la naturaleza o el sentido de los objetos. El álgebra se vuelve poco a poco la ciencia de las estructuras definidas por las relaciones entre los objetos de los que se ignora su naturaleza. Poco importa de qué se habla siempre que se conozcan las propiedades de las relaciones y de las operaciones sobre los objetos formales (o los símbolos) que son ahora las entidades matemáticas. Este desmantelamiento animó el desarrollo de la axiomática.

En todo caso, el sentido (la semántica) pierde su importancia a favor del signo (la sintaxis). Las demostraciones se vuelven una sucesión de símbolos correctamente empleados y combinados, y cumpliendo las reglas dadas al principio. Esta descripción es un tanto externa pues las matemáticas de envergadura tratan verdaderos problemas. Pero, de una parte, esos problemas en álgebra se vuelven cada vez más abstractos en el transcurso del XIX. Por otra parte, la enseñanza de las matemáticas, especialmente en los niveles inferiores, sufrió un retroceso al perder el contacto con el sentido y la historia de esta axiomatización. Las matemáticas, al menos el álgebra, parece no ser más que un puro juego formal sobre signos sin significado.

6.3 La Geometría no se salva de este cuestionamiento generalizado

Durante mucho tiempo la geometría había sido el dominio de la evidencia y de la certeza. Ello había permitido contener la crisis de los inconmensurables del tiempo de Eudoxo (IV a.c.) y de Euclides (300 a.c.), dando a todos el ejemplo por excelencia del acuerdo entre los sentidos y la razón, parecía destinada a definir los tiempos y la evolución. Se llega al punto de que a los que hoy se les designa como matemáticos, fueron llamados geómetras.

La voluntad de demostrar el V postulado de Euclides a partir de los otros fue el origen de la transformación principal de la geometría y de nuestros conceptos de espacio. Este celebre postulado fue históricamente conocido bajo varias formulaciones:

Euclides: *" si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontraran en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos"*

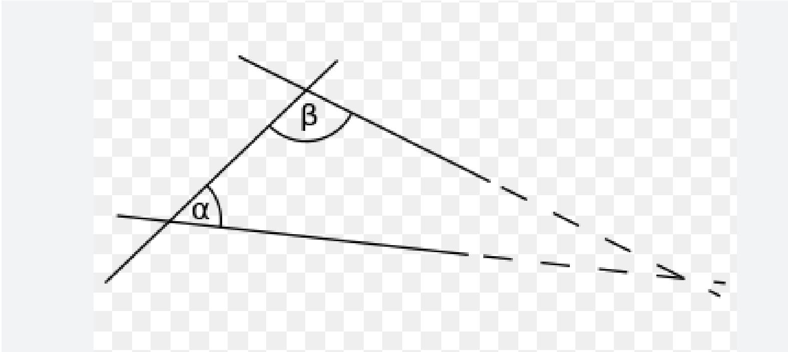


Figura 1. V postulado

Playfair (siglo XVIII): Por un punto exterior a una recta dada solo cabe trazar una paralela (es conocido también como axioma de Playfair).

Los griegos, los árabes, los europeos de la edad clásica trataron de probar, a partir de otros postulados, el postulado de las paralelas porque su forma contrastaba con la de otros postulados (por ejemplo, todos los ángulos rectos son iguales entre si…). Se intentan pruebas directas. En vano. Para ello, desde el principio se utilizaron las pruebas por contradicción: suponemos la negación del V postulado y deducimos correctamente de esta negación un resultado manifiestamente falso, podremos así negar la negación y concluir la veracidad del postulado, esta vez demostrado y convertido en proposición o teorema. Por ejemplo Sacheri (1667 – 1733) rechaza los resultados obtenidos al negar el V postulado, no porque hubiese una contradicción lógica entre ellos, sino porque eran demasiado contradictorios a los que se obtienen en la geometría usual y a los que nuestra experiencia actual en el movimiento y la manipulación de objetos nos enseña.

Los primeros en publicar una serie de resultados obtenidos a partir de la negación del postulado de las paralelas y en presentarlos como válidos aunque les parecieran extraños, fueron Nicolas Lobatchevski y Janos Bolyai hacia 1830. El apoyo tardío dado a estas audaces construcciones por la divulgación de resultados contenidos en el diario personal de Gauss, contribuyó a legitimar la geometría no euclidiana que sin embargo sigue siendo objeto de la indiferencia casi general y de la hostilidad implacable de otros.

De los trabajos de Riemann, en el año 1850, nace otro tipo de geometría no euclidiana, de tipo local, donde las propiedades del espacio pueden cambiar de punto en punto. Se comprende la consternación, el miedo y la cólera de aquellos para los que la geometría era la codificación científica de las propiedades del espacio verdadero en el que vivimos. ¿Por un punto dado y una recta dada podemos trazar una y solo una recta paralela (Euclides), una infinidad de paralelas (Bolyai y Lobatchevski) o ninguna paralela (Riemann)? ¿Incluso en el mismo orden, la suma de los ángulos de un triángulo es siempre igual, siempre inferior, o siempre superior a 180º?

Aunque para la mayoría de los matemáticos y pensadores parecía que solo un modelo era verdadero y que este debía ser el viejo modelo euclídeo. Algunas mentes de primer orden en sus dominios se oponían a estas novedades. La razón profunda de esta oposición es el carácter anti intuitivo de la geometría no euclidiana que choca con la concepción dominante de una geometría conocida como ciencia del espacio físico o como emanación de una intuición espacial a priori, pura y necesaria. Esta es la razón por lo que los simpatizantes de la geometría no euclidiana están todos de acuerdo que la revolución de la geometría no euclidiana consistía en la eliminación definitiva del argumento base sobre la evidencia intuitiva.

Pero eso no es más que un aspecto menor de la geometría no euclidiana, y que además, se puede encontrar en el caso de la topología e incluso del análisis clásico, el punto capital de la geometría no euclidiana era justamente la filosofía de la pluralidad en la que se sostiene.

En este fin del siglo XIX quedaban dos caminos para poder decidir de una manera categórica. Finalmente se podrían haber encontrado contradicciones en estas extrañas nuevas geometrías. Por desgracia para los nostálgicos, se lograron desarrollar modelos euclídeos para representar las geometrías no euclidianas. En consecuencia, todas estas geometrías tienen una misma coherencia relativa: si una es contradictoria, las otras lo son también. El concepto de no contradicción interna no permite favorecer las geometrías no euclídeas ni las geometrías euclídeas.

El recurso a la experiencia concreta podría al menos indicar cuál de las dos geometrías corresponde a la realidad. Esta segunda forma, ya entrevista por Gauss y Riemann, parecía prometer la victoria a la geometría euclídea si es consistente con nuestras actividades y percepciones actuales. Se sabe ahora que la geometría riemanniana es la que conviene a la teoría de la relatividad general en física.

Parece que, según los objetivos y según la escala de observación, una geometría puede ser más útil que las otras, pero sin superioridad universal en cuanto a su eficacia y sin legitimidad superior en sí. Henri Poincaré termina cada uno de los tres ensayos recogidos en "L'espace" de su obra " La ciencia y la hipótesis" con una declaración de pluralismo en cuanto a las geometrías y de comodidad en cuanto al criterio de elegir entre ellas *" una geometría no puede ser más verdadera que otra, puede solamente ser más cómoda porque es más simple, porque se adapta bastante bien a las propiedades de los sólidos naturales*", excepto por este matiz, la posición de Poincaré es la de los matemáticos y físicos de hoy: tomemos la geometría más ventajosa teniendo en cuenta nuestros aparatos sensoriales y mentales (en otras situaciones se podría hacer otra elección) y del tipo de descripción física anhelada.

La voluntad de demostrar un resultado (el postulado de las paralelas) en lugar de darlo por sentado ha llevado a nuevas geometrías y nuevas concepciones de las relaciones entre la geometría y el espacio. Es una notable ilustración de la fecundidad del trabajo demostrativo. Esta fecundidad se verifica también en los diversos ensayos de solución, sólo con compás y regla no graduada, de los tres famosos problemas griegos: cuadratura del círculo, duplicación del cubo, trisección del ángulo. Diversas curvas mecánicas se inventaron al efecto, las relaciones geométricas proporcionan ecuaciones resultando una parte del álgebra actual. Hasta el siglo XIX no se demostró la imposibilidad de resolver estos problemas con la única ayuda de herramientas euclídeas (regla y compás). Pero la imposibilidad lógica no debe confundirse, en estos casos, con esterilidad histórica o conceptual.

7. Crisis de fundamentos (≈1900 - ≈1930)

Si ya no podemos confiar en la geometría y en nuestras intuiciones provenientes de nuestra experiencia ordinaria en el espacio euclídeo, si las curvas pueden ser irregulares, había que volver a los números, retomar de alguna manera el programa pitagórico de todo es número.

Así se establece el análisis sobre propiedades cada vez más precisas de los números reales pues, hacia 1870, la construcción de los reales a partir de los racionales y de estos a partir de los enteros, ya están disponibles. Incluso la geometría se aritmetiza. Quedaba por definir los naturales lo que hizo Peano hacia final de siglo. Podríamos esperar salir del apuro. Por desgracia la teoría ingenua de conjuntos elaborada por Cantor en el último tercio del siglo, y que parecía que iba a servir de lenguaje de base a los matemáticos, origina contradicciones, llamadas púdicamente "Paradojas" aún más graves que las insuficiencias conceptuales encontradas anteriormente. Se dice, por ejemplo, "El conjunto E de todos los conjuntos que no son elementos de ellos mismos" es y no es elemento de sí mismo $E\in E\leftrightarrow E\notin E$ ¡Hum!

Las diversas tentativas de solución de este problema se agrupan habitualmente en tres escuelas: logicismo, intuicionismo y formalismo.

El logicismo encabezado por Russell y Whitehead quería reducir la matemática a la lógica. En particular, una teoría de tipos encaminada a eliminar las autorreferencias viciosas, como en el conjunto E definido anteriormente (en realidad mal definido como dirán a partir de ahora los matemáticos). Pero demasiado compleja y exigiendo tanto como podría ofrecer como certeza natural, el logicismo no podía convertirse en fundamento de las matemáticas incluso contribuyendo al desarrollo de la lógica matemática.

El intuicionismo propuesto por Brouwer consideraba que el ser humano posee ciertos conceptos matemáticos (como decía Kant un siglo antes). A partir de esos conceptos, toda construcción correcta, en un número finito de pasos, de conceptos o proposiciones era válida. Pero no se podían usar procesos infinitos ni el tercio excluso (para esta forma de intuicionismo no se puede suponer que una proposición es necesariamente verdadera o falsa ni que la falsedad de no P implique la veracidad de P). Las demostraciones por el absurdo o utilizando el axioma de elección son excluidas, entre otras. Las matemáticas se empobrecen de numerosos resultados a los que la comunidad matemática no quiere renunciar. Habiendo contribuido a demostraciones constructivistas de ciertas proposiciones, este intuicionismo fue juzgado globalmente demasiado restrictivo.

El formalismo, cuya principal figura fue Hilbert, dirigido a establecer la coherencia más que la veracidad de las matemáticas, y esto en un número finito de pasos. Abandonando el significado por la forma (sólo en la parte metamatemática de su obra), Hilbert propone un programa de demostración lógico de no contradicción. Lamentablemente esta empresa se detuvo cuando Gödell publicó hacia 1930 algunos de los textos más notables de la lógica matemática. Recordemos que la aritmética no podía ser probada coherente o no contradictoria con la ayuda de la lógica usual. Además todo sistema coherente, incluida la aritmética, contiene proposiciones indecidibles, es decir, no demostrables y cuya negación es no demostrable.

En resumen, la aritmética (y con mayor motivo toda las matemáticas) no puede demostrarse que sea coherente y, además, sería incompleta si fuera coherente.

Podemos imaginar el alcance y la intensidad del daño a lo largo de este periodo en estas llamadas cuestiones fundacionales sin ser verdaderamente fundamentales en la práctica cotidiana de la mayoría de la comunidad matemática. La dificultad y complejidad de las opciones a tener en cuenta en la concepción de lo que es la matemática, de sus bases y del tipo de razonamiento correcto en matemáticas están ilustradas adecuadamente por la confesión irónica de John Von Neumann que contribuyó a la teoría de conjuntos y a la teoría de juegos: "*Que humillante fue ver mis propias formas de ver la verdad matemática absoluta cambiar tan fácilmente durante este periodo. Y cambiar tres veces seguidas*".

Varios intentos de demostración, en los dominios del análisis o de la geometría, entre otros, habían conducido a modificaciones o extensiones de los conceptos. Sin embargo todas las tentativas de fundamentar las matemáticas habían sido fracasos relativos en cuanto a su objetivo principal. ¿Qué hacer? Hacer matemáticas, siendo el plural en lo sucesivo de rigor (a pesar del título Elementos de Matemática de Bourbaki) ya que no había una concepción unánime de la matemática, de sus reglas y del poder legítimo delegado a los matemáticos. Se obtienen resultados diferentes según, por ejemplo, se autorice el recurso a un axioma de elección que se ocupe de lo arbitrario, lo numerable o lo finito.

No fue el final de las matemáticas ni el fin de las demostraciones pero fuerza a constatar los límites de la empresa de demostración comenzada 25 siglos antes por los griegos, siguió siendo posible hacer demostraciones pero dentro de sistemas bien definidos y con instrumentos bien identificados. Nuestro conocimiento está condenado a la incompletitud, lo cual, de alguna manera, era algo ya sabido.

La amenaza de una contradicción imposible de corregir que lleve a colapsar todo el edificio matemático seguirá siendo temida pero como no se ha producido en tanto tiempo, es necesario tener confianza. Seguimos trabajando, es lo que hacen los matemáticos inventando y demostrando pero ahora sin un fin global absoluto.

8. ¿Por qué demostrar?

Si la demostración se considera esencial y básica en matemáticas es porque las matemáticas han sido consideradas, históricamente hablando, modelo de toda ciencia. Conocemos el dicho aristotélico "*sólo hay ciencia de lo general*". Lo interesante no es que la suma de los ángulos interiores de tal triángulo, medidos concretamente, valga aproximadamente dos rectos o 180º. Eso no sería más que un caso particular. Se entiende que esto es para todos los triángulos ideales. Generalidad y exactitud, es lo que la ciencia ha perseguido desde la Grecia clásica.

Pero ¿cómo asegurar que tal o cual propiedad es satisfecha por todos los triángulos? No podemos medir ninguna de manera exacta, concreta. Es necesaria una etapa suplementaria del pensamiento: demostrar, es decir, ratificar directamente o por intermedio de otras propiedades tenidas universal y absolutamente por verdaderas. Aristóteles (384 – 322 a. c.) decía de manera muy clara "*Saber es conocer por medio de la demostración, Por demostración entiendo el silogismo científico (…) es necesario que la ciencia demostrativa parta de premisas que sean verdaderas, primarias, inmediatas, más conocidas que la conclusión, anteriores a ella y de las cuales ellas son las causas*".

Aunque Aristóteles no parece haber tenido una actividad matemática significativa, tenía un buen conocimiento de los problemas matemáticos de la época (los inconmensurables, las paradojas de Zenón sobre el infinito) y así lo expuso en su obra filosófica.

Se considera generalmente que los "Elementos" de Euclides (aprox. 300 a.c.) constituyen históricamente el más impresionante acontecimiento de este ideal deductivo. La palabra "Elementos" por sí sola, es reveladora de una intención y será reutilizada en numerosas obras hasta nuestros días (recordemos Los Elementos de Historia de las Matemáticas de Bourbaki). Recordemos también la etimología de la matemática que significaba ciencia.

La influencia aristotélica sobre Euclides es capital y preponderante según ciertos historiadores. Así Charles Jones señala "*Euclides, en particular, ha sido considerado como platónico pero eso es incorrecto…Nosotros comprendemos la estructura y el principio de los Elementos mirando al lado de Aristóteles*".

La posición central de las matemáticas en ciencia se remonta al menos a Pitágoras (VI a.c.) evidenciada por el quadrivium: aritmética, geometría, astronomía y música (Armonía). Esta agrupación de las disciplinas en torno a las matemáticas es el cuerpo de la ciencia griega realmente constituidas en virtud y según las reglas del ideal deductivo. Se puede retrospectivamente considerar como rudimentario el estudio de las razones entre los sonidos y las longitudes en los pitagóricos o como puramente descriptivos el sistema ptolomeico que fue la mejor representación griega del movimiento de los cuerpos celestes entonces conocidos. El hecho es que el ideal de exactitud y de generalidad, con la ayuda de las matemáticas, inspira y sostiene esta manera de hacer de la ciencia.

Thomas S. Kuhn procede a un reagrupamiento apenas diferente de las ciencias en la antigüedad: astronomía, estática, óptica, matemáticas y armonía pueden ser descritas como un solo campo: las matemáticas. Solo en el XVI se le añade una sexta disciplina: el estudio del movimiento.

Kuhn sostiene que si se considera la revolución científica como una revolución de ideas, son los cambios en esos dominios tradicionales, casi matemáticos, los que se deben buscar para entender. Esta voluntad de organizar el conocimiento en un todo bien estructurado reposa sobre algunas ideas de base y sobre las deducciones extraídas de ellas que se pueden encontrar de diversas formas en Galileo, Descartes y Newton en cuanto a las matemáticas propiamente dichas y en cuanto a la filosofía natural.

Históricamente la demostración primero tuvo como objetivo establecer la certidumbre de las proposiciones. En el siglo XVII otra función de la demostración parece tomar el control: esclarecer, hacer comprender. Demostrar es en efecto unir, enlazar, comprender una demostración es más captar los puntos esenciales, las etapas y las líneas de fuerza que verificar la validez línea tras línea.

Referencias

[1] BOYER C.B (1986): *Historia de la matemática*, A.U./94, Madrid

[2] BOURBAKI N. (1976): *Elementos de historia de las matemáticas*, AE

[3] COLLETE, J.L (1985): *Historia de las matemáticas*, siglo XXI, Madrid

[4] FEFERMAN, S. *What's Special about Mathematical Proofs?*, 2012, Texto de una conferencia pronunciada en el Williams Symposium on Proof, University of Pennsylvania, Nov. 9, 2012. Disponible en línea en https://math.stanford.edu/~feferman/papers/Proof-UPenn.pdf.

[5] KLINE M. (1992): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (II), AU/724, Madrid

[6] LORENZO L. (1977): *La matemática y el problema de su historia*, Tecnos, Madrid

[7] NEWMAN J.R (1985): *El mundo de las matemáticas*, Grijalbo, Barcelona

[8] POINCARE. H., *Sur la nature du raisonnement mathematique*, 1894, disponible en PDF http://henripoincarepapers.univorraine.fr/bibliohp/.

[9] TATON R. (1988): *Historia general de la ciencia*, (VIII), Orbis, Barcelona

Sobre el autor:
Nombre: Antonio Rosales Góngora
Correo Electrónico: anrogo58@yahoo.es
Institución: IES Bahía de Almería

Juegos y rarezas matemáticas

Celebración del Día de Pi 2022 en la UPM

Celebration of Pi Day 2022 at the UPM

Pedro M. G. Manchón, Ernesto Nungesser, Andrea Tellini

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen XIV, Número 1, pp. 61–74, ISSN 2174-0410
Recepción: 10 May'23; Aceptación: 25 Jun'23

1 de abril de 2024

Resumen

Desde 2018 la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) tiene una cita anual con el Día de Pi, que se celebra los días 14 de marzo (3/14 en el calendario de los países anglosajones). En este artículo repasamos los dos problemas y algunas cuestiones del concurso *Quiz* propuestos a todos los alumnos de la UPM en la edición de 2022.

Palabras Clave: Día de Pi, Universidad Politécnica de Madrid, Problemas.

Abstract

Since 2018 the *Universidad Politécnica de Madrid* (UPM) has an annual appointment with Pi Day, which is celebrated on March 14 (3/14 in the calendar of Anglo-Saxon countries). In this article, we review the two problems and some questions of the *Quiz* contest proposed to all UPM students in the 2022 edition.

Keywords: Pi Day, Polytechnic University of Madrid, Problems .

1. Introducción

En 2019 la UNESCO proclamó el 14 de marzo como Día Internacional de las Matemáticas. Se eligió este día porque, en el calendario de los países anglosajones, esta fecha se indica como 3/14, lo que vienen a ser los primeros dígitos del omnipresente número π. De hecho, ya con anterioridad a 2019, los matemáticos celebraban esta fecha como el "Día de Pi".

En concreto, la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) tiene una cita anual con el Día de Pi desde 2018. La idea surgió en el Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial, en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial (ETSIDI), y con los años se ha ido extendiendo, tanto en términos de organización como en su relevancia, al resto de Escuelas de la UPM. Además, cabe resaltar que en el curso académico 2021/22 echó a andar el recién estrenado Grado en Matemáticas en la UPM, así que en el año 2022 había más razones que nunca para celebrar el Día Internacional de las Matemáticas ("Día de Pi") en la UPM.

En la edición 2022, que es justo la tratada en este artículo, se realizaron dos concursos bien diferenciados. En el primero de ellos los alumnos participantes contaron con algo más de una semana para presentar sus soluciones (totales o parciales) a dos problemas propuestos por los organizadores. Unos días más tarde, y coincidiendo con el Día de Pi, tuvimos una celebración que empezó con la preciosa conferencia sobre teoría de nudos de título "Y tú, ¿cómo te atas los cordones?", impartida por la profesora de la Universidad de Sevilla, Marithania Silvero Casanova, premio de investigación matemática Vicent Caselles 2019. A la conferencia le siguió un corcurso Quiz en línea para mentes ágiles e inquietas con un total de 13 cuestiones; cada cuestión debía responderse en pocos segundos.

Puede consultarse la información de otras ediciones, el listado de ganadores y los carteles originales de cada edición, en la siguiente página web: `http://dmaii.etsii.upm.es/web/dia-de-pi/`

En este artículo discutimos, en la Sección 2, el primero de los problemas propuestos, que trata las funciones beta y gamma. En la Sección 3 visitamos el reino de los nudos y la topología de superficies, revisando una construcción debida a Turaev [2]. Finalmente, la Sección 4 repasa algunas cuestiones del *Quiz* propuestas a los alumnos.

Cartel del Día de Pi 2022 en la UPM, diseñado por Ibai Astier.

2. Las funciones beta y gamma

¡El número π aparece con tantas caras diferentes! Aquí lo vamos a descubrir en medio de imponentes integrales. Definamos en primer lugar la función $F(x,y)$, para $x > 0, y > 0$, como sigue:

$$F(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

1. Demuestra que

$$F(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta. \tag{1}$$

   A continuación definimos una nueva función $f(x)$, para $x > 0$, como sigue:

$$f(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

2. Demuestra la relación

$$f(x)f(y) = f(x+y)F(x,y). \tag{2}$$

3. Calcula $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y después utiliza la relación (2) para demostrar que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Este fue el primer problema propuesto. Detallamos ahora una solución:

1. Basta hacer la transformación $t = \sin^2\theta$. Entonces $dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$ y si t varía de 0 a 1, tenemos que θ varía de 0 a $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{x-1}(1-\sin^2\theta)^{y-1} 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

   Utilizando la igualdad $1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{x-1}(\cos^2\theta)^{y-1}\sin\theta\cos\theta\, d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-2}(\cos\theta)^{2y-2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta, \end{aligned}$$

   lo que finalmente nos lleva al resultado deseado absorbiendo $\sin\theta$ y $\cos\theta$ en las expresiones con los exponentes $2x-2$ y $2y-2$ respectivamente.

2. Este ejercicio es más difícil. Para mostrar (2) vemos primero que

$$f(x)f(y) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \int_0^\infty s^{y-1}e^{-s}ds = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}s^{y-1}e^{-s}dt\,ds.$$

El cuadrante $t > 0, s > 0$, puede describirse como la unión de los segmentos con extremos $(u, 0)$ y $(0, u)$:

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + (1-v) \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, \qquad u > 0, \quad 0 < v < 1,$$

lo que nos lleva al cambio de variables $t = uv$, $s = u(1-v)$ con $u > 0$, $0 < v < 1$, siendo el Jacobiano de la transformación

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix} \right| = -uv - u + uv = -u.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}s^{y-1}e^{-s}dt\,ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 (uv)^{x-1}e^{-uv}[u(1-v)]^{y-1}e^{-u(1-v)}u\,dv\,du, \\ &= \int_0^\infty u^{x+y-1}e^{-u}du \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}dv \\ &= f(x+y)F(x,y). \end{aligned}$$

3. En el último ejercicio se puede usar la expresión (2) que relaciona f y F, es decir

$$f\left(\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1)F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

Utilizando la expresión de F dada por la ecuación (1), tenemos que

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi.$$

Por otra parte,

$$f(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 1.$$

Nótese que f es una integral con integrando no negativo, así que $f \geq 0$. Esto, junto con (3) y el resultado $f(1) = 1$, nos permite deducir que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Hay un modo alternativo de obtener este resultado, partiendo directamente de la definición de f y considerando la transformación $t = u^2$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^\infty u^{-1} e^{-u^2} 2u\, du = 2\int_0^\infty e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du,$$

la última igualdad por ser el integrando una función par. Ahora la clave consiste en considerar el cuadrado de la última integral y pasar a coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr\, d\theta = \pi.\end{aligned}$$

De aquí obtenemos el resultado de antes dado que $f\left(\frac{1}{2}\right)$ es positivo.

La mayoría de las respuestas recibidas a este problema reconocían en $F(x, y)$ a la función beta, y en $f(x)$ a la función gamma. También muchas respuestas reconocen que la integral $f\left(\frac{1}{2}\right)$ coincide con

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du,$$

que es la conocida integral de Gauss. Un integrando algo más general, a saber

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

es la función de densidad de la llamada distribución de Gauss o distribución normal (con media a y varianza σ^2). Dicha distribución aparece con mucha frecuencia en estadística; por ejemplo, describe la distribución de la altura en las personas, la distribución de las notas en un examen, etc. La gráfica de $G(x)$ es muy característica, y se la conoce como campana de Gauss.

La función beta, que suele denotarse por $B(x, y)$, está definida de hecho para números complejos x e y con parte real positiva. B es la letra mayúscula beta del alfabeto griego. En el problema resuelto se ha visto la relación que tiene con la función gamma, que se denota por $\Gamma(x)$, que también se puede definir para números complejos con parte real positiva. Partiendo de la definición dada aquí, no es difícil demostrar que, para números enteros positivos, hay una relación directa muy conocida también con el factorial, a saber, que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt = (n-1)!$$

La demostración se puede hacer, por ejemplo, por inducción.

Por último, y ya que estamos celebrando el Día de π, debemos mencionar que existe la llamada función pi, escrita Π, definida como

$$\Pi(z) = \Gamma(z+1),$$

que, para números enteros positivos n, coincide con el factorial de n, es decir,

$$\Pi(n) = n!$$

3. Ponga un poco de topología en su vida

Puede imaginar un nudo matemático *anudando* un cordón de los zapatos y pegando después sus extremos entre sí. Un nudo puede representarse mediante diagramas planos, pudiendo apreciar dos de estos diagramas en la Figura 1.

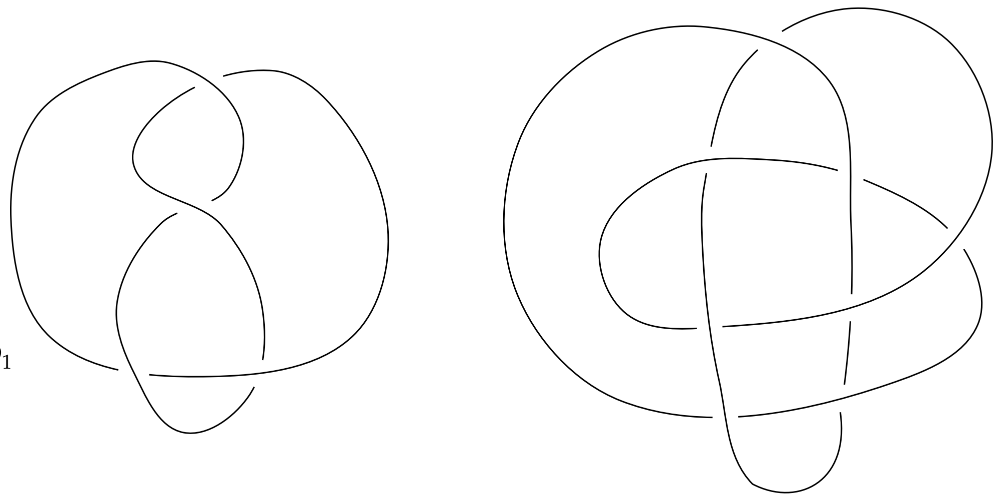


Figura 1. Diagramas de nudos D_1 y D_2

A partir de un diagrama D de un nudo podemos construir una superficie $S(D)$ de la siguiente manera: por cada cruce en el diagrama colocamos un pequeño cuadrado, y por cada arista del diagrama añadimos un rectángulo conectando los cuadrados que corresponden a los cruces extremos de la arista, como se muestra en la Figura 2.

Es importante tener en cuenta que hemos *twistado* el rectángulo cuando éste se corresponde con una arista no alternante (una arista no alternante es aquella que pasa las dos veces por encima de sus cruces, o las dos veces por debajo). Y es importante observar hacia qué lado hemos realizamos el *twist*. En la Figura 3 se puede ver un diagrama (con aristas alternantes y no alternantes) y la superficie correspondiente.

Ahora llega el momento de plantear varias cuestiones. En primer lugar quisimos saber si las clases de dibujo artístico que todos recibimos merecen la pena:

1. Dibuje las superficies $S(D_1)$ y $S(D_2)$ correspondientes a los diagramas de la Figura 1.

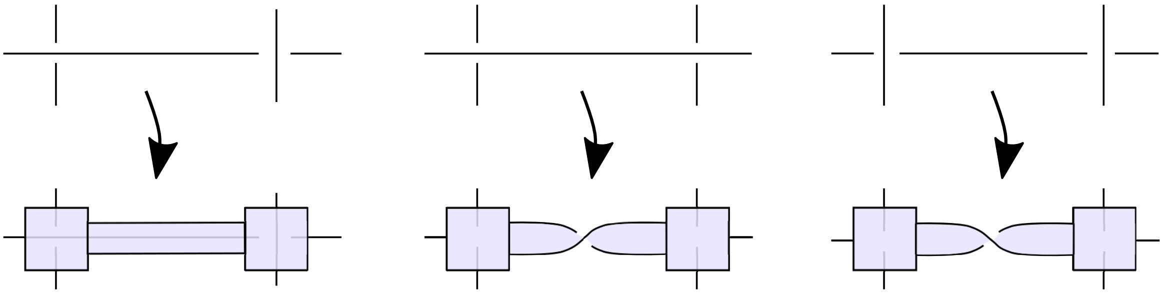


Figura 2. Trozos de superficie correspondientes a aristas alternantes (izquierda) y no alternantes (central y derecha)

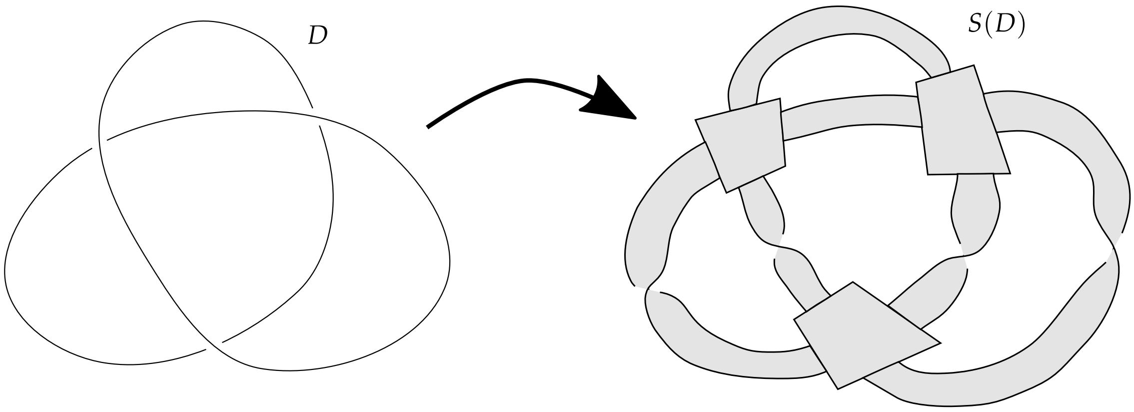


Figura 3. Un diagrama D (con seis aristas) y la superficie correspondiente $S(D)$

2. Compruebe que dichas superficies son orientables, es decir, cada una de ellas tiene dos lados (digamos un anverso y un reverso). Para ello se puede colorear cada lado con un color diferente (si por un momento piensa que cualquier superficie es orientable, consulte en Wikipedia la famosa banda de Moebius).

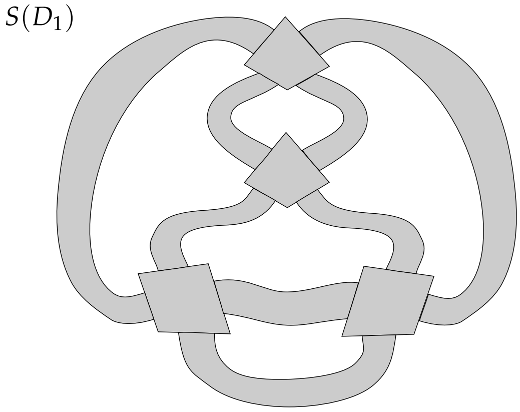
Ahora trataremos las superficies $S(D)$ en general. A ver qué tal se nos da:

3. Demuestre que, no importa cómo sea el diagrama D de partida, la superficie $S(D)$ es siempre orientable.

4. La frontera de la superficie $S(D)$ la forman N curvas cerradas simples (por ejemplo, $N = 3$ para la superficie $S(D)$ de la Figura 3). ¿Qué relación hay entre este número N y el número c de cruces del diagrama D, *cuando el diagrama D es alternante*? Que el diagrama del nudo sea alternante significa que todas sus aristas son alternantes; con otras palabras, el diagrama puede recorrerse alternando el paso por encima/por debajo.

Este fue el segundo problema propuesto. Detallamos a continuación una solución:

1, 2. Aquí lo importante es recordar que sólo las bandas que corresponden a aristas no alternantes deben *twistarse*, y el twist debe hacerse del modo adecuado. Para demostrar que dichas superficies son orientables basta ver que tienen dos lados, que pintamos con diferentes colores en la Figura 4 (en el primer dibujo el lado azul queda todo por atrás).



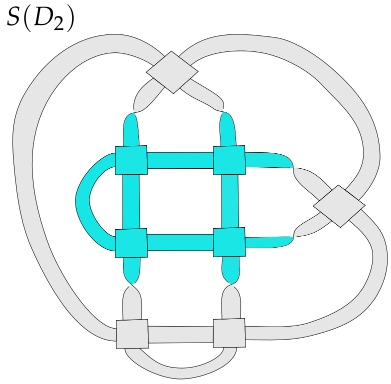


Figura 4. Superficies $S(D)$ para los diagramas D_1 y D_2 de la Figura 1

3. Se trata de ver que cada ciclo de bandas (es decir, una colección cuadrado-banda-cuadrado-banda-etcétera consecutivos que empieza y termina en el mismo cuadrado) recorre exactamente un número par de aristas twistadas, de manera que no aparece una banda de Moebius. En efecto, si recorremos $S(D)$ regresando al punto de partida, tras haber caminado por un número impar de bandas twistadas (y tal vez algunas otras no twistadas), se comprueba que el rastro de pintura azul que se ha ido dejando mancha los dos supuestos *lados* de la superficie. ¡Un momento! No intente leer de nuevo la frase anterior, que tiene toda la pinta de ser un jeroglífico egipcio de los difíciles. Mejor, pruebe a construir una superficie de Moebius pegando dos bandas, una plana y otra twistada, y eche a andar por encima de la superficie mientras pinta de azul el terreno por el que pisa...

   Ahora bien, para ver que cada ciclo de *bandas* en la superficie $S(D)$ tiene exactamente un número par de aristas twistadas, basta ver que cada ciclo de *aristas* en el diagrama D tiene un número par de aristas no alternantes. De este hecho recibimos demostraciones muy diferentes y curiosas. He aquí un modo de verlo: partiendo de un cruce, recorramos las aristas que rodean una cara del diagrama D, escribiendo signos $+$ o $-$ en cada cruce, dependiendo de si llegamos a éste mediante una arista que lo alcanza por encima o por debajo, respectivamente. Por ejemplo, al recorrer la cara que indica la Figura 5, escribiríamos el código $+-+---$.

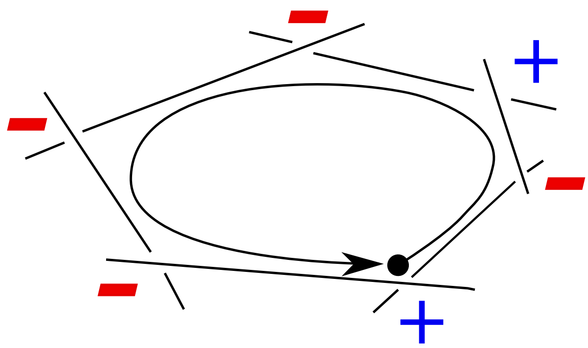


Figura 5. Recorriendo las aristas de una cara y anotando los signos.

   Ahora observamos que una arista alternante tiene en sus extremos el mismo signo, mientras que una no alternante los cambia. Por lo tanto hay tantos cambios de signos como aristas *no* alternantes. Dado que el número de cambios de signos es necesariamente par (porque llegamos al mismo signo del que partimos), tenemos necesariamente un número par de aristas no alternantes.

4. Si aún nos quedan fuerzas, veamos cómo demostrar que, si D es un diagrama alternante, entonces el número N de curvas cerradas simples que componen la frontera de $S(D)$ coincide con el número de cruces c del diagrama D más dos, es decir,

$$N = c + 2.$$

Hay una observación que hace esto menos difícil de lo que parece. Y es que, si D es alternante, la superficie $S(D)$ no tiene bandas twistadas, así que podemos dibujarla contenida completamente en nuestra hoja de papel. En consecuencia N resulta ser el número de regiones r que determina el diagrama D (la región de fuera también hay que contarla). Compruébalo en el dibujo de la Figura 6: a la izquierda el diagrama D determina seis regiones; a la derecha la superficie $S(D)$ tiene en su borde seis curvas cerradas simples.

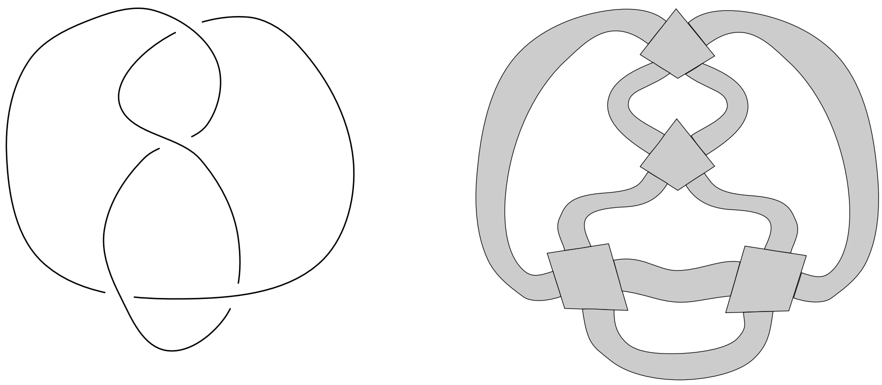


Figura 6. Si D es alternante, $S(D)$ no tiene bandas twistadas.

De manera que es suficiente ver lo siguiente: en un diagrama de un nudo (alternante o no) con c cruces, hay necesariamente $r = c + 2$ regiones. Hay un argumento, basado en la característica de Euler de la esfera, que da una demostración rápida de este hecho. Pero veamos aquí una demostración *ad hoc*, usando inducción sobre el número de cruces.

Empieza así: si un diagrama no tiene cruces, es un simple círculo y tenemos dos regiones, la de fuera y la de dentro: así que el número de regiones es el número de cruces más dos. Y termina así: supongamos que el número de regiones es dos más el número de caras para todos los diagramas de nudos con $c - 1$ cruces. Tomemos ahora un diagrama con c cruces y r regiones. Queremos ver que $r = c + 2$. A partir de nuestro diagrama D construyamos un diagrama D' muy parecido, salvo que en las cercanías de un cruce este se ha suavizado, conectando dos regiones que antes eran diferentes. Para D' tenemos que $c' = c - 1$ y $r' = r - 1$ (porque dos regiones se han fusionado). Ya que $r' = c' + 2$ por hipótesis de inducción, se sigue que $r - 1 = (c - 1) + 2$, o sea $r = c + 2$.

Terminamos esta sección poniendo en contexto el problema propuesto. En Topología, o más en concreto en teoría de nudos, la superficie $S(D)$ es el llamado cobordismo de Turaev del diagrama D (si lo tapamos con los discos adecuados, produce la llamada superficie de Turaev [2]). El género de Turaev de un nudo K es, por definición, el mínimo género de todas las superficies $S(D)$, donde D es un diagrama de K (dicho de manera intuitiva, el género de una superficie compacta sin borde es el número de agujeros que tiene). De la lectura del apartado 4 se infiere que el género de Turaev de un nudo alternante (es decir, un nudo que tiene un diagrama alternante), es necesariamente cero. Así que este género puede interpretarse como una medida de lo lejos que está el nudo K de ser un nudo alternante. Por ejemplo, se sabe que todo nudo casi alternante tiene género de Turaev uno (un nudo es casi alternante si no es alternante y posee un diagrama D al que un cambio de uno de sus cruces lo hace alternante). En cambio, a día de hoy no se sabe si todo nudo con género de Turaev uno es necesariamente casi alternante.

4. Algunas preguntas del Quiz

En esta sección final comentamos algunas de las preguntas propuestas en el concurso Quiz llevado a cabo. Recordemos que el buen hacer de los alumnos se veía dificultado por la marcha inexorable de un reloj muy exigente...

4.1. ¿Cuántos números primos hay?

Supongamos que $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son r números primos distintos entre sí. Sea $m = 1 + p_1 p_2 \cdots p_r$. ¿Cuál es la afirmación correcta?

(a) El número m es necesariamente primo.

(b) Puede ocurrir que algún p_i divida a m.

(c) Hay un número primo que divide a m diferente de $p_1, \ldots, p_r$.

La respuesta correcta es (c), respuesta que encierra realmente una demostración de que existen infinitos números primos. Se razona así: supongamos que $p_1, \ldots, p_r$ fuese la lista completa de los números primos, y que esta lista fuese finita. Escogemos el número $m = p_1 p_2 \cdots p_r + 1$. Entonces p_1 no puede dividir a m, ya que si fuese $m = p_1 k$ con k un número entero, entonces tendríamos $p_1(k - p_2 \cdots p_r) = 1$ y concluiríamos que p_1 divide a 1, un absurdo. De la misma manera se demuestra que tampoco $p_2, \ldots, p_r$ dividen a m. Ahora bien, algún número primo debe dividir a m (algo que necesita una pequeña reflexión), y ninguno de la lista $p_1, \ldots, p_r$ lo hace. Se sigue que debe haber al menos un número primo más que no estaba en la lista original.

Las demostraciones de que existen infinitos números primos deben contarse por decenas, a cada cual más ingeniosa o reveladora de algún aspecto matemático interesante en sí mismo. A Paul Erdös le gustaba hablar de "EL LIBRO", en el cual Dios habría escrito las pruebas perfectas de los grandes teoremas matemáticos. Y esta es la filosofía de un libro humano, de título "Proofs from THE BOOK", de Martin Aigner y Günter M. Ziegler [1], dedicado a recoger un buen número de pruebas elegantes y escritas de modo maravilloso sobre muchos teoremas destacados de las matemáticas. En concreto este libro recoge seis pruebas de la infinitud de los números primos. En nuestro Quiz nosotros pudimos desentrañar la primera de estas demostraciones.

4.2. Partiendo pizzas y tartas

1. ¿Cuál es el número máximo de trozos (no necesariamente iguales) en los que puedes partir una pizza de masa extrafina con 3 cortes rectos?

   Como a los matemáticos nos gusta *generalizar*, vamos a estudiar el problema para un número genérico n de cortes. Además, dado que tenemos mucha hambre, podemos pensar que nuestra pizza puede ser tan grande como queramos, es decir que podemos trabajar en todo el plano. Una vez establecida la solución en ese caso, para considerar una pizza pequeña simplemente bastará con llevar la solución "grande" a la escala correcta.

Para empezar, observamos que, si queremos maximizar el número de trozos, no puede haber dos cortes paralelos ni tres cortes que se intersequen en un único punto. En efecto, si ocurriera cualquiera de estas dos opciones, podríamos modificar ligeramente uno de los cortes para obtener un mayor número de trozos (es decir, las rectas que definen los cortes tienen que estar en posición general en el plano).

Una vez observado esto, si llamamos p_n, $n = 1, 2, \ldots$, al número máximo de trozos en los que podemos partir el plano con n cortes, p_n se calcula a partir de p_{n-1} con el razonamiento siguiente. Gracias a nuestra observación preliminar, sabemos que el n-ésimo corte, el que añadimos, tiene que intersecar todos los $n-1$ cortes ya existentes y lo tiene que hacer en $n-1$ puntos distintos. Estas $n-1$ intersecciones (mejor dicho, los segmentos que las unen, junto con las dos semirrectas de los extremos) dividen un trozo de la situación anterior en dos, generando por lo tanto un total de n nuevos trozos en el plano. Entonces, al número p_{n-1} de trozos que teníamos con $n-1$ cortes, al hacer este nuevo corte añadimos n trozos más, es decir

$$p_n = p_{n-1} + n.$$

Iterando esta relación, obtenemos

$$p_n = p_{n-1} + n = p_{n-2} + (n-1) + n = \cdots = p_1 + 2 + \cdots + (n-1) + n.$$

Dado que con un único corte se obtienen 2 trozos de pizza, es decir $p_1 = 2$, la relación anterior queda así:

$$p_n = 2 + 2 + \cdots + (n-1) + n = 1 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = 1 + \frac{n\,(n+1)}{2}. \tag{4}$$

En particular, con $n = 3$ cortes podemos obtener $p_3 = 7$ trozos.

2. ¿Cuál es el número máximo de trozos (no necesariamente iguales) en los que puedes partir una tarta con 3 cortes rectos?

   A primera vista esta pregunta parece similar a la anterior, pero hay una diferencia sustancial, y es que ahora estamos en un ambiente tridimensional. Por lo tanto, trabajamos en el espacio y los cortes rectos ahora se realizan a través de planos.

   En este contexto, que los planos estén en posición general (lo cual garantizará que el número de trozos sea máximo), equivale a decir que tres planos de corte cualesquiera deben tener exactamente un punto en común, mientras que la intersección de cuatro planos será vacía.

   A partir de esta observación, llamamos t_n, $n = 1, 2, \ldots$, al número máximo de trozos en los que podemos partir la tarta (el espacio) con n cortes. Entonces, si tenemos $n-1$ planos y añadimos un n-ésimo en posición general, este último intersecará todos los anteriores planos en una recta, r_i, $i = 1, \ldots, n-1$. Reflexionando un poco (hágalo, querido lector), el hecho de que los planos estén en posición general, implica que dos rectas cualesquiera r_i y r_j, con $i \neq j$, se intersecan (sobre el plano que hemos añadido) exactamente en un punto, mientras que si las tomamos de tres en tres, nunca hay una intersección común. Lo que acabamos de decir es que las rectas r_i están en posición general sobre el nuevo plano y lo parten en unos cuantos trozos. ¡Pero ya sabemos calcular este número! ¡Es el p_{n-1} de la pregunta anterior! Y este es el número de trozos que añadimos en el espacio con el nuevo plano. Entonces se cumple la relación $t_n = t_{n-1} + p_{n-1}$ y, razonando recursivamente y utilizando (4), se deduce que

$$t_n = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}.$$

Con $n = 3$ cortes, como se plantea en la pregunta original, obtenemos $t_3 = 8$ trozos de tarta.

Concluimos con dos pequeñas observaciones adicionales:

- Los números t_n se conocen, por razones obvias, como los *cake numbers* o *números del pastel*, [4], mientras que los números p_n constituyen la llamada *sucesión del cortador perezoso* [5].
- ¿Cómo cambian las respuestas a estas dos preguntas si se admiten cortes no rectos (por ejemplo circulares o esféricos)? En el libro [3] encontrarás este y otros muchos problemas interesantes.

4.3. Soy el mayor, soy el mayor...

¿Qué número es mayor: e^π o π^e?

Vamos a demostrar que $e^\pi > \pi^e$. Como la función exponencial es creciente, basta (ejercicio) demostrar que $f(\pi) > 0$ donde $f(x) = x - e\ln(x)$. Ahora bien, en el intervalo $(0, +\infty)$ la función $f(x)$ es derivable y

$$f'(x) = 1 - \frac{e}{x}.$$

Se concluye que f decrece en $(0, e)$ y crece en $(e, +\infty)$, por lo que f posee un mínimo global absoluto en $x = e$. Dado que $f(e) = 0$, se sigue que $f(\pi) > 0$.

4.4. ¿Café o vino?

Amable lector, para acabar le dejamos una cuestión más propuesta en el Quiz. Y recuerde que debe responderla en, pongamos, un minuto...

Ana tiene una taza llena de café y Luis un tonel lleno de vino. Y ambos tienen dos cucharas exactamente iguales. Luis colma su cuchara con café de la taza de Ana, y lo echa en su tonel de vino. A continuación, Ana colma su cuchara con el líquido del tonel de Luis (que tiene mucho vino y una cucharada de café), y vierte su contenido en su taza. ¿Qué queda más...?

(a) Café en el tonel de Luis.

(b) Vino en la taza de Ana.

(c) Asignaturas de Matemáticas para julio.

(d) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Referencias

[1] AIGNER, M. y ZIEGLER, G. M., *Proofs from THE BOOK*, Springer, Sixth edition, 2009.

[2] TURAEV, V. G., *A simple proof of the Murasugi and Kauffman theorems on alternating links*, Enseign. Math. (2) 33 (1987), no. 3-4, 203–225.

[3] YAGLOM, A. M. y YAGLOM, I. M., *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions* - Vol. 1 Combinatorial Analysis and Probability Theory, Dover Publications Inc., Nueva York, 1964.

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Cake_number (consultado el 12 de mayo de 2023).

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Lazy_caterer's_sequence (consultado el 12 de mayo de 2023).

Sobre los autores:
Nombre: Pedro M. G. Manchón
Correo electrónico: pedro.gmanchon@upm.es
Institución: Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial, Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial, Universidad Politécnica de Madrid, 28012 Madrid, España.

Nombre: Ernesto Nungesser
Correo electrónico: em.nungesser@upm.es
Institución: M2ASAI, Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a las Ingenierías Civil y Na-val, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales, Universidad Politécnica de Madrid, 28040 Madrid, España.

Nombre: Andrea Tellini
Correo electrónico: andrea.tellini@upm.es
Institución: Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial, Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial, Universidad Politécnica de Madrid, 28012 Madrid, España.

Curiosidades, juegos y rarezas

Identidades Esperanza

Hope Identities

Marco Vinicio Vásquez Bernal

Revista de Investigación

Volumen XIV, Número 1, pp. 75–90, ISSN 2174-0410
Recepción 14 Abr'23; Aceptación: 5 Jul'23

1 de abril de 2024

Resumen

Este trabajo surge de la curiosidad por buscar relaciones entre los números cuadrados perfectos, entendiendo que los mismos moldean áreas de formas cuadradas, que pueden juntarse y a la vez generar otras áreas cuadradas de mayor valor, donde los lados de esas áreas resultantes pueden o no ser valores enteros.

Así, teniendo en cuenta las condiciones de las ternas pitagóricas, donde el lado del cuadrado resultante sí tiene como magnitud un valor entero, se propuso buscar una propiedad similar al juntar más de dos cuadrados.

Con un análisis matemático muy claro se logra establecer unas identidades en función de unas variables enteras, dos de las cuales se proponen luego como independientes para plantear una relación con la tercera que se tornaría en dependiente para proponer la identidad en los números enteros.

Luego profundizando algo en estas identidades y su estructura se demuestra que las ternas pitagóricas surgen como resultados de las identidades ESPERANZA y permiten entender la construcción de esas ternas de una manera muy simple y ordenada.

También se observa cómo el manipular esas identidades arroja resultados llamativos de relaciones entre varios números cuadrados perfectos, mostrando que las características de los números guardarán siempre resultados que nos sorprenderán positivamente y generan esperanza.

Este trabajo surge de una investigación individual desarrollada y está dedicado a mi nieta Luciana Elisabeth Araujo Vásquez, quien justamente trajo esperanza en momentos difíciles y cuya luz coincidió con el encontrar estos resultados.

Palabras Clave: Identidad, cuadrados perfectos, igualdad, suma.

Abstract

This work arises from the curiosity to look for relationships between perfect square numbers, understanding that they mold square-shaped areas, which can be joined together and at the same time generate other square areas of greater value, where the sides of those resulting areas may or may not be exact values.

Thus, taking into account the results of the famous Pythagorean theorem, where the resulting square side does have an integer value as its magnitude, it was proposed to look for a similar property by joining more than two squares.

With a very clear mathematical analysis it is possible to establish identities based on integer variables, two of which are then proposed as independent to propose a relationship with the third that would become dependent to propose the identity in the whole numbers.

Then delving somewhat into these identities and their structure it is demonstrated that the Pythagorean ternas arise as results of the ESPERANZA identities and allow us to understand the construction of these ternas in a very simple and orderly way.

It is also observed how manipulating these identities yields striking results of relationships between several perfect square numbers, showing that the characteristics of the numbers will always keep results that will surprise us positively.

This work arises from an individual research developed by the author as a member of the institutional research group EUREKA 4i of the UNAE and is dedicated to my granddaughter Luciana Elisabeth ARAUJO VÁSQUEZ, who just brought hope in difficult times and whose light coincided with finding these results.

Keywords: Identity, perfect squares, equality, sum.

1. Introducción

Entender el mundo de los números siempre será un reto apasionante, ya sea por lo fuerte de sus relaciones o por lo curioso de sus comportamientos, se ha llegado a afirmar que "Podría decirse también que la numerología estudia la relación casi mágica entre los números y todo lo creado, entre los números y las circunstancias humanas, entre los números y todo lo que nos rodea", (Los Números nos hablan | Gran Hermandad Blanca)

Mas siempre el reto es desafiante por cuanto siempre habrá la posibilidad de encontrar nuevas relaciones u otras propiedades, donde lo simple o lo complejo no es sino una más de las circunstancias que generan pasión y enriquecen ese espacio.

Mas la riqueza del número es justamente su esencia conceptual abstracta y su capacidad de permitir el entendimiento de realidades de nuestra vida. En torno al número se ha reflexionado mucho, se le ha atribuido propiedades mágicas, se le ha presentado como elemento de distracción, su existencia permite entender objetivamente nuestro entorno, hay algunos que los sienten, los temen o los aman.

Pero todos respetamos su existencia, trabajos como los de (Barón, 2018) indican que los números constituyen elementos que permiten generar criticidad reflexiva y construir ciudadanía libre.

Un aspecto que reafirma su importancia es su condición de elemento generador de equidad y democracia, en vista de que están al acceso de todos, para trabajar con ellos y acceder a sus beneficios y secretos es necesario únicamente disposición y tal vez una hoja de papel y un lápiz y todos sin distinción alguna podemos introducirnos en ese mundo maravilloso donde la belleza surge de las relaciones, donde el respeto es consecuencia de valorar su existencia, donde sus diferencias permiten construir equidad, donde los secretos de sus relaciones intrínsecas nos brindan esperanza para enfrentar lo que vendrá.

Es difícil reconocer al número como elemento abstracto, la cotidianidad de su uso se ha incorporado tanto en nosotros y el normal quehacer de nuestros días, que nos es difícil reconocer su naturaleza absolutamente teórica y abstracta, simplemente porque sus propiedades responden a la realidad sistémica, están ahí, muchas veces invisibles a la vista apresurada de nuestra existencia, pero están ahí para permitirnos entender la naturaleza y los fenómenos sociales.

Tiene sentido entonces escudriñar sus entrañas, buscando esos equilibrios y esos mensajes de esperanza, obviando en primera instancia la aplicación práctica tácita de los resultados encontrados, entendiendo que esos resultados son modelos de realidades que quizá aún no hemos visto.

2. Los Cuadrados Perfectos

Una de las características más sobresalientes de los números, sin duda, constituye su indisoluble relación con la geometría, convirtiéndose en su voz para explicar y manifestar sus bondades. Las formas geométricas, creadas para moldear las formas de la naturaleza han podido desarrollar sus beneficios gracias a los números, estos han hecho tangible la importancia y la utilidad de los números.

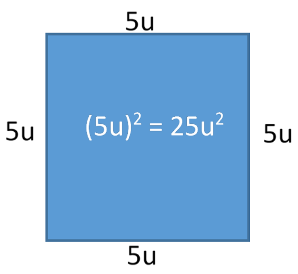


Figura 1 Área de un cuadrado.

Así, los números cuadrados perfectos hace esencial y tangible el concepto de área de una de las figuras fundamentales de la geometría, el cuadrado, en una relación intra matemática (Businskas, 2008). El cuadrado de un número es la concepción o el modelo del área de un cuadrado cuyo valor de lado está entendido con ese número (Figura 1).

Por tanto, estos números se asocian con lo bidimensional y la parte del espacio que estos representan, esto no siempre es debidamente reflexionado cuando se los presenta en el currículo educativo, donde simplemente se los plantea como el producto de un número por sí mismo.

Además, en un ejercicio de jerarquización no justificada se brinda importancia mayor a los cuadrados de los números naturales, estableciendo que un número es cuadrado perfecto, cuando existe otro número racional que al multiplicarse por sí mismo da como resultado ese número.

Definición aceptada pero que deja alguna duda en cuanto no explica por qué razón se excluye de esta definición a los números irracionales, misma que puede complementarse recordando que todo número real es el cuadrado de otro número real.

Dicho esto, se puede afirmar que la suma de números cuadrados perfectos constituye el modelo matemático que representa el área de varios cuadrados juntos y su diferencia representará el área que resulta luego de extraer un cuadrado de otro, obviamente más grande.

2.1. Teorema de Pitágoras

Un resultado que consolida lo dicho es el famoso Teorema de Pitágoras, que debe ser entendido como una relación de áreas. Algunos autores indican que el real enunciado de este teorema es "La suma de las áreas de figuras geométricas semejantes construidas sobre los catetos de cualquier triangulo rectángulo es igual al área de la figura geométrica semejante construida sobre la hipotenusa de ese triángulo", (Vásquez, 2012).

En la figura 2 se busca evidenciar este enunciado, intentando generalizar el resultado a figuras irregulares semejantes. Teniendo en cuenta que el área de cada una de esas figuras geométricas es proporcional al área del cuadrado construido sobre los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo:

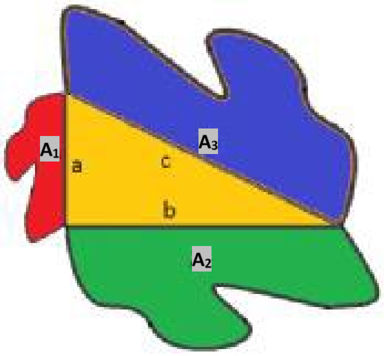


Figura 2 Relación de áreas irregulares semejantes en función de los lados de un triángulo rectángulo.

Es decir, teniendo a λ como un número real distinto de cero, como las figuras geométricas levantadas sobre cada lado del triángulo rectángulo son semejantes, existe una proporcionalidad entre el área de la figura irregular levantada de cada lado y el área del cuadrado levantado en ese lado.

$A_1 = \lambda a^2$

$A_2 = \lambda b^2$

$A_3 = \lambda c^2$

$A_1 + A_2 = \lambda a^2 + \lambda b^2 = \lambda(a^2 + b^2) = \lambda c^2 = A_3$

Además, como λ es un número real, este representa el valor cuadrado de otro número real Υ distinto de cero, tal que $\lambda = \Upsilon^2$.

Consecuentemente la relación presentada anteriormente puede presentarse de la forma:

$A_1 + A_2 = \Upsilon^2 a^2 + \Upsilon^2 b^2 = \Upsilon^2(a^2 + b^2) = \Upsilon^2 c^2 = (\Upsilon c)^2 = A_3$

Por tanto, el resultado del teorema de Pitágoras representa una relación de números cuadrados.

Esta relación permite construir infinitas ternas de números enteros que se sujeten a la misma, las denominadas ternas Pitagóricas.

Mas este resultado nos permite preguntar, ¿Qué pasa cuando sumamos varios números cuadrados?, ¿Es posible encontrar una relación entre números enteros que modelan la suma de áreas de figuras geométricas?

2.3. Relación de Cuadrados Perfectos

Buscando establecer una relación general entre los números cuadrados perfectos buscamos una identidad que sirva de base general para presentar esas relaciones en resultados concretos.

Reiteramos que lo que buscamos es encontrar números enteros que al ser sumados o restados entre sí se ajustan a ciertas igualdades, de forma general buscaremos números enteros que cumplan la siguiente condición:

$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 + e^2 + \cdots$

Donde $a, b, c, d\ y\ e$ (además de los posibles otros sumandos) son números enteros.

Entre las primeras interrogantes que surgen está aquella de aclarar cuántos elementos deben estar presentes en cada uno de los miembros, para ello partiremos indicando que si se desea que en uno de los miembros esté un único termino y en el otro dos, el caso respondería a una aplicación directa del teorema de Pitágoras generando infinitas alternativas tal como se describe en el documento “Generando números de Pitágoras” (Vásquez, 2015).

Buscando construir una generalización, de partida se plantea la siguiente igualdad:

$$(1)\ n^2 + (n+t)^2 = (n+s)^2 + (n+q)^2$$

Donde $n, t, s, q \in \mathbb{N}$

Para que esa igualdad sea verdadera, para todo n, debería cumplirse que $t = s+q$ y $t^2 = s^2 + q^2$, teniendo en cuenta que s y q deben ser distintas de t ya que, si una de ellas es igual a t, la otra sería cero y tendríamos una identidad.

Si se intenta resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (2)\ t^2 = s^2 + q^2 \\ (3)\ t = s + q \end{cases}$$

Si elevamos la segunda ecuación al cuadrado se tiene

$$(4)\ t^2 = s^2 + 2sq + q^2$$

Igualando (2) con (4) se establece que las únicas soluciones posibles se tendrán cuando s y/o q son igual a cero, es decir no existe otra solución que no sea la identidad.

Por lo tanto, buscando más soluciones se propone

$$(5)\quad n^2 + (n+t)^2 = (n+s)^2 + (n+q)^2 + u^2$$

Donde $u^2 = t^2 - s^2 - q^2$ y $2nt = 2ns + 2qn$

Teniendo en cuenta que n, s, t, q y u y que han de ser naturales.

Es decir, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (6)\ u^2 = t^2 - s^2 - q^2 \\ (7)\qquad t = s + q \end{cases}$$

De donde se tiene que $u^2 = 2sq$

Pero como de (7) se tiene que $q = t - s$

La ecuación (5) puede escribirse como

$$(8)\quad n^2 + (n+t)^2 = (n+s)^2 + (n+t-s)^2 + 2s(t-s)$$

Teniendo en cuenta que $u^2 = 2s(t-s)$

Recordando siempre que u, t y s son números naturales.

Por tanto (9) $t - s = r^2(2s)$, con r número natural.

De tal forma que el último término de la igualdad sea un cuadrado perfecto, como se requiere.

$$(10)\ s = \frac{t}{1+2r^2}\ y\ \ u = 2sr$$

Con lo que la expresión (8) puede expresarse como:

$$(11)\ \ n^2 + (n + s(1+2r^2))^2 = (n+s)^2 + (n+2sr^2)^2 + (2rs)^2$$

Relación a la que definiremos como identidades ESPERANZA

3. Identidades ESPERANZA

Con base en lo anotado anteriormente se afirma que las IDENTIDADES ESPERANZA son igualdades matemáticas de la forma:

$$n^2 + (n+t)^2 = (n+s)^2 + (n+t-s)^2 + (u)^2$$

Que es una identidad con n, s, t números enteros con las siguientes condiciones:

- r es una variable independiente que, si bien no se muestra en la identidad, sirve para determinar las que sí se muestran.
- s es una variable entera independiente.
- u es una variable dependiente, en función de r y s, u=2rs.
- t es una variable entera dependiente, en función de r y s, t = $s(1+2r^2)$.
- n es una variable entera.

Estos resultados complementan los propuestos por (Dickson, 1920), presentando un proceso que los generaliza, razón que justifica el hecho de plantear que se denominen identidades.

Entonces es posible encontrar esos números partiendo de valores de r y s, así si r = 1, s puede ser 1, 2, 3, 4,... o cualquier entero positivo, t será 3, 6, 9, 12, … un múltiplo de 3 respectivamente y u = 2sr = 2s ya que r es 1.

Pudiendo construir la siguiente tabla:

Tabla 1. Cálculo de valores de t y r en función de los valores de r y s.

Valor de r, a seleccionar.	**Valores de s, a seleccionar.**	**Posibles valores de t, a determinar** **t = s$(1+2r^2)$.**	**Valor de u, a determinar** **u = 2sr.**	**Observación**
1	1, 2, 3, 4, …	3, 6, 9, 12, ….	2, 4, 6, 8, …	Los valores de t serán múltiplos de 3.
2	1, 2, 3, 4, …	9, 18, 27, 36, ….	4, 8, 12, 16, …	Los valores de t serán múltiplos de 9.
3	1, 2, 3, 4, …	19, 38, 57, 76, ….	6, 12, 18, 24, …	Los valores de t serán múltiplos de 19.
4	1, 2, 3, 4, …	33, 66, 99, 132, …	8, 16, 24, 32, …	Los valores de t serán múltiplos de 33.
…	…	…	…	…

r	1, 2, 3, 4, …	$1 + 2r^2$, $2(1 + 2r^2)$, $3(1 + 2r^2)$, $4(1 + 2r^2)$, …	2r, 4r, 6r, 8r, …	Los valores de t serán múltiplos de $(1 + 2r^2)$.

Así se obtienen identidades de la siguiente forma:

$$(8) \quad n^2 + (n + t)^2 = (n + s)^2 + (n + t - s)^2 + 2s(t - s)$$

Y teniendo en cuenta que

Si r = 1, s = 1

$$n^2 + (n + 3)^2 = (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + 2^2$$

Si r = 1, s=3

$$n^2 + (n + 9)^2 = (n + 3)^2 + (n + 6)^2 + 6^2$$

Si r = 3, s=3

$$n^2 + (n + 57)^2 = (n + 3)^2 + (n + 54)^2 + 18^2$$

3.1. Ternas Pitagóricas

Varias son las formas que se han presentado para generar las ternas Pitagóricas, partiendo siempre de valores y planteando procesos que permiten encontrar tres números enteros a, b y c que satisface la siguiente igualdad:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

En el trabajo Generando números de Pitágoras (Vásquez, 2016) se presenta un proceso detallado de cómo encontrar estas ternas, sin embargo, si se parte de la forma general de las identidades ESPERANZA se desarrolla el siguiente análisis.

La forma general de una identidad ESPERANZA es

$$n^2 + (n + s(1 + 2r^2))^2 = (n + s)^2 + (n + 2sr^2)^2 + (2rs)^2$$

Sin embargo, como n es un valor variable puede asumir cualquier valor entero, se fija para n el valor de 2rs y la forma general de la identidad ESPERANZA genera el siguiente resultado

$$(2rs)^2 + (2rs + s(1 + 2r^2))^2 = (2rs + s)^2 + (2rs + 2sr^2)^2 + (2rs)^2$$

Donde en primer lugar el primer término y el último se eliminan por ser iguales y estar presente en los dos miembros, con lo que se tendría

$$(2rs + s + 2r^2s)^2 = (2rs + s)^2 + (2rs + 2sr^2)^2$$

Se observa que s es factor común en todos los términos, de forma que, si se extrae y ordena, se tendría

$$(s(2r^2 + 2r + 1))^2 = (s(2r + 1))^2 + (s(2r + 2r^2))^2$$

Donde se tiene ya una estructura de terna pitagórica con las siguientes equivalencias

$$a = s(2r + 1)$$

$$b = s(2r + 2r^2)$$

$$c = s(2r^2 + 2r + 1)$$

Sabemos que a, b y c son números enteros puesto que r y s lo son.

Ahora s es un número que multiplica a las tres expresiones, por tanto, cumple el rol de multiplicador, si se 3fija en 1, se tendrá que

$$a = (2r + 1)$$
$$b = (2r + 2r^2) = 2r(r + 1)$$
$$c = (2r^2 + 2r + 1)$$

Lo que determinaría las siguientes ternas pitagóricas

Tabla 2. Tabla para determinar ternas pitagóricas (a,b,c) en función de r.

r	a	b	c
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61
…	…	…	…
n	(2n+1)	$4\sum_1^n i$	$4\sum_1^n i$ +1

Resultados que serán las ternas pitagóricas que podrían caracterizarse por que a es un número impar y la diferencia entre b y c es 1.

Sin embargo, recordando que habíamos establecido que *r* sea un número natural, es posible generalizarlo para números fraccionarios, si planteamos que r tome valor de ½, el proceso sería: a = 2, b = 3/2, c=5/2

Por tanto, se tendrá:

$$(2)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Que puede aceptarse como una relación pitagórica con números fraccionarios, además si se multiplica cada termino por 4 se tiene la expresión conocida

$$4^2 + 3^2 = 5^2$$

Sin embargo, si r es 3/2

Se tendrá: a = 4, b = 15/2 y c=17/23

Entonces

$$(4)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2$$

Expresión que si se multiplica cada término por 4, dará la expresión

$$(8)^2 + (15)^2 = (17)^2$$

Y así se pueden generar las siguientes ternas

Tabla 3. Tabla para determinar ternas pitagóricas (a, b, c) en función de r, con r fraccionario.

r	a	b	C
3/2	8	15	17
5/2	12	35	37
7/2	16	63	65
9/2	20	99	101
11/2	24	143	145
…	…	…	…
(n+1)/2	2(n+2)	$(n+2)^2-1$	$(n+2)^2+1$

Que constituye otro grupo de ternas pitagóricas, donde *a* es múltiplo de 4 y la diferencia entre *b* y *c* es 2.

Está claro entonces que con procedimientos similares es posible encontrar otros conjuntos de ternas pitagóricas, todas ellas partiendo de identidades ESPERANZA.

Además, estas ternas pueden considerarse básicas ($s = 1$) ya que cada una de ellas puede generar infinitas ternas más simplemente multiplicando con distintos valores de *s*.

Este resultado presenta de por sí un proceso para generar ternas pitagóricas muy simple y ordenado y evidencia que las ternas pitagóricas constituyen resultados específicos de las identidades ESPERANZA.

3.2. Análisis de las Identidades de ESPERANZA

3.2.1. Cardinalidad

Está claro que existen infinitas identidades ESPERANZA, puesto que a *r* se le puede asignar cualquier valor entero positivo y dependiendo de este es posible seleccionar un valor de t que determinarán los valores de s y u.

3.2.2. Estructura

Las identidades ESPERANZA contienen en sus dos miembros números cuadrados perfectos, con las siguientes condiciones:

En el primer miembro se tendrá la suma de dos cuadrados perfectos que dependen de una variable n^2 y $(n + t)^2$.

En el segundo miembro se tiene tres cuadrados perfectos, dos que dependen de la misma variable que se tiene en el primero $(n + s)^2$ y $(n + t - s)^2$ y un tercer término independiente de esa variable $2s(t-s)$ o u^2

3.2.3. Explicación Geométrica

Teniendo en cuenta lo propuesto en el teorema de Pitágoras, se puede decir que el primer término de una identidad ESPERANZA representa el área de un cuadrado cuya área equivale a la suma de las áreas de dos cuadrados de lados n y $(n+t)$, En el segundo miembro representa el área de un cuadrado que resulta de sumar las áreas de tres cuadrados, de lados $(n+s)$, $(n+t-s)$ y la raíz de $2s(t-s)$, teniendo en cuenta que $2s(t-s)$ debe ser un número entero.

Así para la identidad

$$n^2 + (n + s(1 + 2r^2))^2 = (n + s)^2 + (n + 2sr^2)^2 + (2sr)^2$$

Se ha desarrollado la construcción en GeoGebra, "ESPERANZA - GeoGebra" que evidencia su certeza para valores no muy grandes de s, r y n.

Así, para r=2 y s=5, se tiene:

$$n^2 + (n + 45)^2 = (n + 5)^2 + (n + 40)^2 + (20)^2$$

Donde n puede tomar valores enteros.

Los dos cuadrados azules corresponden a los términos del primer miembro y los tres cuadrados verdes corresponden a los términos del segundo miembro (Figura 3).

Figura 3. Áreas de los cuadrados que están en los dos miembros de la identidad.

Con el procedimiento pitagórico juntamos los dos cuadrados del primer miembro y también dos de los cuadrados del segundo (Figura 4).

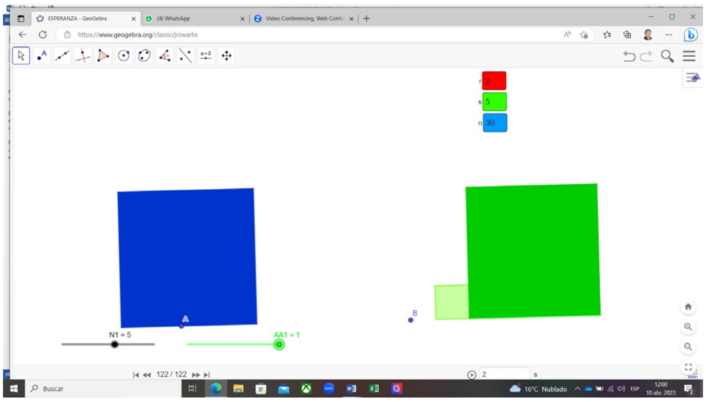


Figura 4. Resultado de unir las dos áreas del primer miembro y dos de las tres áreas del segundo miembro.

Luego con ese procedimiento juntamos el cuadrado resultante del segundo miembro con el tercer cuadrado de ese miembro (Figura 5).

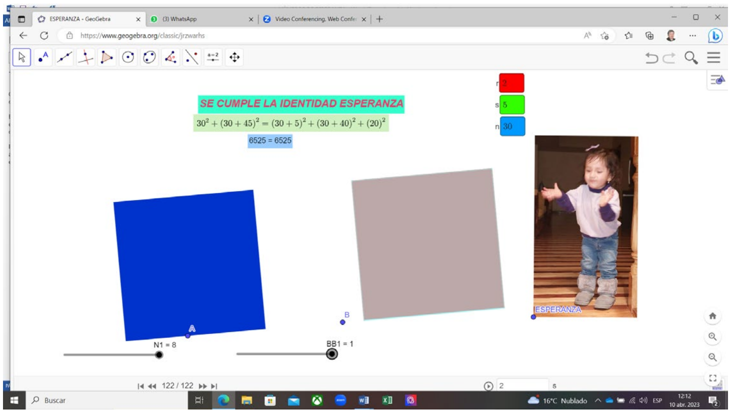


Figura 5. Resultados de juntar las áreas de los dos miembros de la identidad.

Se demuestra que el cuadrado que se forma en el segundo miembro es igual al que se formó en el primer miembro, con lo que la identidad queda comprobada.

En la construcción de GeoGebra es posible, variar los valores de r y s con valores no muy grandes y se evidencia que las identidades se cumplen.

4. Resultados de Identidades Esperanza

4.1. Caso r, s enteros negativos

La identidad Esperanza es válida también para parámetros *r*, s enteros negativos.

Veamos el ejemplo con r = -2 y s = -1.

La identidad ESPERANZA construida para estos valores será

$$n^2+(n-9)^2=(n-1)^2+(n-8)^2+(4)^2$$

Que genera resultados como los siguientes

Para n=6

$$(6)^2+(-3)^2=(5)^2+(-2)^2+(4)^2$$

Que es igual a

$$(6)^2+(3)^2=(5)^2+(2)^2+(4)^2$$

Está claro que si *s* es negativo esto causará que dentro de cada término resulten diferencias en lugar de sumas.

En cambio, si *r* es negativo, esto cambiará el signo únicamente del último término y como este luego se eleva al cuadrado, el resultado final no se ve afectado.

4.2. Caso s = 0

Si s=0 entonces t=0 y simplemente se tendrá

$$n^2+n^2=(n)^2+(n)^2+(0)^2$$

4.3. Caso r = 0

Si r=0 entonces t=s y simplemente se tendrá

$$n^2 + (n+s)^2 = (n)^2 + (n+s)^2 + (0)^2$$

Identidad evidente

4.4. Identidades que surgen de las Identidades ESPERANZA

Características de las identidades ESPERANZA permiten construir otras igual de interesantes como veremos a continuación.

Así, manteniendo fijo el valor de r =1, y s=1, se puede construir otra identidad con el siguiente procedimiento:

Se parte de que $(i)\ n^2 + (n+3)^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 + (2)^2$ y como esto es verdad para todo n, se toma un n´= n+3

Entonces se tendrá que $(n')^2 + (n'+3)^2 = (n'+1)^2 + (n'+2)^2 + (2)^2$

Que remplazando será $(n+3)^2 + (n+6)^2 = (n+4)^2 + (n+5)^2 + (2)^2$

De donde es posible despejar $(n+3)^2$

Por lo tanto $(n+3)^2 = (n+4)^2 + (n+5)^2 + (2)^2 - (n+6)^2$

Que remplazando en la identidad inicial dará como resultado

$$n^2 + (n+4)^2 + (n+5)^2 + (2)^2 - (n+6)^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 + (2)^2$$

Que al simplificarse dará el resultado

$$n^2 + (n+4)^2 + (n+5)^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+6)^2$$

Que es una nueva identidad donde todos sus términos están en función de la variable n.

De esta identidad derivan los siguientes resultados:

$$1^2 + 5^2 + 6^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2$$

$$2^2 + 6^2 + 7^2 = 3^2 + 4^2 + 8^2$$

$$3^2 + 7^2 + 8^2 = 4^2 + 5^2 + 9^2$$

$$4^2 + 8^2 + 9^2 = 5^2 + 6^2 + 10^2$$

Y así sucesivamente.

Estos resultados resultan interesantes y a su vez podrían generar otros si los combinamos entre sí, por ejemplo, combinando el primero con el cuarto se tendría:

$$4^2 + 8^2 + 9^2 + \ 1^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2 + 10^2$$

También es posible combinar entre identidades que hayan surgido de valores distintos de r y s,

Por ejemplo, como ya hemos visto si r=1 y s=1, la identidad es

$$i)\quad n^2 + (n+3)^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 + (2)^2$$

Y si r=1 y s=2, la identidad es

$$ii)\quad n^2 + (n+6)^2 = (n+2)^2 + (n+4)^2 + (4)^2$$

Si a la primera multiplicamos cada término por 4, se tendrá

$$(2n)^2 + (2(n+3))^2 = (2(n+1))^2 + (2(n+2))^2 + (4)^2$$

El término $(4)^2$ se repite en ambas, por tanto, es posible plantear la identidad

$$iii) \quad n^2 + (n+6)^2 - (n+2)^2 - (n+4)^2 = (2n)^2 + (2(n+3))^2 - (2(n+1))^2 - (2(n+2))^2$$

O su equivalente

$$iii) \quad n^2 + (n+6)^2 + (2(n+1))^2 + (2(n+2))^2 = (n+2)^2 + (n+4)^2 + (2n)^2 + (2(n+3))^2$$

De donde se tendrían resultados como los siguientes

$$(1)^2 + (7)^2 + (4)^2 + (6)^2 = (3)^2 + (5)^2 + (2)^2 + (8)^2$$

$(2)^2 + 2(8)^2 = 2(4)^2 + (10)^2$ que se reduca a $\quad (1)^2 + 2(4)^2 = 2(2)^2 + (5)^2$

$$(3)^2 + (9)^2 + (8)^2 + (10)^2 = (5)^2 + (7)^2 + (6)^2 + (12)^2$$

$(4)^2 + 2(10)^2 + (12)^2 = (6)^2 + 2(8)^2 + (14)^2$ que se reduce a

$$(2)^2 + 2(5)^2 + (6)^2 = (3)^2 + 2(4)^2 + (7)^2$$

Y así sucesivamente.

4.5. Caso r Número Real

Puesto que el valor que realmente interviene en los términos de las identidades es el cuadrado de r, es posible entonces construir identidades ESPERANZA siendo *r* la raíz cuadrada de cualquier número, así si r es la raíz de 2 y s es 1, la identidad que surge sería:

$$iv) \quad n^2 + (n+5)^2 = (n+1)^2 + (n+4)^2 + 8$$

Identidad donde uno de sus términos no es un cuadrado perfecto, sin embargo, si combinamos con otra similar, por ejemplo, para n´= n+2, se tendrá

$$(n+2)^2 + (n+7)^2 = (n+3)^2 + (n+6)^2 + 8$$

En vista de que las dos contienen el mismo término independiente, es posible igualarlas para construir la siguiente identidad

$$n^2 + (n+5)^2 + (n+3)^2 + (n+6)^2 = (n+1)^2 + (n+4)^2 + (n+2)^2 + (n+7)^2$$

Identidad donde todos sus términos son cuadrados perfectos, de la que se obtienen los siguientes resultados

$$(5)^2 + (3)^2 + (6)^2 = (1)^2 + (4)^2 + (2)^2 + (7)^2$$

$$(1)^2 + (6)^2 + (4)^2 + (7)^2 = (2)^2 + (5)^2 + (3)^2 + (8)^2$$

$$(2)^2 + (7)^2 + (5)^2 + (8)^2 = (3)^2 + (6)^2 + (4)^2 + (9)^2$$

Y así sucesivamente.

Queda claro entonces que este proceso permite construir identidades ESPERANZA siendo r la raíz cuadrada de cualquier número.

4.6. Caso n Negativo

Las identidades presentadas son también válidas cuando n es un entero negativo, así por ejemplo si se parte de identidad iii)

$$iii)\quad n^2+(n+6)^2+(2(n+1))^2+(2(n+2))^2=(n+2)^2+(n+4)^2+\ (2n)^2+(2(n+3))^2$$

Y se asigna a n el valor de -3 el resultado será

$$(-3)^2+(-3+6)^2+(2(-3+1))^2+(2(-3+2))^2 99$$
$$=(-3+2)^2+(-3+4)^2+\ (2(-3))^2+(2(-3+3))^2$$

Que es igual a

$$(3)^2+(3)^2+(4)^2+(2)^2=(1)^2+(1)^2+\ (6)^2+(0)^2$$

Y se reduce a:

$$2(3)^2+(4)^2+(2)^2=2(1)^2+\ (6)^2$$

4.6. Caso s Número Real

Es posible construir la estructura de las identidades ESPERANZA siendo s un número real, sin embargo, la identidad resultante se establecerá para valores reales, es decir no para cuadrados perfectos, por tanto, no constituirán identidades ESPERANZA.

Sin embargo, de lo indicado propongamos una estructura similar a las identidades ESPERANZA para s = π y r =1.

$$n^2+(n+3\pi))^2=(n+\pi)^2+(n+2\pi)^2+(2\pi)^2$$

Ahora si se hace un ejercicio similar para s = π y r =$\sqrt{2}$

La identidad resultante es

$$n^2+(n+5\pi)^2=(n+\pi)^2+(n+4\pi)^2+8\pi^2$$

Identidades que sin duda resultan interesantes y pueden servir para construir otras.

5. Conclusiones

Es evidente entonces que se pueden construir infinitas identidades ESPERANZA partiendo de valores para r y s, que pueden ser positivos negativos o cero.

Las identidades ESPERANZA funcionan para n, entero positivo, negativo o cero.

Sr r es la raíz cuadrada de cualquier número entero, es posible construir identidades ESPERANZA combinando identidades que surjan de los mismos valores de s y r.

Las ternas pitagóricas son resultados puntuales de las identidades ESPERANZA.

Las identidades ESPERANZA permiten construir igualdades que parten no únicamente de valores enteros, se evidencia que partiendo de números irracionales es posible construir igualdades que al relacionarlas entre si derivan en identidades ESPERANZA.

Además, si se parte de valores reales, con el procedimiento presentado es posible construir identidades que si bien no se sujetan a números enteros, cumplen el principio de identidad.

Referencias

[1] BUSINSKAS, Aldona Monica. *Conversations About Connections: how secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*, Mathematics Magazine, pp. 183 -190, Canadá, 1964.

[2] BARÓN VARGAS, Sonia Edelmira. *Escenarios de Aprendizaje en la Educación Matemática Crítica, Una Revisión Documental*, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, pp. 51-54, Colombia, 2018.

[3] DICKSON, Leonard Eugene. *History of the theory of numbers*, Vol 2, pp. 272-286, Estados Unidos, 2020.

[4] VÁSQUEZ, Marco Vinicio. *Una ampliación al teorema de Pitágoras. Revista De Educación Matemática*, Vol. 27 N°3, p. 3 – 22, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, 2012.

[5] VÁSQUEZ, Marco Vinicio. *Generando números de Pitágoras, MASKANA,* Vol. 7, No. 1, p. 61 – 70, Universidad de Cuenca, 2016.

[6] GARCET, Marianel, *Los Números nos hablan,* https://hermandadblanca.org/los-numeros-nos-hablan/

Autor:
Nombre: Marco Vinicio Vásquez Bernal
Correo Electrónico: marco.vasquez@unae.edu.ec
Institución: Universidad Nacional de Educación, UNAE, Ecuador.

Cuentos Matemáticos

Código penal

Penal code

Celia García Ramírez

Revista de Investigación

Volumen XIV, Número 1, pp. 91–96, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Sep'23; Aceptación: 23 Dic'23

1 de abril de 2024

Resumen

Este cuento formó parte del concurso de relatos con contenido matemático organizado por el Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático, de la Escuela de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid. El contenido matemático del relato se centra en dos aspectos: la codificación y las bases numéricas, en concreto la decimal y la binaria, como medio para encontrar y detener a un fugitivo.

Palabras Clave: Teoría de códigos, Sistema de representación decimal, Sistema de representación binario.

Abstract

This tale took part of the literary and mathematical contest organized by the Innovation Educative Group "Pensamiento Matemático". The mathematical content of the tale is centered in two topics: the code theory and the numerical basis (decimal and binary), as a mean to find and defeat a fugitive.

Keywords: Code theory, Decimal representation, Binary representation.

1. Código penal

Un guardia paseaba airado delante de la celda.

- ¡Es imposible salir de aquí! -rugió.

El prisionero lo miraba impasible desde las sombras de su prisión. Estaba sentado sobre la cama, el único mueble de la estancia, con la espalda curvada hacia delante. Tenía el pelo greñoso que le llegaba hasta los hombros y un flequillo que le caía sobre los ojos. Se le dibujó una sonrisa ácida en los labios.

-Eso díselo a los demás, jefe. No ha habido aún una sola prisión que haya podido retenerme más de una semana. Lo saben perfectamente y esto no va a ser una excepción-dijo tranquilamente.

-Esto es diferente. ¿De verdad lo crees? -se rio el guardia- ¿De verdad crees que puedes fugarte? ¡JA! Ni en sueños.

-Ahórrate el sermón, idiota. Estaré fuera esta misma noche.

El guardia asomó la cabeza por el pequeño agujero que había en la puerta y miró incrédulo, sin saber qué decir, al preso. Entonces, se dio la vuelta y salió corriendo a avisar a su general.

Esa noche, aumentaron las medidas de seguridad, pusieron a más guardias vigilando la cárcel entera, pero fue inútil. A la mañana siguiente, la celda estaba desierta.

***

-Sí, señor Smith, así fue. Dijo que esa misma noche se fugaría y eso ha hecho-dijo el comisario.

Iba acompañado de un hombre alto, calvo y muy delgado con un largo bigote marrón y una chica algo más bajita que él, de tez morena y pelo negro.

-Y a pesar de lo que dijo, ¿se escapó? - preguntó la chica. El comisario asintió. -Pues, o es un tío muy listo, o aquí son todos muy tontos.

-No seas maleducada, Artemis -la regañó el señor Smith. -Todos estos señores hicieron lo posible para evitar que ese… ¿cómo se llamaba, señor comisario?

-Charlie, señor. Charlie el fugitivo.

-Sí, hicieron lo posible para evitar que ese criminal escapase.

Guardaron silencio hasta que llegaron a una de las celdas. La celda olía mal y las paredes estaban llenas de palabras, números y letras sin sentido alguno.

- ¿Es aquí? -preguntó Artemis. El comisario asintió y les invitó a entrar.

Pasaron dentro de la celda y se pusieron a investigar. El señor Smith comenzó a retirar la cama mientras que Artemis observaba las escrituras de la pared y el comisario se limitaba a observar. Al cabo de un rato, Artemis empezó a escribir en un bloc de notas y, de vez en cuando, miraba a la pared o al techo mientras mordisqueaba el lápiz.

- ¡Lo tengo! -gritó súbitamente. El comisario y el señor Smith se acercaron corriendo a ella.

- ¿Qué has encontrado? -le preguntó impaciente el comisario.

Ella, a modo de respuesta, alzó el cuadernillo en el que había estado escribiendo tanto rato. Los dos hombres lo miraron. En él había escrito lo siguiente:

Ulrghodvdqjuh=Río de la sangre

13-22-4-2-12-9-16=New York

-Muy lista-comentó Smith sonriendo.

En cambio, el comisario parecía no estar entendiendo nada. Artemis comenzó a explicar su descubrimiento.

-Verá, señor comisario, estas letras y números sin sentido que ve aquí, en realidad son códigos.-Artemis esperó a que estas palabras llegaran al cerebro del comisario, pero este, sin embargo, solo murmuró "¿códigos?" y siguió mirando el papel sin comprender, así que Artemis siguió explicando:- Estas letras de aquí, son un cifrado muy antiguo, llamado Cifrado César, pues dicen que fue Julio César quien lo inventó, aunque dejó de utilizarse porque era muy simple y no ofrecía seguridad en la comunicación. Es un tipo de cifrado por sustitución en el que una letra en el texto original es reemplazada por otra letra que se encuentra un número fijo de posiciones más adelante en el alfabeto. Por ejemplo, con un desplazamiento de 3, la A sería sustituida por la D, que está situada 3 lugares a la derecha de la A; la B sería reemplazada por la E y así sucesivamente.

- ¡Ah, ya comprendo! - murmuró. - Entonces, ¿los números son letras? -preguntó. - ¡Son letras del alfabeto! El 1 es la A, el 2 es la B y así con todos los números, ¿verdad?

-Sí y no. Tiene razón al decir que los números son letras, pero en realidad, el 1 es la Z, el 2 es la Y, etc.-dijo Artemis.

-Está muy bien el descubrimiento, pero ¿qué significa? -preguntó Smith.

-Lo he estado pensando y bueno… ¡nos vamos a España!

***

Cuando Smith se despertó, iban en la parte trasera de un coche, cubiertos con mantas pues hacía mucho frío. Ya no le dolía la herida del brazo, pero sí la cabeza. Fuera, amanecía.

El señor Smith tenía aún muchas preguntas que solo Artemis podía responder, pero prefirió dejarla en paz, dado lo ocurrido. Entonces, comenzó a repasar los sucesos del día.

Después del descubrimiento de Artemis, ambos habían cogido un avión directo a España y se habían dirigido hacia el río Tinto. Lo habían recorrido a lo largo, buscando alguna pista, pero no habían encontrado nada. Como se estaba haciendo de noche, decidieron llamar a los policías españoles, que habían aceptado recogerles en cuanto acabase su expedición. Mientras esperaban a los coches, habían decidido seguir buscando, pero lo único que encontraron fue una vieja cabaña de madera. Habrían pasado de largo de no ser por Artemis.

-Albert, mira-le había llamado ella.

- ¿Qué pasa, Artemis? Es solo una vieja cabaña.

-Sí, sí, pero mira- dijo Artemis, impaciente. Estaba señalando la puerta de la cabaña.

En el pomo, habían colgado un cartel. Habría sido un descubrimiento sin importancia de no haber puesto en el cartel: New York.

- ¿Crees que ahí…?

-Vamos-había dicho Smith.

Cogieron las pistolas y entraron en la casa. Solo había un sillón, estaba en el centro de la sala y estaba ocupado. Lo siguiente había ocurrido muy deprisa. Recordaba cómo aquel criminal les había quitado las armas de las manos de un balazo y les exigía la solución de un problema matemático. La solución o la muerte, había dicho. Sin embargo, Albert Smith no era un gran matemático y, al intentar resolver el problema, había fallado. Charlie el fugitivo había disparado contra él, pero, afortunadamente, la bala solo le había perforado el brazo. Artemis, presa del pánico le había pedido una oportunidad más para ella.

-Está bien. Si no quieres morir, debes transformar los números decimales 13 y 25 en sus equivalentes binarios, luego suma dichos números tanto en el sistema decimal como en el sistema binario. Si me respondes bien, no te mataré.

-Estás loco…

- ¡Hazlo!

Artemis empezó a escribir en un papel y al rato dijo:

-La respuesta es 100110.

El criminal se quedó atónito.

-Explícamelo-dijo.

Primero, he descompuesto los números 13 y 25 en sus equivalentes en el sistema base 2.

$$\begin{array}{rcr} 8 & & 1000 \\ +\,4 & = & 100 \\ 1 & & 1 \\ \hline 13 & & 1101 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 16 & & 10000 \\ +\,8 & = & 1000 \\ 1 & & 1 \\ \hline 25 & & 11001 \end{array}$$

Figura 1. Descomposición de 13 y 25 en base 2.

Luego, sumé los números decimales 13 y 25, junto con la suma binaria de los números 1101 y 11001:

$$\begin{array}{rcr} 25 & = & 11001 \\ +\,13 & = & +\,1101 \\ \hline 38 & = & 100110 \end{array}$$

Figura 2. Suma decimal y binaria.

Para llevar a cabo la suma binaria, empezamos a sumar de izquierda a derecha: "uno más uno es igual a 10”. Anotamos el cero y llevamos uno. En la siguiente columna de dígitos, decimos que "cero más cero es igual a cero, más el uno que nos llevábamos es igual a uno". Anotamos este uno a la izquierda del cero que habíamos escrito antes. En la siguiente columna de dígitos decimos: "cero más uno es igual a uno, y como no nos llevábamos nada de la adición anterior, anotamos este uno". En la siguiente columna de dígitos decimos que "uno más uno es igual a 10, y como no traíamos nada de la adición anterior, anotamos cero y llevamos uno". Así llegamos a la última columna a la izquierda, en donde tenemos únicamente el "1" con el cual decimos "tenemos uno, más el uno que traíamos de la adición anterior, es igual a 10, y como ya no hay más dígitos para sumar, anotamos este 10 para concluir la adición binaria". De este modo, el resultado de la suma binaria es igual al número binario:

100110

Charlie estaba mirando el papel donde Artemis había realizado todas las operaciones. Ésta, sin que se diese cuenta, había sacado otra pistola y le apuntaba. Disparó y entonces, Albert Smith no vio nada más, pues se había desmayado a causa del dolor del disparo que había recibido.

Se despertó en una especie de campamento que los policías españoles habían montado justo delante de la casa. Le estaban curando el brazo. Después, se volvió a desmayar. Cuando volvió en sí de nuevo, ya se encontraba en el interior del coche…

«Mañana le preguntaré sobre lo ocurrido» se dijo a sí mismo. Y se durmió.

Sobre la autora:

Nombre: Celia García Ramírez
Correo Electrónico: celiagarcia2b@gmail.com
Institución: Instituto Carlos III (Madrid), España.

Críticas y reseñas
AJUST3 de CU3NTOS

Rafael Rivera y Macarena Trujillo

Revista de Investigación

Volumen XIV, Número 1, pp. 97–100, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 Ene´24; Aceptación: 28 Ene'24

1 de abril de 2024

Resumen

AJUST3 de CU3NTOS es un intento de descubrir que las matemáticas están inmersas en nuestras vidas de una manera u otra. Es verdad que se ha dicho muchas veces, se ha escrito sobre ello, pero este libro tiene un enfoque diferente porque trata de explicarlo desde la propia vivencia de los autores narrada a través de historias. Porque en AJUST3 de CU3NTOS las protagonistas son las historias que orbitan alrededor de conceptos matemáticos y que se enmarcan en tres escenarios: el mundo infantil, la vida cotidiana y el trasiego universitario. Historias con el denominador común de acercar las matemáticas a todos los públicos.

Palabras Clave: Historias, matemáticas, vida cotidiana, educación.

Abstract

AJUST3 de CU3NTOS is an attempt to discover the day-to-day mathematics through stories. It is true that it is not a novelty, several books have been written about it, however this book has a different approach since tries to explain it from the own experience of the authors that is told through stories. Because in AJUST3 de CU3NTOS the main characters are the stories that orbit around mathematical concepts and that are framed in three scenarios: the children's world, daily life and university life. Stories with the common denominator of bringing mathematics closer to all audiences.

Keywords: Stories, mathematics, daily life, education.

1. Sobre el contenido

AJUST3 de CU3NTOS es un ensayo compuesto por historias y reflexiones alrededor de conceptos matemáticos en los que se mezclan la narrativa y los cuentos. Este libro pretende situarse donde se cruzan las matemáticas con nuestras vidas, precisamente en ese punto. Un punto en el que esta disciplina no solo adquiere un valor diferente, sino también una utilidad más allá de las clásicas operaciones para ir al mercado. Se trata de que podamos descubrir, paseando por sus páginas, de qué manera las matemáticas forman parte de nuestro camino presente y nos ayudan a recorrerlo mejor.

Una de las claves de esta obra es el mestizaje de las matemáticas con la narrativa, sin menos cabo del rigor, pero añadiendo imaginación. La mezcla entre las reglas de las matemáticas con conceptos como la convivencia, los afectos, o las relaciones, sirven para explicar y subrayar el vínculo tan fuerte que tiene esta disciplina con nuestra manera de vivir, de compartir, de conversar.

Cada capítulo versa sobre temas matemáticos que, a pesar de que nos hayan encasillado en ciencias o letras, todos hemos oído hablar de ellos. Desde lo más general, como son los números, los símbolos o las operaciones aritméticas básicas, a aspectos más específicos como pueden ser los conjuntos o la estadística. Dentro de cada uno de estos capítulos las historias se enmarcan en tres escenarios: la infancia, la juventud y la edad adulta. Aunque el lector claramente puede distinguir esas tres miradas, se utiliza un símbolo matemático diferente para encabezar cada una de ellas. Estos tres símbolos son los que aparecen en la portada del libro (Figura 1.). El $\forall$, es decir, que incluye todo, da paso al mundo infantil, particular y genérico a la vez. El ∞, infinito, indica que entramos en la Universidad, donde se abren muchas posibilidades. Y el último $\approx$, aproximado, se refiere a nuestra vida cotidiana, donde nada es exacto.

Figura 1. Portada del libro.

AJUST3 de CU3NTOS no es un libro de texto, ni un manual técnico. Es como una chistera encima de la mesa que contiene lo inesperado. El truco está en poner en primer plano la presencia de las matemáticas como componente de la convivencia y la reflexión. Y que el lector o lectora pueda llegar más allá, mucho más, de lo que contiene este libro.

2. Sobre a quién va dirigido

AJUST3 de CU3NTOS está pensado para cualquier público, aunque de manera especial para personas a las que les gusten tanto las historias, como leer sobre divulgación matemática o de ciencia. También contiene fragmentos que se pueden compartir con los más pequeños.

Este libro es un material novedoso y diferente que padres y profesores pueden utilizar para explicar conceptos matemáticos. Se retratan muchos escenarios de aprendizaje distintos que llevan a la reflexión sobre cómo aprendemos o cómo enseñamos, o cómo utilizamos esta disciplina.

Los adolescentes se reconocen también en muchas historias que están viviendo o han vivido no hace tanto tiempo cuando aún eran niños. Así, este libro también es un medio estupendo para incentivarles a la lectura y a acercarles las matemáticas.

AJUST3 de CU3NTOS es un texto apto para todos los públicos porque supone una cierta reconciliación con el fantasma que han supuesto las matemáticas para muchas personas.

3. Sobre los autores

Macarena Trujillo Guillén (Sevilla, 1976), soy ingeniera agrónoma y doctora en Matemáticas. Soy catedrática del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València (UPV) en el que desarrollo mi trayectoria profesional dividida en cuatro facetas: investigadora, docente, divulgadora y gestora, siendo las matemáticas y sus aplicaciones el denominador común de todas ellas.

Rafael Rivera Herráez (Valencia, 1950) soy arquitecto, autor de obras como el parque Gulliver o la rehabilitación de la Beneficencia, ambas en Valencia. He sido profesor de urbanismo de la Escuela de Arquitectura de la UPV y he colaborado como voluntario trabajando con niños. He escrito artículos y he dado conferencias en diferentes medios acerca de la ciudad y la ciudadanía y la vertiente social del urbanismo.

Nos conocimos en 2012 participando en una actividad muy divertida que organizaron los estudiantes de la Escuela de Arquitectura de la UPV. Desde entonces hemos compartido docencia, ponencias y artículos diversos. Juntos hemos participado en congresos y nos hemos dedicado a la divulgación de nuestras disciplinas, siempre acompañados de la transversalidad y la interdisciplinariedad.

Así hemos construido este libro, y con tres experiencias a cuestas basadas en años de vivencias. Una apoyada en años de voluntariado con críos invisibles para la sociedad, pero increíbles, aunque creíbles; otra que descansa en años de profesores en la Universidad con un alumnado que estira y estira; y la última reconociendo años de vida como todas las vidas, vida de sonrisas, de tropiezos, de descubrimientos cotidianos. Vidas también con niños, esta vez nuestros hijos y nietos, con sus preguntas, con sus razonamientos. Ninguna experiencia puede independizarse de las otras. Ni cabe el olvido. Solo la superposición.

Nosotros, desde que empezamos a trabajar juntos, tenemos una máxima que viene a cuento: “Lo que no es divertido, no es sostenible”, y eso da una pátina continuada a nuestro quehacer. AJUST3 de CU3NTOS no se escapa de ello.

Referencias

[1] TRUJILLO, Macarena; RIVERA, Rafael. *AJUST3 de CU3NTOS*, NPQ Editores, Valencia, 2022.

Sobre el/los autor/es:
Nombre: Macarena Trujillo Guillén
Correo Electrónico: matrugui@mat.upv.es
Institución: Universidad Politécnica de Valencia, España.

Nombre: Rafael Rivera Herráez
Correo Electrónico: rafariveraherraez@gmail.com

Críticas y reseñas

Ilusiones Matemáticas

Mathematical Illusions

Aurelio Sánchez Estévez

Revista de Investigación

Volumen XIV, Número 1, pp. 101–106, ISSN 2174-0410
Recepción: 10 Mar'24; Aceptación: 29 Mar'24

1 de abril de 2024

Resumen

Este artículo hace una reseña de los libros *Ilusiones Matemáticas*. Se trata de una obra de carácter divulgativo publicada en dos volúmenes, con la que se pretende transmitir una visión de las matemáticas cercana y asequible. A lo largo de sus páginas se dan a conocer numerosos principios y curiosidades relacionadas con diferentes ramas de las matemáticas y también se presenta la forma en la que se utilizan para crear juegos de magia, acertijos, rompecabezas o ilusiones ópticas entre otras formas de expresión artística.

Palabras Clave: matemáticas, ilusiones, magia, ilusionismo, mentalismo, magia matemática, matemagia.

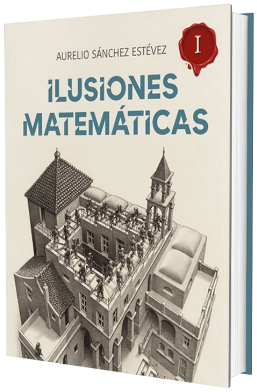
Abstract

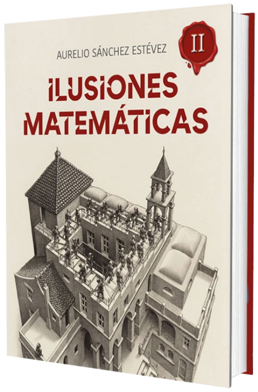
This article reviews the books *Ilusiones Matemáticas (Mathematical Illusions)*. It is an informative work published in two volumes, that aims to convey a close and accessible vision of mathematics. Many principles and curiosities related to different branches of mathematics are presented throughout its pages, as well as how they are used to create magic tricks, riddles, puzzles and optical illusions, among other ways of artistic expression.

Keywords: mathematics, illusions, magic, illusionism, mentalism, mathematical magic, mathemagic.

1. Ficha técnica

Título: Ilusiones Matemáticas
Autor: Aurelio Sánchez Estévez
Editorial: Páginas Libros de Magia
Encuadernación: Rústica con solapas. Cosido.
Formato: 17 × 24 cm
Edición: 1ª edición en castellano
Fecha de publicación: mayo 2024
Páginas: 320 págs. (Vol. I) - 256 págs. (Vol. II)
ISBN Vol. I: 978-84-15058-52-6
ISBN Vol. II: 978-84-15058-63-2
ISBN de la colección: 978-84-15058-64-9
Disponible en www.librosdemagia.com





2. El autor

Aurelio Sánchez Estévez (Madrid, 1972) es licenciado en Ciencias Económicas y Empresariales y Máster en Innovación Educativa. Actualmente trabaja como Subdirector General en Kumon Instituto de Educación de España y participa en la docencia del Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Formación Profesional (Especialidad: Matemáticas) de la Universidad Politécnica de Madrid. Es también miembro de la Red de Divulgación Matemática DiMa y de la Sociedad Española de Ilusionismo, colaborando en actividades de formación del profesorado y proyectos de innovación educativa en instituciones de ámbito público y privado. En paralelo realiza una intensa labor de divulgación de las matemáticas dentro y fuera de España, en la que da a conocer su conexión con el ilusionismo y otras formas de expresión artística a través del blog www.ilusionesmatematicas.com y mediante espectáculos, cursos, conferencias y talleres dirigidos a familias, profesores y estudiantes de todos los niveles educativos.

3. La editorial

Páginas Libros de Magia fue fundada en Madrid en 1992, y bajo el lema «Lee, llegarás lejos», ha publicado alrededor de doscientos títulos en español, inglés y japonés, e impreso más de trescientos mil ejemplares. Dedicada de forma exclusiva a la edición de libros de Ilusionismo y artes afines destinados a profesionales y aficionados de todas las edades, es la editorial más importante de magia en lengua española y referente en el sector.

Varias generaciones de aficionados en España y Latinoamérica se han formado con sus publicaciones y ello ha contribuido a que la magia española haya alcanzado un nivel y reconocimiento excepcionales.

Páginas recibió el prestigioso Premio Media Awards 2020 otorgado por The Academy of Magical Arts (Academia de Artes Mágicas), que reconoce la labor editorial dedicada a promover y divulgar el conocimiento, la edición, la publicación y la historia de la magia de todo el mundo. Este galardón, presentado por el ilusionista David Copperfield y entregado por el editor estadounidense Mike Caveney, se suma a otros premios nacionales: GranHada 2018, del

Festival Hocus Pocus, y Premio Nacional Alfredo Florensa, por la trayectoria de la editorial durante más de treinta años.

4. Los libros

Ilusiones Matemáticas es una obra de carácter divulgativo publicada en dos volúmenes, con la que se pretende transmitir una visión de las matemáticas cercana y asequible. A lo largo de sus páginas se dan a conocer numerosos principios y curiosidades relacionadas con diferentes ramas de las matemáticas y también se presenta la forma en la que se utilizan para crear juegos de magia, acertijos, rompecabezas o ilusiones ópticas entre otras formas de expresión artística que surgen de la creatividad del ser humano.

Este acercamiento lúdico tiene como finalidad que los lectores entiendan los mecanismos que hacen posible que las ilusiones presentadas tengan la capacidad de asombrar, desentrañando sus fundamentos matemáticos y la manera en la que estos quedan ocultos para potenciar su efecto ante los espectadores, todo ello aderezado con numerosas curiosidades, anécdotas y referencias que proporcionan información adicional y contexto histórico a quienes deseen profundizar más. La obra está profusamente ilustrada –algunas de las ilustraciones pertenecen a prestigiosos artistas como Dalí o Escher–, para ejemplificar y facilitar la comprensión de los conceptos matemáticos en los que se apoyan las ilusiones presentadas.

El objetivo fundamental, independientemente del tipo de lector o de los conocimientos previos, es estimular el interés por las matemáticas y fomentar una actitud positiva hacia su aprendizaje, promoviendo en los lectores el deseo de investigar y aprender nuevos conceptos, además de mejorar en las habilidades de resolución de problemas, el razonamiento matemático y la creatividad. Se persigue que tanto jóvenes como adultos puedan adquirir conciencia de la importancia de las matemáticas y sus múltiples aplicaciones en ámbitos lúdicos y artísticos, en los que su relación con esta ciencia puede pasar fácilmente desapercibida a primera vista.

En el ámbito educativo, el conocimiento de juegos de magia y otras ilusiones basadas en las matemáticas proporciona a los docentes recursos y herramientas adicionales que pueden ser utilizados en clase de una forma efectiva y significativa para el aprendizaje, complementando y generando sinergias con los que ya emplean habitualmente. Aquellas personas vinculadas específicamente con la enseñanza de las matemáticas, descubrirán diversas ideas para diseñar actividades que permitan introducir o reforzar contenidos de una manera amena y participativa, con el objetivo de incrementar la motivación.

Los aficionados al ilusionismo encontrarán también información muy valiosa sobre la estructura matemática interna de varios juegos que son presentados por magos y mentalistas profesionales de todo el mundo y cuya comprensión es imprescindible no solo para entender su mecánica, sino para crear nuevos efectos basados en dicho conocimiento.

5. Estructura y contenido

Los dos volúmenes de la obra están compuestos por un total de nueve capítulos y un epílogo. Está prologada por Eduardo Sáenz de Cabezón Irigaray y Camilo Vázquez Alemán, notables referentes en el área de las matemáticas y del ilusionismo respectivamente.

Eduardo Sáenz de Cabezón es doctor en matemáticas y profesor de Lenguajes y Sistemas informáticos en la Universidad de la Rioja desde 2001. Además de sus investigaciones en el área del álgebra computacional, es un reconocido divulgador de las matemáticas a través de conferencias, talleres, monólogos científicos y el canal de Youtube *Derivando* en el que cuenta con más de un millón de suscriptores. También es presentador del programa *Orbita Laika* de RTVE.

Camilo Vázquez es un ilusionista especializado principalmente en magia de cerca y ganador de premios tan prestigiosos como el Primer premio mundial de Micromagia en 1973, entre otros muchos reconocimientos nacionales e internacionales. Fue también miembro fundador de la Escuela Mágica de Madrid junto a Juan Tamariz y Arturo de Ascanio.

Volumen I: En los cuatro primeros capítulos se dan a conocer diversos tipos de ilusiones que utilizan conceptos y contenidos pertenecientes a otras tantas ramas de las matemáticas.

El primer capítulo está dedicado a las *ilusiones aritméticas*, que se pueden abordar a partir del conocimiento de la secuencia numérica y las cuatro operaciones básicas. Comienza con un juego de magia con monedas que no requiere destreza manual para su realización y otro procedente de la literatura matemática rusa consistente en adivinar una cifra elegida por un espectador. El capítulo continúa con un pequeño cuento navideño repleto de cálculos que buscan sorprender al lector y que tiene como protagonistas al Grinch y a los Reyes Magos. Posteriormente, se dan a conocer algunas de las técnicas de cálculo mental utilizadas por reconocidos calculistas como Arthur Benjamin o Alberto Coto, que sirven como preámbulo para adentrarse en el análisis del funcionamiento y la evolución de varios métodos ideados para determinar de forma rápida y eficiente el día de la semana correspondiente a cualquier fecha. Por último, se explica en qué consiste el principio de paridad y cómo aplicarlo en un juego de cartas clásico.

El segundo capítulo se centra en las *ilusiones algebraicas*, presentándose diversos métodos que posibilitan la adivinación de números, símbolos, cantidades ocultas de monedas y cartas pensadas por los espectadores y describiendo también algunos de los temas tratados en el primer libro conocido sobre matemáticas recreativas. El álgebra matricial o la sucesión de Fibonacci son algunos de los contenidos matemáticos que permiten al lector entender y replicar los efectos presentados o crear otros nuevos a partir de los conocimientos adquiridos.

El tercer capítulo está dedicado a las *ilusiones analíticas*. En él se introduce el concepto de crecimiento exponencial, el uso de logaritmos para simplificar determinados cálculos e incluso el análisis armónico. A través de una selección de ilusiones que hacen uso de estas temáticas, se muestra lo falible que puede resultar nuestra intuición o la facilidad con que puede ser engañado el sentido de la vista.

El cuarto capítulo, con el que finaliza el primer volumen, se adentra en una gran variedad de *ilusiones geométricas*, estudiando en profundidad rompecabezas populares como el tangram y otros mucho menos conocidos en los que los conceptos propios de la geometría constituyen una parte esencial del secreto de su funcionamiento. Además, se analizan varias de las obras de Escher, así como diversas ilusiones ópticas basadas en la anamorfosis y en los conceptos de simetría y asimetría. El estudio de las curvas y sólidos de anchura constante o la ilusión de Jastrow forman también parte de los contenidos de este capítulo.

Volumen II: Comienza con el capítulo quinto, en el que se abordan las *ilusiones topológicas*, donde no podía faltar la banda de Möbius, así como varios efectos de ilusionismo cuyo fundamento se encuentra vinculado a esta rama de las matemáticas.

En el capítulo sexto se analizan las *ilusiones discretas*, que permiten presentar de una manera práctica conocidos principios matemáticos como el principio del palomar y otros con aplicaciones en la magia con cartas tales como el principio de Gilbreath o el de Hummer. Por otro lado, se explican las sucesiones de de Bruijn y cómo crear paso a paso los grafos del mismo nombre, además de diversos ejemplos prácticos de juegos de mentalismo que hacen uso de estas sucesiones.

El capítulo séptimo dirige la atención del lector hacia las *ilusiones probabilísticas*, comenzando con los denominados juegos de azar no transitivos, en los que la probabilidad de ganar no es la misma para todos los jugadores. Posteriormente, se muestra como la propiedad de no transitividad, característica del popular juego de piedra, papel y tijera, ha permitido crear efectos que forman parte del repertorio de muchos ilusionistas profesionales. Otras cuestiones analizadas son la paradoja del cumpleaños y el problema de Monty Hall, poniéndose de manifiesto que los resultados de aplicar los conceptos probabilísticos son en muchas ocasiones contraintuitivos. Por último, se da a conocer el principio de Kruskal y se muestran alguna de sus aplicaciones mediante el uso de textos literarios y juegos en los que se utilizan cartas.

El capítulo octavo estudia las *ilusiones computacionales*, comenzando por la importancia de la utilización de algoritmos para resolver problemas y cómo se pueden adoptar diversos niveles de complejidad para la creación de un juego consistente en adivinar en qué mano se encuentra una moneda. También se introduce el sistema de numeración binario, las tarjetas binarias y los códigos de detección de errores, incluyendo los códigos de Hamming y su aplicación en juegos de ilusionismo.

Por último, en el capítulo noveno se analizan varias ilusiones clásicas y otras basadas en la física y en la arquitectura. El libro finaliza con un epílogo en el que se anima al lector a seguir ampliando sus conocimientos y a profundizar en aquellos aspectos de las matemáticas que más hayan podido despertar su interés.

Sobre el/los autor/es:
Nombre: Aurelio Sánchez Estévez
Correo Electrónico: contacto@ilusionesmatematicas.com
Institución: www.ilusionesmatematicas.com