 https://doi.org/10.24844/EM3602.04

Variación de problemas de proporcionalidad para ayudar a los alumnos a superar sus dificultades. Una experiencia con futuros maestros

Variation of proportionality problems to assist pupils in overcoming their difficulties. An experience with future teachers

María Burgos,[1] Jorhan J. Chaverri Hernández[2]

Resumen: Investigaciones sobre creación de problemas de matemáticas con propósitos didácticos señalan su estrecho vínculo con los conocimientos y competencias profesionales. Así, el objetivo de este trabajo es describir y analizar cómo un grupo de 130 futuros maestros de educación primaria varían un problema de proporcionalidad (comparación de razones) dado en un episodio de clase hipotético para atender las dificultades encontradas por alumnos en su resolución. Se analiza si estas modificaciones son consistentes con sus propósitos didácticos y cómo justifican sus decisiones. Se sigue un enfoque mixto basado en herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico y elementos propios de la creación de problemas por variación. Entre los resultados obtenidos destacamos algunas carencias en el conocimiento especializado del razonamiento proporcional, que impiden a los futuros maestros realizar variaciones de un problema para responder a dicho requerimiento didáctico-matemático. Se concluye la necesidad de incorporar esta competencia en los programas de formación de profesores.

Fecha de recepción: 3 de marzo de 2023. **Fecha de aceptación:** 10 de abril de 2024.

[1] Universidad de Granada (UGR), departamento de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación, Cartuja, Granada, España: mariaburgos@ugr.es, https://orcid.org/0000-0002-4598-7684.

[2] Universidad de Costa Rica (UCR), Escuela de Matemática de la Facultad de Ciencias, San Pedro, San José, Costa Rica: jorhan.chaverri@ucr.ac.cr, https://orcid.org/0000-0003-3504-5308.

Palabras clave: *invención de problemas, conocimiento didáctico-matemático, formación de profesores, razonamiento proporcional, variación de problemas.*

Abstract: Research on the creation of mathematics problems for didactic purposes points to their close link with professional knowledge and competences. Thus, the aim of this paper is to describe and analyse how a group of 130 prospective primary school teachers vary a proportionality problem (comparison of ratios) given in a hypothetical classroom episode to address the difficulties encountered by students in solving it. We analyse whether these modifications are consistent with their didactic purposes and how they justify their decisions. We follow a mixed approach based on theoretical and methodological tools of the Ontosemiotic Approach and aspects of the creation of problems by variation. Among the results obtained, we highlight some shortcomings in the specialised knowledge of proportional reasoning, which prevent future teachers from creating variations of a problem to respond to this didactic-mathematical requirement. We conclude the need to incorporate this competence in teacher training programmes.

Keywords: *problem posing, didactical-mathematical knowledge, teacher education, proportional reasoning, problem variation.*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

La invención de problemas no es una actividad nueva en la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, no ha sido hasta las últimas décadas cuando desde la Educación Matemática se le ha dedicado mayor atención, llegando a ser considerada como línea de investigación propia (Serin, 2019; Tichá y Hošpesová, 2013).

El planteamiento de problemas es valioso como fin en sí mismo, pero también constituye un medio para lograr una mirada amplia de otros objetivos matemáticos y didácticos (Leavy y Hourigan, 2020). En efecto, la creación de problemas ayuda a disminuir la ansiedad de los estudiantes y fomenta una disposición más positiva hacia las matemáticas (Cai y Leikin, 2020), mejora las habilidades de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes, fomenta sus aptitudes matemáticas y autonomía de aprendizaje, les ayuda a explorar la naturaleza de los problemas en lugar de centrarse únicamente en llegar a soluciones, desarrolla y fortalece el pensamiento crítico y favorece una comprensión profunda de las matemáticas (Kiliç, 2017; Leavy y Hourigan, 2020). Estos beneficios justifican que la creación de problemas ocupe un lugar importante en el currículo (MEFP, 2022; NCTM, 2000; OECD, 2013; OMET, 2005) y diferentes propuestas de enseñanza de las matemáticas (Serin, 2019; Xie y Masingila, 2017).

Para incorporar de manera efectiva el planteamiento de problemas en todos los niveles de la enseñanza de las matemáticas, es necesario que los futuros profesores cuenten con experiencias sobre creación de problemas como parte de su formación previa (Grundmeier, 2015; Kilic, 2017), pues, incluso los profesores con años de experiencia tienen dificultades para diseñar problemas significativos para lograr el aprendizaje de sus estudiantes (Singer y Voica, 2013).

La creación de problemas es una herramienta que mejora el conocimiento del contenido matemático (Xie y Masingila, 2017) y facilita el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas: fortalece la articulación de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas (Malaspina, 2016), favorece las creencias de autoeficacia matemática (Akay y Boz, 2010), ayuda a perfeccionar el análisis de la actividad matemática (Mallart *et al.*, 2016) y capacita para la enseñanza de resolución de problemas (Kilic, 2017; Leavy y Hourigan, 2020; Milinković, 2015; Piñeiro *et al.*, 2019).

Facilitarles esta necesaria experiencia supone, en primer lugar, elaborar herramientas teórico-metodológicas que orienten el análisis, la selección, modificación y planteamiento de problemas para responder a determinados requerimientos matemáticos o didácticos (Mallart *et al.*, 2018). En segundo lugar, implica planificar e implementar acciones formativas en las que la creación de problemas aparezca como recurso para involucrar a los futuros docentes en actividades de aprendizaje auténticas que fomenten una comprensión sólida sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Singer *et al.*, 2013). En particular, se debe capacitar a los futuros profesores para modificar los problemas que desencadenan la actividad matemática, según las expectativas de aprendizaje y las dificultades encontradas por los estudiantes.

Los profesores deben ser capaces de evaluar críticamente el potencial didáctico de los problemas que proponen a sus alumnos y la calidad de la actividad matemática que promueven (Malaspina *et al.*, 2015, Malaspina *et al.*, 2019). Pero, incluso los profesores experimentados, plantean enunciados ambiguos, incorrectos o que no responden a las pretensiones educativas (Mallart *et al.*, 2018; Singer y Voica, 2013).

Así, el objetivo de este trabajo es mostrar cómo futuros maestros de educación primaria proponen modificaciones a un problema de proporcionalidad, dado en un episodio de clase (hipotético) para ayudar a alumnos a superar las dificultades encontradas con la interpretación y resolución de un problema base. Se pretende que los futuros maestros reconozcan las ambigüedades en el enunciado propuesto, como fuente de posibles dificultades, tomando decisiones para reformular la propuesta del problema y aprovechar los errores cometidos como fuente de aprendizaje. Además, se estudia cómo justifican las decisiones didácticas que los lleva a proponer determinadas variaciones y si estas son consistentes con los conflictos identificados y los cambios realmente efectuados.

El análisis nos permite determinar los conocimientos didáctico-matemáticos sobre proporcionalidad de los que disponen o carecen los futuros maestros y que influyen en su competencia para crear problemas por variación. El interés por este contenido en concreto se debe a que, pese a su importancia a lo largo de todo el currículo escolar, numerosas investigaciones muestran que la proporcionalidad es difícil de aprender para los alumnos y de enseñar para profesores de diferentes etapas educativas (Buforn *et al.*, 2018; Burgos y Chaverri, 2022; Burgos y Godino, 2022a, 2022b; Hilton y Hilton, 2019; Izsák y Jacobson, 2017). En particular, los profesores encuentran limitaciones para discernir situaciones directamente proporcionales y diferenciarlas de otras relaciones que no lo son (Izsák y Jacobson, 2017; Weiland *et al.*, 2020), en particular para diferenciar situaciones aditivas y multiplicativas (Hilton y Hilton, 2019). También muestran limitaciones para interpretar adecuadamente las razones en situaciones de comparación (Livy y Vale, 2011) y para comprender los significados de razón y proporción (Buforn *et al.*, 2018). Así, la creación de problemas por variación actúa como medio para evaluar, articular y desarrollar competencias y conocimientos de los futuros maestros sobre proporcionalidad (Mallart *et al.*, 2018).

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Una preocupación importante dentro del ámbito de la educación matemática consiste en caracterizar los conocimientos y competencias que debería tener el profesor de matemáticas para desarrollar su labor docente de manera adecuada. Se acepta que el profesor de matemáticas debe conocer las prácticas matemáticas necesarias para resolver los problemas que el currículo propone para el nivel educativo en el que enseñan y articularlos con los contenidos matemáticos posteriores. Sin embargo, también existe un acuerdo general en que esta competencia no es suficiente para lograr una enseñanza adecuada. Los profesores deben tener un conocimiento especializado del contenido en sí mismo, de las transformaciones que deben aplicarse en los procesos de enseñanza y aprendizaje, y de los factores psicológicos, sociológicos y pedagógicos, entre otros, que condicionan estos procesos. En este sentido, es evidente la necesidad de diseñar e implementar experiencias formativas que permitan promover el crecimiento profesional y desarrollar el conocimiento y las competencias de los profesores (Fernández, *et al.*, 2018; Llinares *et al.*, 2019).

Dado que el foco de investigación en este trabajo es la formación de profesores, adoptamos el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor desarrollado en el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino *et al.*, 2017). En dicho modelo se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son: la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. Esta última implica diseñar, implementar y evaluar secuencias de aprendizaje, propias o de otros, empleando técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad que le permita tomar decisiones de mejora. Para desarrollarla el profesor necesita tanto del conocimiento matemático per se, como del conocimiento especializado o didáctico-matemático en las distintas facetas que afectan a los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino *et al.*, 2017):

- *Epistémica*: conocimiento de la diversidad de significados que se ponen en juego en la actividad matemática; la forma particular en que el profesor de matemática comprende y conoce las matemáticas.
- *Cognitiva*: conocimiento de cómo los estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y como progresan en su aprendizaje.
- *Afectiva*: conocimiento sobre aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y su estudio.
- *Interaccional*: cómo se enseñan las matemáticas, la organización de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes e interacciones en el aula.
- *Mediacional*: conocimiento de los recursos (tecnológicos, materiales y temporales) apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes.
- *Ecológica*: conocimiento de las relaciones del contenido matemático con otras disciplinas y los factores curriculares, socio-profesionales, políticos, económicos que condicionan los procesos de instrucción matemática.

El conocimiento en las diferentes facetas permite al profesor responder a situaciones reales en el aula, en particular, interpretar y evaluar las soluciones de los alumnos a tareas matemáticas y aprovechar el potencial matemático de las estrategias erróneas o poco habituales (Burgos *et al.*, 2022). Específicamente, desde el modelo CCDM se asume que el profesor debe tener la capacidad de "analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando las prácticas, objetos y procesos puestos en juego, y las variables que intervienen en los enunciados, a fin de formular nuevos problemas y adaptarlos a cada circunstancia educativa" (Godino *et al.*, 2017, p. 92).

La creación de problemas con fines didácticos implica conocimientos de las distintas facetas del modelo CCDM (Burgos y Chaverri, 2022), pero también actúa como medio para fortalecerlos. Cuando crea un problema, el profesor debe proponer, a ser posible, varias soluciones al mismo para cerciorarse de que es resoluble (faceta instruccional) e identificar los conocimientos que se ponen en juego en su solución (faceta epistémica) valorando la adecuación al nivel educativo y el currículo (faceta ecológica). Este análisis le permitirá ser consciente de la complejidad de las situaciones-problema que propone a los estudiantes según sus necesidades, respondiendo a los conocimientos y dificultades (posibles o encontradas) de los alumnos (facetas instruccional y cognitiva).

A pesar de que existen diferentes estrategias o metodologías para guiar la creación de problemas (Akay y Boz, 2010; Christou *et al.*, 2015; Kiliç, 2017; Serin, 2019), en este trabajo adoptamos la propuesta desarrollada por Malaspina y colaboradores (Malaspina, 2016; Malaspina y Vallejo, 2014). De acuerdo con Malaspina (2016), la creación de problemas es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema, determinado por cuatro elementos fundamentales: la *información*, es decir, los datos cuantitativos o relacionales que se dan en el problema; el *requerimiento,* esto es, lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo, incluyendo gráficos y demostraciones; el *contexto*, que puede ser intra matemático o extra matemático; el *entorno matemático* en el que se ubican los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema, por ejemplo: proporcionalidad, probabilidad, trigonometría, etcétera.

Según Malaspina y Vallejo (2014) se puede crear un problema mediante dos procesos: (a) por *variación* (el que se asume en este estudio), se diseña un nuevo problema modificando uno o más (pero no todos) de los elementos de un problema dado; (b) por *elaboración*, se formula un nuevo problema, a partir de una situación dada o configurada por el autor, o mediante un requerimiento específico (didáctico o matemático).

A continuación, describimos algunas investigaciones previas sobre creación de problemas, que han tratado de manera específica el proceso de variación.

Milinković (2015) presenta una propuesta de dos tipos de transformaciones de un problema: (a) la variación de alguno (uno o más) de sus componentes mientras que los demás permanecen iguales; (b) la modificación de la representación (pensar el problema en diferentes paradigmas). Para este autor, un problema se describe en términos de sus tres componentes: el contexto (abstracto o realista), los elementos dados o desconocidos, y las relaciones entre los elementos. Señala que la variación puede crear problemas irresolubles y que esto es consecuencia del conocimiento o de la falta de conocimiento del contenido del profesor.

Grundmeier (2015) realiza un estudio con futuros docentes de primaria y secundaria, para incorporar en un curso de contenido matemático la invención de problemas desde dos perspectivas: la generación de problemas (creación de problemas a partir de información dada) y la reformulación de problemas (creación de problemas relacionados con un problema dado). En esta última, las técnicas empleadas por los participantes fueron de dos clases: a) técnicas de estructura: modificar la información dada y la pregunta manteniendo el contexto del problema original; cambiar el contexto; extender el problema dado (mantener el contexto, pero ampliar las condiciones, el requerimiento o el análisis); b) técnicas de superficie: cambiar la información dada; cambiar la pregunta; añadir información; reformular el problema (mismo problema con una redacción diferente). Las de superficie fueron las más frecuentes en su investigación.

Lee *et al.* (2018) clasifican la actividad de creación de problemas en generación y reformulación, argumentando que tienen propósitos educativos distintos: la generación de problemas fomenta la creatividad de los estudiantes, permitiéndoles conectar sus experiencias personales con las matemáticas; mientras que la reformulación de problemas los orienta principalmente a desarrollar sus habilidades reflexivas. En su estudio, encuentran que los profesores consideran más sencilla la reformulación que la generación de problemas.

En el contexto de creación de problemas que implican el razonamiento proporcional, Bayazit y Kirnap-Donmez (2017) propusieron a 162 futuros maestros crear problemas mediante la reformulación de uno inicial, a partir de situaciones semiestructuradas y libres. Los participantes mostraron mayor éxito en las tareas de reformulación, en las que modifican los contextos de las tareas originales o los datos cuantitativos en ella. Los autores indican que los futuros maestros no comprueban sus problemas y no argumentan sobre sus propios pensamientos creativos.

Según Mallart-Solaz (2019) los futuros maestros deben practicar la invención de problemas con propósitos didácticos, al menos, mediante variaciones de un problema inicial. En algunas de sus tareas, solicita a los participantes: describir las características de un problema; crear y resolver problemas y finalmente realizar las variaciones necesarias para que respondan a lo que es un buen problema (según Mallart *et al.*, 2016). De acuerdo con el autor, las variaciones de sus problemas fueron para atender los siguientes aspectos de sus problemas originales:

> a) demasiado fáciles o difíciles y con una resolución poco útil y atractiva, b) no posibilitar diferentes soluciones, c) no sugerir nuevas cuestiones interesantes que pueden guiar hacia la respuesta, d) falta de claridad en el enunciado (fácilmente mejorable con un dibujo), e) dificultad en la autocorrección (un trabajo experimental ayudaría) y f) enunciados no próximos a la realidad del alumno. (Mallart-Solaz, 2019, p. 39)

Como sugieren Piñeiro *et al.* (2019), la variación de problemas permite replantear tareas para facilitar el avance de los estudiantes cuando se atascan, o generar nuevas situaciones para los estudiantes más aventajados, de manera que se impulsa a los estudiantes con dificultades de aprendizaje sin desalentar a los que requieren mayores exigencias.

A pesar de las diferentes experiencias en las que se pide a los futuros docentes crear un nuevo problema por variación de otro, no hemos encontrado ninguna en la que la finalidad de la reformulación sea ayudar a los estudiantes a comprender la situación (relación entre información, requerimiento y objeto matemático cuyo aprendizaje persigue el problema), de manera que la actividad matemática desarrollada por los estudiantes responda al propósito didáctico de la tarea. Nos centramos en uno de los componentes fundamentales del razonamiento proporcional, la comparación de razones (Buforn *et al.*, 2018; 2020). En un problema de este tipo, se dan cuatro valores relacionados de manera multiplicativa dos a dos, formando dos razones que relacionan cantidades de la misma magnitud o de magnitudes diferentes ("*a* es a *b*" como "*c* es a *d*"). Los futuros maestros deben conocer las diferentes estrategias que pueden usar los estudiantes y los principales errores que pueden cometer en los problemas de comparación de razones, como el uso de estrategias aditivas o la interpretación incorrecta de la razón (Buforn *et al.,* 2020). También deben distinguir entre comparaciones relativas y absolutas y reconocer el papel de la razón como índice comparativo en las comparaciones relativas (Buforn *et al.,* 2018). Además, deben aplicar estos conocimientos para modificar los problemas propuestos con la intención de ayudar a los alumnos a progresar en las dificultades encontradas y desarrollar su razonamiento proporcional.

METODOLOGÍA

De acuerdo con Neill *et al.* (2018), este estudio tiene un enfoque mixto: a) cualitativo, pues se describe el conocimiento didáctico-matemático y competencia de futuros maestros (FM en adelante) para crear problemas por variación; b) cuantitativo, dado que se categorizan y cuantifican y comparan los datos obtenidos de las respuestas de los FM. En este proceso se aplica el análisis de contenido (Cohen *et al.*, 2018) sobre los informes de los participantes.

Participantes y contexto

En nuestra experiencia intervinieron 130 FM, que cursaban el sexto semestre del grado de Educación Primaria, en la asignatura de Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas en Educación Primaria en la Universidad de Granada (España). Los participantes habían recibido formación matemática y didáctico-matemática en las facetas epistémica (identificar y articular los principales conceptos, procedimientos y propiedades en los diferentes temas de las matemáticas de Educación Primaria, así como crear y resolver problemas matemáticos en diversas situaciones y contextos y comunicar eficazmente los argumentos que respaldan sus actividades matemáticas), cognitiva (aprendizaje matemático, errores y dificultades) e instruccional (tareas y actividades, materiales y recursos), en particular, sobre proporcionalidad. De manera específica, durante la asignatura en la que se lleva a cabo esta experiencia formativa, los participantes profundizan en los conocimientos adquiridos en los cursos previos y los aplican en la fundamentación y (re)diseño de tareas matemáticas que respondan a contenidos y objetivos matemáticos o didácticos específicos. Particularmente, se espera que los FM sean capaces de realizar variaciones de un problema basadas en las dificultades encontradas o errores cometidos por los estudiantes en su resolución.

Diseño y análisis de la tarea

Como parte de la evaluación de la asignatura, a los FM se les propone la siguiente tarea, en la que se describe un episodio de clase[3] centrado en el entorno del razonamiento proporcional. Se insiste en que es un problema que el (hipotético) maestro propone a sus alumnos para trabajar la comparación de razones. El enunciado es un ejemplo típico de los problemas sobre comparación de razones encontrados en los libros de texto de educación primaria españoles, donde la pregunta se puede interpretar tanto de forma absoluta (comparación entre las cantidades totales de lectores en cada curso) como relativa (comparación entre las razones de alumnos lectores a totales en ambos cursos).

Los FM deben interpretar las respuestas dadas por tres alumnos y realizar variaciones del problema que faciliten su comprensión y resolución, justificando cada una de las variaciones realizadas.

El maestro propone el siguiente problema a su clase de 6º de educación primaria.

> ***Problema*** *En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 15 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. ¿En qué curso se lee más? Explica tu respuesta.*

A continuación, aparecen los comentarios hechos por algunos de sus alumnos al resolver o tratar de resolver este problema:

> Luis: ***Es fácil…En 6º curso leen 15 y en 5º leen 12, así que leen más en 6º.***
>
> María: ***Sí, pero eso no vale... Yo he dividido 60 entre 15 que sale a 4 y luego 40 entre 12 que sale 3,33333 infinitos, pero como 4 es mayor pues leen más en 6º.***
>
> Juan: ***Yo también he hecho 60 entre 15, pero ese 4 no sirve. No es lo mismo 60 que 40, hay que ponerlo a la misma unidad.***

a) ¿Cómo interpretas las respuestas de los alumnos?

b) Crea por variación un problema que contribuya a facilitar la comprensión y la solución de las dificultades encontradas en el episodio y justifica tu elección.

Figura 1. Tarea de evaluación propuesta a los FM.

En el problema que plantea el maestro a sus alumnos de clase de 6º de primaria (curso en el que se estudia proporcionalidad), se espera que estos comparen las razones de alumnos que leen a diario respecto del total de alumnos en cada

[3] El problema propuesto se tomó de Burgos y Godino (2022a).

uno de los cursos y que decidan en tal caso en qué curso se lee más "proporcionalmente". Por tanto, como , en relación con el número de alumnos de cada curso, se lee más en 5º de primaria.

Sin embargo, la pregunta tal cual está formulada en el problema propuesto podría dar lugar a que los alumnos respondan de manera absoluta, "se lee más en 6º, porque 15 leen a diario mientras que en 5º, leen a diario 12".

Esto es lo que parece interpretar Luis, se lee más donde hay más alumnos que leen a diario. María por otro lado, considera que ese procedimiento no es válido, previsiblemente porque comprende el carácter relativo de la comparación. Sin embargo, no compara las razones *alumnos lectores: alumnos totales* sino su recíproca *alumnos totales: alumnos lectores*, mediante la expresión de la razón como decimal. El error que comete en este caso es que la comparación de las razones recíprocas lleva a decidir que el curso en el que se lee más (proporcionalmente) es aquél en el que es menor dicho valor. En el caso de Juan, no llega a decidir en qué curso son mejores lectores, sino que indica por un lado que el resultado obtenido por María (cuatro) no vale, y por otro que para comparar debe haber la misma cantidad total ("unidad" o "todo" de la fracción, cuando indica que "no es lo mismo 60 que 40").

A continuación, se debe crear por variación un problema que contribuya a facilitar la comprensión de la situación y de los errores cometidos por los alumnos. No se trata de evitar los errores, sino de reformular el problema para que los alumnos entiendan cuál ha sido su error y progresen en el uso del razonamiento proporcional necesario.

En primer lugar, sería adecuado reformular la pregunta del problema, para evitar la interpretación en términos absolutos. Si a los alumnos se les ha explicado el término "proporción" o "proporcional" se puede plantear la pregunta como *¿en qué curso se lee más proporcionalmente?* o *¿en qué curso es mayor la proporción de alumnos que leen a diario?* También es posible guiarles en la búsqueda de la comparación como sigue: *Teniendo en cuenta el número de alumnos totales en cada curso y el número de alumnos que leen un libro a diario, ¿en qué curso consideras que hay un mejor hábito de lectura (se lee más o son mejores lectores)?* Con esto se podría ayudar a Luis a entender el carácter relativo de la comparación (si no fue solo una interpretación de la pregunta en términos absolutos).

También se puede pedir explícitamente la razón que han de comparar. ¿Cuál es la fracción *(o porcentaje) de alumnos que leen a diario en cada curso? Entonces, ¿en qué curso crees que hay un mejor hábito de lectura (o son mejores lectores)?*

Esto llevaría a que "comparen fracciones (o porcentajes)" y por tanto a reflexionar sobre la necesidad de la "misma unidad" para comparar los grupos.

Por otro lado, para que comprendan el papel de la parte y el todo y ayudar a entender a María qué relación determina el resultado de su cociente, se podría preguntar previamente: *¿Cada cuántos alumnos de 6º, hay uno que lee a diario un libro? ¿y en 5º* curso? Esta pregunta persigue observar el resultado de la división que hace María: de los 60 alumnos de 6º, 15 leen a diario, luego por cada 4 alumnos de 6º hay uno que lee a diario un libro. De los 40 alumnos de 5º de primaria son 12 los que leen a diario, luego por cada 5 alumnos de 5º, hay uno que lee a diario un libro. Al comparar respecto del valor unitario, María puede relacionar su resultado con que la proporción de no lectores es mayor en 5º que en 6º.

Categorías de análisis

A continuación, describimos y ejemplificamos las categorías utilizadas para el análisis de las respuestas de los participantes a la segunda tarea[4], en la que los FM debían modificar el problema para crear uno nuevo que contribuyera a la comprensión y resolución del episodio de clase. Desde el punto de vista de su pertinencia, se consideran las siguientes categorías, establecidas *a priori*:

- *El problema no es significativo*. Para que sea significativo el enunciado propuesto debe establecer realmente un problema matemático (en particular, que se pueda resolver y que la solución no esté implícita en el enunciado), que su redacción sea clara y no presente ambigüedad (falta de información o redundancia en el enunciado), y que se identifiquen claramente los distintos elementos que lo caracterizan.
- *El problema es significativo, pero no es variación del problema base.*
- *Variación no pertinente*. El problema es significativo, creado por variación, pero no contribuye a resolver las dificultades encontradas en el episodio. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se modifican los datos cuantitativos o relacionales, o el contexto, pero mantiene el mismo tipo de pregunta sin dejar claro si se busca una comparación absoluta o proporcional. También si el problema creado elude la dificultad propia del episodio de clase,

[4] El análisis, categorización y valoración de las respuestas a la primera consigna aparece en Burgos y Chaverri (2023).

evitando que la solución pase por la comparación proporcional de las relaciones entre las magnitudes (igualar totales de manera que la comparación absoluta de una respuesta válida, transformar el problema en uno aditivo de comparación, etc.)

- *Variación pertinente*. El problema es significativo, creado por variación del problema base teniendo en cuenta las dificultades que encontraron los alumnos en el episodio de clase para su solución. Esto supone clarificar la intención del problema y en tal caso dirigir al estudiante a la comparación proporcional de los alumnos lectores en cada curso, en el sentido descrito en la sección previa.

Categorías de los problemas creados por variación

Cada investigador analizó de manera independiente un cuarto de los informes de los participantes. Luego contrastaron las categorías obtenidas y las revisaron de forma conjunta para consensuar el juicio de los protocolos de respuestas en los que había discrepancia. El proceso se repitió hasta haber analizado todos los informes. Se obtienen así las siguientes categorías (establecidas *a posteriori*):

- *Describe lo que haría, pero no llega a formular el problema*. En este caso los FM sugieren una propuesta sin concretar un enunciado del problema. Por ejemplo, FM91 señala:

  > Lo que realizaría primero sería exponer el problema como si el total de las dos clases fuese el mismo, es decir, tanto en 6º como en 4º hay el mismo número de alumnos y, a continuación, en otro apartado, les preguntaría que si en el caso de que en 6º hubiese 60 alumnos y en 4º, 40 cuál sería ahora la clase con más porcentaje de lectura.

- *No es un problema creado por variación*. Esto ocurre en dos casos:

  a) los FM *modifican todos los elementos del problema*. Por ejemplo, FM8 plantea: "al salir del colegio, Pedro y Ana van a la tienda de chuches. Pedro se compra 7 ladrillos rojos y Ana 10 ladrillos blancos. Al salir de la tienda, Pedro se come 3 y Ana 5. ¿Quién ha comido más ladrillos?"

b) los FM *reescriben el enunciado* manteniendo contexto, entorno, datos cuantitativos y requerimiento. Por ejemplo:

> En mi colegio, estamos realizando una encuesta para ver cuántos alumnos leen un libro diariamente. Comprobamos que en 6º de primaria hay un total de 60 alumnos de los cuáles leen un libro diariamente 15 alumnos y en 5º de primaria con un total de 40 alumnos leen un libro diariamente 12 alumnos. ¿En qué curso leen más alumnos diariamente? Explica tu respuesta (FM72).

– *Modifica el problema para calcular totales*, pasando de un problema de proporcionalidad a otro aditivo. Por ejemplo, FM115 pregunta el número total de lectores sin distinguir los cursos:

> En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria, 15 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. ¿Cuántos libros leen entre los dos cursos a diario? Explica tu respuesta. Usa representaciones si te resulta más sencillo.

– *Modifica el problema para calcular partes*, convirtiendo el problema de comparación a uno de valor faltante. Por ejemplo, FM27:

> En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria el 25% lee un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, el 30% lee un libro a diario. ¿Cuántos alumnos leen un libro en cada curso?

– *Mantiene la pregunta, pero cambia los datos cuantitativos por fracciones o porcentajes*. Por ejemplo:

> En mi colegio, de los 50 alumnos de 6º curso de primaria 1/5 leen un libro a diario. De los 30 alumnos de 5º curso de primaria, 2/4 leen un libro a diario. ¿En qué curso se lee más? Explica tu respuesta (FM2).

– *Modifica los datos para que se relacionen multiplicativamente*. Cambia la información para que las cantidades de las magnitudes sean múltiplos o submúltiplos entre sí (en al menos una de las razones). Por ejemplo, FM95 enuncia: "En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 15 leen un libro a diario. De los 30 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. ¿En qué curso se lee más?”.

- *Iguala totales o partes a comparar*. En esta categoría se incluyen los problemas en los que los FM igualan los totales de alumnos o las partes de los lectores de ambos cursos, manteniendo el mismo tipo de pregunta. Por ejemplo:

> En 6º curso hay dos clases de 30 alumnos cada una, en una de ellas 15 alumnos leen un libro a diario, en la otra, 12 alumnos leen un libro a diario. ¿En qué clase se lee más? Justifica tu respuesta (FM92, iguala totales).
> En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 18 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 18 leen un libro a diario. ¿En qué curso se lee más? Explica tu respuesta (FM128, iguala partes).

- *Mantiene la pregunta, pero agrega información (o modifica la redacción) para insistir en la diferencia de totales de alumnos en cada curso*. En este caso los FM mantienen el enunciado, pero insisten en la diferencia de la cantidad de lectores en cada curso con la intención de orientar hacia el razonamiento proporcional. Por ejemplo, FM1 crea el siguiente problema:

> En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 15 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. Teniendo en cuenta que cada clase tiene un número distintos de alumnos, ¿En qué curso se lee más?

- *Modifica la pregunta o añade otra con la intención de hacer referencia explícita a la proporcionalidad o a la comparación relativa (fracciones, porcentajes)*. Por ejemplo, FM5 y FM54 plantean, respectivamente:

> En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 15 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. ¿En qué clase hay un mayor porcentaje de alumnos que leen? (FM5).
> En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria, 15 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario.
> Según estos datos, ¿en qué curso se lee más, en proporción al número de alumnos que hay en cada curso? (FM54).

- *Otros enunciados no contemplados en las demás categorías*. Se consideran en esta categoría aquellos problemas que no responden a las tipologías anteriores, pero que sí son problemas creados por variación. Por ejemplo, FM105 plantea "Compara las siguientes fracciones e indica cuál es la mayor: 15/60 y 12/40", donde se deshace del contexto y omite la necesidad de establecer un análisis proporcional, reduciendo el problema a una comparación de fracciones.

Categorías de las justificaciones de las variaciones del problema

A continuación, describimos los tipos de argumentos que emplean los FM para justificar el tipo de variación propuesta:

- *Mejorar la interpretación del requerimiento*. En este caso los participantes argumentan, como FM119, que la variación realizada al problema persigue que el requerimiento sea más claro:

> Creo que la principal dificultad del problema es comprender que se pide para resolver, ya que el requerimiento puede ser interpretado de distintas formas. Por ello he decidido redactar el problema de una forma más clara para que su comprensión sea más sencilla y proponer un requerimiento más conciso para no dejar dudas de lo que se pide en el problema.

- *Mejorar la comprensión del enunciado*. Los FM consideran que sus variaciones permiten que el enunciado del problema sea más fácil de comprender, por ejemplo: "He variado un poco la información proporcionada, redactando el enunciado de manera más clara para el alumnado" (FM23).
- *Buscar un contexto más motivador o próximo a los alumnos*. En este caso los participantes consideran que escoger un contexto más familiar para los alumnos les facilita su resolución. Por ejemplo, FM83 dice:

> He decidido modificar el contexto porque creo que es mucho más familiar y atractivo para el alumnado. Además, esa actividad se puede llevar a cabo en clase si aciertan el problema, entonces podrías crear una motivación para su resolución.

- *Facilitar la identificación del uso de la relación de proporcionalidad*. Los FM argumentan que la variación realizada al problema permite identificar la necesidad de utilizar un razonamiento proporcional. Por ejemplo, cambiando los datos para que reconozcan las proporciones, o destacando la diferencia ente la cantidad de alumnos de cada caso. Por ejemplo, FM31 señala: "Luis debe comprender que las dos clases no tienen la misma cantidad de alumnos y que debe realizar una proporcionalidad para igualarlas. Este es el sentido de la información añadida". Con "información añadida" FM31 se refiere a la frase que incluye en el enunciado propuesto: "Teniendo en cuenta que la cantidad de alumnos en ambas clases no es la misma".
- *Clarificar la relación parte-todo*. Aquí, se agrupan las justificaciones de los FM que fundamentan su propuesta en la necesidad de aclarar la relación proporcional entre las magnitudes (cantidad de lectores-total de lectores) en cada grupo de alumnos. Por ejemplo, FM76 argumenta: "La finalidad de este problema es que los alumnos identifiquen la relación parte-todo en la razón, evitando el uso de una estrategia aditiva incorrecta por comparar las partes".
- *Más fácil*. En este caso los FM plantean que su variación fue simplemente para crear un problema más fácil para los alumnos. Algunos no detallan qué los hace más sencillos como, por ejemplo, FM92, quien simplemente indica "considero que el problema propuesto es bastante claro y sencillo de ver a simple vista, además de sencilla realización". En otros casos, especifican qué los hace más sencillo, haciendo fundamentalmente referencia a la simplificación de los datos ("De este modo les resultará más fácil y se sentirán más cómodos manejando estas cifras más pequeñas", FM58).
- *Simplificar el problema mediante el uso de fracciones*. Los participantes señalan, como FM79, que incluir fracciones disminuye la dificultad del problema:

> He realizado esta variación ya que para resolver este problema es mucho más sencillo hacerlo con el contenido de las fracciones puesto que es algo que implica menos dificultad en los alumnos y se ve mucho más claro ya que en este caso no se incluye regla de tres o porcentajes.

Algunos añaden además la ventaja de su representación para la comprensión del problema.

- *Facilitar el problema mediante el uso de porcentajes.* Esta categoría contempla los casos en los que se justifica el uso de porcentajes en el problema como medio para facilitar su resolución. Por ejemplo, FM37 señala:

  > Con estos cambios considero que los alumnos entenderán mejor como calcular el curso que más lee (...), pues al tener que realizar el porcentaje de alumnos que leen por toda la clase, ayudará a superar las dificultades de Juan y María que lo habían realizado al revés, y además mediante el porcentaje podrán ver más claro el resultado.

- *Simplificar las operaciones requeridas (evitar decimales).* En este caso los participantes realizan variaciones para que las operaciones a realizar sean fáciles para los alumnos, evitando el uso de decimales.
- *No contesta.* En este caso, los FM no justificaron la elección de los elementos variados del problema.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En esta sección presentamos los resultados del análisis de contenido realizado de las respuestas dadas por los FM a la tarea de evaluación.

Tipos de problemas creados y su justificación

En la tabla 1 se incluye el resumen de frecuencias de los tipos de problemas creados por los FM, según las categorías descritas y ejemplificadas en la sección previa.

Tabla 1. Distribución de frecuencia de los problemas creados por los FM (n=130)

Categoría	Frecuencia (Porcentaje)
Modifica la pregunta o añade otra para hacer referencia a la proporcionalidad o a la comparación relativa.	67 (51,53)
Mantiene la pregunta, pero agrega información (o modifica la redacción) para insistir en la diferencia de totales de alumnos en cada curso.	14 (10,77)
Modifica los datos para que se relacionen multiplicativamente.	12 (9,23)
Mantiene la pregunta, pero cambia los datos a fracciones o porcentajes	7 (5,38)
Iguala totales o partes a comparar.	7 (5,38)
Modifica el problema para calcular totales.	5 (3,85)
Modifica el problema para calcular partes.	4 (3,08)
No es un problema creado por variación.	6 (4,62)
Describe lo que haría, pero no llegan a formular el problema.	3 (2,31)
Otros enunciados por variación.	5 (3,85)

Fuente propia de la investigación.

Es interesante, tener en cuenta qué respuestas de los alumnos valoraron de manera más adecuada en la primera parte de la tarea, ya que puede influir en la adecuación y el tipo de problema que elaboren cuando lo modifiquen para solventar las dificultades encontradas por estos. En este sentido, observamos que los FM tuvieron mayor éxito al interpretar la respuesta de Luis (adecuada en 82% de los casos) que las de María y Juan. Un escaso porcentaje de los participantes (9,45%) señalaron la posibilidad de interpretar de manera absoluta la pregunta, en cuyo caso no se podía considerar errónea la respuesta de Luis. Cuando asumieron que la pregunta se debe interpretar de forma proporcional (en 87% de los casos), indicaron que el error de Luis estaba en no considerar que el total de alumnos en cada curso es diferente. En el caso de la respuesta de María, solo la mitad de los FM mencionaron que establece erróneamente la relación entre la parte y el todo o que su planteamiento se debe a deficiencias en el razonamiento proporcional o alguno de sus componentes. Finalmente, la mayoría de los FM consideraron que Juan exhibe un razonamiento proporcional parcial que lo lleva a identificar la necesidad de comparar las partes usando la misma unidad (más del 20% consideraron que es el alumno que más se acerca a una respuesta correcta).

Sin embargo, más de la mitad de los participantes no mencionan a los alumnos en su justificación y cuando lo hacen, la mayoría no indica de forma explícita la relación entre su propuesta y las respuestas de los alumnos, por lo que es difícil analizar esta conexión.

Como se observa en la tabla 1, más del 50% de los FM modifican la pregunta o añaden otra con la que se pide explícitamente la comparación proporcional, frecuentemente, indicando "en proporción" (por ejemplo, FM54 plantea "¿en qué curso se lee más, en proporción al número de alumnos que hay en cada curso?") o preguntando por las fracciones o porcentajes de lectores (figura 2). Sin embargo, esta decisión no está siempre motivada porque los FM consideren que la pregunta del problema de partida admita una interpretación "ambigua" (como indica FM118 en la figura 2), ya que como hemos mencionado solo 9,45% de los participantes reflexionaron sobre la posibilidad de interpretar de manera absoluta la pregunta.

Creo que la principal dificultad del problema es comprender que se pide para resolver, ya que el requerimiento puede ser interpretado de distintas formas. Por ello he decidido redactar el problema de una forma más clara para que su comprensión sea más sencilla y proponer un requerimiento más conciso para no dejar dudas de lo que se pide en el problema.

Problema En mi colegio, una clase de 6º de Primaria tiene 60 alumnos. Dentro de esta clase, 15 de los alumnos leen un libro a diario. En la clase de 5º de Primaria hay 40 alumnos en total y 12 de ellos leen un libro a diario. ¿En qué curso el porcentaje de lectura es mayor? Explica tu respuesta.

Figura 2. Variación del requerimiento para mejorar su interpretación (FM118).

Algunos de los FM que asumen la pregunta de manera relativa, modifican la información insistiendo en la diferencia entre número de alumnos totales en cada curso (10,77%, tabla 1). Este es el caso, por ejemplo, de FM96 (figura 3).

En mi colegio, 15 alumnos de los 60 totales de 6º curso de primaria leen un libro a diario. Mientras que 12 alumnos de los 40 totales que hay en 5º de primaria leen un libro a diario. Teniendo en cuenta que la cantidad total de alumnos en cada curso no es la misma, indica en qué curso se lee más. Explica tu respuesta.

Para evitar el primer problema, hemos aclarado al alumnado explícitamente que: "la cantidad total de alumnos en cada curso no es la misma".
Para evitar el segundo problema, hemos indicado de forma más clara la relación parte-todo de la razón: "15 alumnos de los 60 totales" y "12 alumnos de los 40 totales".

Figura 3. Problema creado por variación de la información para clarificar relación parte-todo (FM96).

El primer problema a que se refiere FM96 en la figura 3 es "no considerar que el todo no es igual en ambas razones" (referido a Luis) y con el segundo problema "confundir la parte con el todo de las razones y viceversa, alternando los valores del numerador y el denominador en las fracciones correspondientes" (referido a María y Juan).

Cambiar los datos cuantitativos, para evitar decimales o buscar razones más sencillas que faciliten su comparación es la tercera categoría más frecuente de propuesta de cambio (9,23%) para resolver las dificultades encontradas por los alumnos (figura 4).

En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 15 leen un libro a diario. De los 30 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. ¿En qué curso se lee más?

He cambiado que en 5º hay 30 alumnos, la mitad que en 6º, en vez de 40. Así podemos deducir que siendo la mitad leen casi los mismos que en 6º.

Figura 4. Problema creado por variación de los datos cuantitativos para facilitar la búsqueda de relaciones multiplicativas (FM95).

La tabla 2 muestra las frecuencias encontradas en las diferentes categorías de justificaciones con las que los FM respaldaron sus variaciones realizadas al problema inicial. Se observa que el 11,54% de los FM no detallaron los motivos de su propuesta.

Tabla 2. Distribución de frecuencias (porcentajes) de justificaciones sobre la variación del problema (n=130)

Categoría	Frecuencia
Facilitar la identificación del uso de la relación de proporcionalidad.	22 (16,92)
Mejorar la interpretación del requerimiento.	19 (14,62)
Más fácil (simplificar datos, operaciones)	16 (12,31)
Clarificar la relación parte-todo.	15 (11,54)
Facilitar el problema mediante el uso de porcentajes.	15 (11,54)
Buscar un contexto más motivador o próximo a los alumnos.	10 (7,69)
Mejorar la comprensión del enunciado.	9 (6,92)
Facilitar el problema mediante el uso de fracciones.	9 (6,92)
No contesta.	15 (11,54)

Fuente propia de la investigación.

Según se aprecia en la tabla 2, casi 17% de los participantes indicaron que con los cambios realizados al problema inicial perseguían que fuera más sencillo para los alumnos reconocer y establecer la relación proporcional entre las magnitudes. Esta justificación acompaña a algunos de los problemas en los que se modifica la pregunta o añade otra con la intención de hacer referencia explícita a la proporcionalidad o a la comparación relativa mediante fracciones o porcentajes. También en aquellos problemas creados modificando los datos para que sea más sencillo establecer relaciones multiplicativas entre las cantidades de las magnitudes (figura 4).

Aunque 19 FM señalaron que la modificación del requerimiento realizada pretendía facilitar su comprensión, solo cinco lograron que la pregunta fuera más clara solicitando explícitamente la comparación de los porcentajes de lectura en cada curso (figura 2), o añadiendo "en proporción" a la misma. Los demás, mantuvieron el mismo tipo de pregunta, realizando variaciones de los demás elementos del problema (contexto, datos cuantitativos) que no facilitaban a los alumnos la interpretación del requerimiento.

De los 16 participantes que indicaron que su propuesta era más fácil que el problema inicial, 11 argumentaron que la dificultad del problema disminuía con la utilización de cifras más pequeñas, o al evitar los decimales periódicos en el cálculo de la razón unitaria.

11,54% de los FM justificaron el uso del porcentaje en el requerimiento del problema creado en que facilita la resolución de problemas de proporcionalidad. Al igual que FM118 (figura 2), otros 13 participantes utilizan el porcentaje en el requerimiento. También se considera que dar los datos cuantitativos en forma de porcentaje o fracción ayuda a los alumnos a resolver el problema (figura 5).

> **En mi cole de segundo ciclo de primaria, la maestra de lengua ha pasado los resultados de una encuesta sobre el porcentaje de alumnos que leen en la biblioteca. De los 60 alumnos que hay en el 6º curso 15% leen a diario, mientras que de los 40 alumnos que hay en el 5º curso solo 12 % leen un libro a diario. ¿En qué curso se lee más?**
> ***Justificación*: al introducir el tanto por ciento de una cantidad, lo que le damos más facilidades al alumnado a la hora de entender el enunciado, ya que antes, al no saber que había que hacer exactamente con las cantidades, el alumno se podría confundir.**

Figura 5. Variación no pertinente del problema. Datos cuantitativos en forma de porcentaje (FM36).

Las justificaciones basadas en la necesidad de clarificar la relación parte-todo (11,54%) acompañan a algunos de los problemas creados, en los que se modifica la información para insistir en la diferencia entre el número de lectores y el número de alumnos totales de cada curso, o reescribir las razones dando primero las partes y luego los todos, como ocurre en el propuesto por FM56 incluido en la figura 3. Es frecuente que consideren como FM17 que "el objetivo a la hora de especificar los 15 alumnos de 60 es ayudar a Juan y María, ya que a la hora de dividir se confunden entre la parte y el todo dividen 60 entre 15 y 40 entre 12 cuando esto debería de ser al revés 15/60 y 12/40". Con la intención de evitar que María realice estas divisiones, otros FM apuestan también por cambiar los datos cuantitativos por las fracciones 15/60, 12/40. En este caso, se observa que, si se mantiene la pregunta (entendida de manera relativa), las fracciones o los porcentajes (figura 5) permiten la comparación sin necesidad de conocer los totales de alumnos en cada curso, información que sería, por tanto, redundante.

Pertinencia en la creación de problemas. Relación con el análisis de las respuestas de los alumnos

Dado que los FM debían crear problemas por variación del enunciado considerando las dificultades encontradas en el episodio, analizamos el grado de éxito logrado por los FM en la creación de problemas, comparándolo con el grado de pertinencia en la interpretación de respuestas de los alumnos (Burgos y Chaverri, 2023). Una valoración en la primera tarea se consideró (Burgos y Chaverri, 2023): pertinente (2 puntos) si el FM describe e interpreta correctamente la respuesta del alumno, analizando su estrategia o error; poco pertinente (1 punto) si el FM describe la respuesta dada por el alumno, pero no interpreta de forma adecuada su error; no pertinente (0 puntos) en cualquier otro caso. Así, podían obtener un total de 6 puntos como puntuación máxima. En este trabajo, y con la intención de contemplar la valoración conjunta, consideramos las siguientes categorías: pertinencia alta, si obtiene 5 o 6 puntos; pertinencia media, con 3 o 4 puntos; pertinencia baja, desde 0 hasta 2 puntos.

Tabla 3. Frecuencia (%) en las valoraciones de las respuestas de los alumnos y grados de pertinencia de los problemas creados por los FM (n=130)

Valoración \ Problema	No significativo	Significativo, no variación	Variación no pertinente	Variación pertinente	Total
Pertinencia baja	18 (13,85)	3 (2,31)	61 (46,92)	27 (20,77)	109 (83,85)
Pertinencia media	4 (3,08)	1 (0,77)	10 (7,69)	4 (3,08)	19 (14,62)
Pertinencia alta	0 (0)	0 (0)	2 (1,54)	0 (0)	2 (1,54)
Total	22 (16,92)	4 (3,08)	73 (56,15)	31 (23,85)	130 (100)

Fuente propia de la investigación.

La tabla 3 muestra dos hechos que merecen atención. Por un lado, más de la mitad (56,15%) de los FM crearon problemas que, si bien eran problemas significativos creados por variación de la situación inicial, no facilitaban la solución atendiendo a las dificultades encontradas por los alumnos. Esto se debe, mayoritariamente a que los FM "evitan" la dificultad identificada, por ejemplo, dando la información directamente como fracción o porcentaje, porque consideran que su cálculo fue complejo, o "adaptan" la información para que la respuesta de los alumnos sea válida. Esto ocurre cuando igualan los números de alumnos en cada curso. Por ejemplo, FM55 cambia el número de alumnos en 5º y 6º a 40 en cada caso y afirma:

> Con este problema lo que he cambiado ha sido la información, ya que he modificado los números y he puesto el mismo número de alumnos en ambas clases para evitar las respuestas erróneas que han dado, fruto de la mala interpretación del problema (ya desparece el error de Luis, al tener el mismo número de alumnos en ambas clases).

Por otro, aunque la mayoría (83,85%) de los FM valoraron de forma poco pertinente las intervenciones de los alumnos del episodio, la cuarta parte de los problemas elaborados por estos participantes fueron variaciones adecuadas al requerimiento didáctico planteado en la consigna. Es decir, estos FM crearon problemas que ayudaban a superar la dificultad encontrada con el problema inicial a pesar de no haber descrito de manera adecuada las estrategias y errores de los alumnos. Esto muestra que no existe una relación directa entre la competencia para describir de forma adecuada el pensamiento matemático de los alumnos, y la capacidad para crear problemas que tengan en cuenta sus estrategias erradas. De hecho, los FM que obtuvieron la mayor calificación en la valoración de las respuestas de los alumnos crearon problemas por variación poco pertinentes y no hubo ningún FM que creara problemas de variación pertinente y obtuviera más de 4 puntos en la valoración de las respuestas de los alumnos. Esto puede venir motivado por la falta de un vocabulario experto que permita organizar el discurso profesional cuando describen el pensamiento matemático de los estudiantes (Llinares *et al.*, 2019).

Hemos observado al respecto que más de la mitad de los participantes no mencionan a los alumnos cuando justifican la variación realizada y, si lo hacen, la mayoría no señala su relación de forma explícita. De hecho, solo 17% de los FM justifican las variaciones del problema a partir de los resultados de la primera tarea.

CONCLUSIONES

En este estudio se han presentado los resultados de una experiencia con futuros maestros de primaria, centrada en la creación de problemas de proporcionalidad por variación con la finalidad de facilitar la comprensión y la solución de las dificultades encontradas por alumnos (ficticios) en un posible episodio de clase. No se trata de modificar el problema simplemente para alcanzar la solución o de simplificar el problema para que les resulte más fácil a los alumnos, se trata de reconocer cuáles de las respuestas erróneas proceden de la formulación de la tarea y cómo modificar la información o el requerimiento para progresar en aprendizajes significativos.

Los resultados obtenidos ayudan, por un lado, a identificar los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas que ponen en juego en esta tarea, así como a diagnosticar y comprender sus limitaciones. Por otro, facilita la toma de decisiones y pautas preventivas que favorezcan el desarrollo de habilidades en la creación como parte de la formación docente (Mallart *et al.*, 2018).

El hecho de que menos de la cuarta parte de los FM tuvieran éxito al crear problemas por variación pertinentes, muestra deficiencias en diferentes facetas del conocimiento didáctico-matemático sobre la proporcionalidad:

a) *Epistémica*. Un conocimiento sólido del contenido matemático es imprescindible para crear problemas (Tichá y Hošpesová, 2013; Milinković, 2015), en particular, en aquellos que involucra el razonamiento proporcional (Burgos y Chaverri, 2022). Aun cuando asumen que la pregunta del problema conlleva un razonamiento proporcional, los FM crean problemas (por variación en este caso) que permiten desligarse del uso de la proporcionalidad (de comparación aditiva). En otros casos, la modificación persigue el uso de la regla de tres como estrategia de resolución, aun cuando no es un medio efectivo en un problema de comparación como el dado. Esto coincide con resultados previos en los que se observa una desconexión entre el conocimiento de los procedimientos implicados en el razonamiento proporcional y significados de la razón no directamente vinculados con procedimientos, por ejemplo, la razón como índice comparativo (Buforn *et al.*, 2018).
b) *Cognitiva*. Los profesores de matemáticas deben ser capaces de graduar la complejidad de los problemas que proponen, pero para esto requieren identificar los conflictos de aprendizaje que puede implicar una tarea (creada o elegida). En este trabajo se observa que los FM no identifican oportu-

namente las dificultades o errores cometidos en la solución del problema en el episodio de la clase, ni la dificultad de las posibles interpretaciones del requerimiento. Es necesario ayudar a los futuros maestros a generar un discurso detallado en relación con las estrategias usadas por los estudiantes de educación primaria (Ivars *et al*., 2018) incluyendo referencias explícitas a posibles obstáculos y su origen, proporcionándoles herramientas para guiar la interpretación de las narrativas de los alumnos (Burgos y Godino, 2022b).

c) *Interaccional-mediacional*. Los FM tienen dificultades para crear problemas que potencien un razonamiento proporcional en los estudiantes; pueden crear por variación problemas pertinentes, pero estos no facilitan la comprensión y resolución del problema inicial y "evitan" las dificultades en lugar de aprovechar el error como fuente de aprendizaje. El conocimiento del contenido matemático que se espera enseñar y de cómo se desarrolla y progresa el aprendizaje de los estudiantes no es suficiente para lograr una adecuada enseñanza de las matemáticas. Es necesario reforzar los conocimientos de los futuros maestros sobre organización de tareas, resolución de dificultades y recursos apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes que les permita hacer frente a situaciones reales de clase (Godino *et al*., 2017).

Teniendo en cuenta los resultados, esta propuesta se puede mejorar y adaptar a futuras investigaciones. Dado que muchos participantes inventaron problemas no pertinentes y otros describen lo que harían, pero no concretan el problema, sería adecuado solicitar la solución de los problemas creados y que analicen las propuestas de sus compañeros, así como darles más oportunidades de crear problemas guiados por variación (elementos o requerimiento matemático o didáctico que orienten la elaboración) en base al análisis de conocimientos matemáticos implicados, antes de enfrentarlos a la variación para responder a las dificultades encontradas en un episodio de clase. La discusión conjunta en las prácticas de creación de problemas puede ayudar a que los futuros maestros reflexionen sobre los errores o carencias de conocimientos didáctico-matemáticos y reconsideren sus propias concepciones sobre lo que es un buen problema matemático o que es un problema "fácil" (Tichá y Hošpesová, 2013). También puede ser necesario precisar el instrumento, en particular, lo que se considera en el planteamiento de Malaspina (2016) variación de la información de un problema, ya que, como hemos comprobado, los FM consideran una variación en la información si se añade alguna oración o frase que insista o dirija la atención del alumno en algún dato del enunciado, sin modificar datos numéricos o la forma en la que se presentan relacionados.

Los resultados de esta investigación contribuyen a la escasa documentación del efecto que presenta la invención de problemas en los procesos cognitivos de los futuros docentes (Akay y Boz, 2010), brindando información novedosa a los programas de formación sobre sus conocimientos didáctico-matemáticos del razonamiento proporcional y cómo lo emplean en la creación de problemas por variación para responder a un requerimiento didáctico.

Además, considerando que desarrollar la capacidad de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes es un objetivo importante en la formación de profesores (Buforn *et al.*, 2020), el instrumento utilizado permite obtener y estudiar información sobre dicha competencia.

Coincidimos con Tichá y Hošpesová (2013) y Mallart *et al.* (2016) en que la invención de problemas por variación puede favorecer la capacidad de análisis matemático de los FM, siendo una estrategia oportuna para iniciarlos en la creación de problemas, con diferentes finalidades didáctico-matemáticas. Sin embargo, como indica Milinković (2015) es necesario continuar investigando los beneficios potenciales de conceptualizar la creación de problemas a través de la transformación.

Una deficiente o escasa formación de los maestros sobre creación de problemas, obstaculiza su desarrollo y desempeño profesional. Los problemas no deben elegirse solo porque sean atractivos o aparezcan sugeridos por los libros de texto (Pino-Fan *et al.*, 2020), sino por su potencial para promover un aprendizaje significativo en los estudiantes. Dado que aprender a inventar problemas para responder a requerimientos matemáticos o didácticos es el primer paso para enseñar matemáticas de manera eficiente, es necesario incorporar dicha competencia en los programas de formación de profesores (Leavy y Hourigan, 2020).

AGRADECIMIENTOS

Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MICIU/AEI/ 10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE.

REFERENCIAS

Akay, H. y Boz, N. (2010). The Effect of Problem Posing Oriented Analyses-II Course on the Attitudes toward Mathematics and Mathematics Self-Efficacy of Elementary Prospective Mathematics Teachers. *Australian Journal of Teacher Education, 35*(1), 59–75. https://doi.org/10.14221/ajte.2010v35n1.6

Bayazit, I. y Kirnap-Donmez, S. (2017). Prospective teachers' proficiencies at problem posing in the context of proportional reasoning. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 8*(1), 130–160. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.303759

Buforn, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *RMIE, 23*(76), 229–251.

Buforn, A., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A. y Brown, L. (2020). Pre-service teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 1–9. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333

Burgos, M. y Chaverri, J. (2022). Conocimientos y competencias de futuros maestros para la creación de problemas de proporcionalidad. *Acta Scientiae, 24*(6), 270–306. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7061

Burgos, M y Chaverri, J. (2023). Explorando la percepción de futuros maestros de primaria sobre el pensamiento matemático de los alumnos en un problema de proporcionalidad. *Aula Abierta, 52*(1), 43–52. https://doi.org/10.17811/rifie.52.1.2023.43-52

Burgos, M. y Godino J. D. (2022a). Assessing the Epistemic Analysis Competence of Prospective Primary School Teachers on Proportionality Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 367–389. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0

Burgos, M. y Godino, J. D. (2022b). Prospective Primary School Teachers' Competence for the Cognitive Analysis of Students' Solutions to Proportionality Tasks. *J Math Didakt,* 43, 347–376. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00193-4

Burgos, M., López-Martín, M. del M., Aguayo-Arriagada, C. y Albanese, V. (2022). Análisis cognitivo de tareas de comparación de probabilidades por futuro profesorado de Educación Primaria. *Uniciencia, 36*(1), 1–24. https://doi.org/10.15359/ru.36-1.38

Cai, J. y Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics, 105*(3), 287–301. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10008-x

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM, 37*(3), 149–158. https://doi.org/10.1007/s11858-005-0004-6

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8va ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development, and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (13), 39–61. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90–113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Grundmeier, T. (2015). Developing the Problem-Posing Abilities of Prospective Elementary and Middle School Teachers. En F.M. Singer *et al.* (Eds.), *Mathematical Problem Posing, Research in Mathematics Education* (pp. 411–431). https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_20

Hilton, A. y Hilton, G. (2019). Primary school teachers implementing structured mathematics interventions to promote their mathematics knowledge for teaching proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*, 545–574. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9405-7

Izsák, A. y Jacobson, E. (2017). Preservice teachers' reasoning about relationships that are and are not proportional: A knowledge-in-pieces account. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(3), 300–339. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.48.3.0300

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S. y Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: using a hypothetical learning trajectory to improve preservice primary teachers' professional discourse. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(11), em1599. https://doi.org/10.29333/ejmste/93421

Kılıç, Ç. (2017). A new problem-posing approach based on problem-solving strategy: Analyzing pre-service primary school teachers' performance. *Educational Sciences: Theory & Practice,* 17, 771–789. https://doi.org/10.12738/estp.2017.3.0017

Lee, Y., Capraro, R. y Capraro, M. (2018). Mathematics Teachers' Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge in Problem Posing. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 13*(2), 75–90. https://doi.org/10.12973/iejme/2698

Leavy, A. y Hourigan, M. (2020). Posing mathematically worthwhile problems: developing the problem-posing skills of prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*, 341–361. https://doi.org/10.1007/s10857-018-09425-w

Livy, S. y Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development, 1*(2), 22–43.

Llinares, S., Ivars, P., Buforn, À. y Groenwald, C. (2019). «Mirar profesionalmente» las situaciones de enseñanza: una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 177-192). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

Malaspina, U. (2016). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. En A. Ruiz (Ed.), *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (pp. 321–331). Universidad de Costa Rica.

Malaspina, U. y Vallejo, E. (2014). Creación de problemas en la docencia e investigación. En U. Malaspina (Ed.), *Reflexiones y Propuestas en Educación Matemática* (pp. 7–54). Editorial Moshera S.R.L.

Malaspina, U., Mallart, A. y Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2861–2866). Proceedings of the CERME 9. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289630/document

Malaspina, U., Torres, C. y Rubio, N. (2019). How to stimulate in-service teachers' didactic analysis competence by means of problem posing. En P. Liljedahl, y L. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving* (pp. 133–151). Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_7

Mallart, A., Font, V. y Malaspina, U. (2016). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema de en la formación inicial de maestros. *Perfiles educativos, 38*(152), 14–30. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2016.152.57585

Mallart, A., Font, V. y Diez, J. (2018). Case Study on Mathematics Pre-service Teachers' Difficulties in Problem Posing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(4), 1465–1481. https://doi.org/10.29333/ejmste/83682

Mallart-Solaz, A. (2019). Interés de los futuros maestros en saber crear problemas de matemáticas para enseñar a resolverlos. *Psicología Educativa*, *25*(1), 31–41. https://doi.org/10.5093/psed2018a17

Milinković, J. (2015). Conceptualizing Problem Posing via Transformation. En J. Cai, N. Ellerton, y F.M. Singer (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* (pp. 47–70). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_3

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado, 52 (I), 24386-24504

National Council Teacher Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Author. https://www.rainierchristian.org/NCTM_principles-and-standards-for-school-mathematics.pdf

Neill, D., Quesada, C. y Arce, J. (2018). Investigación cuantitativa y cualitativa. En D. Neill y L. Cortez (Coord.), *Procesos y Fundamentos de la Investigación Científica* (pp. 68–88). UTMACH.

OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and analytical framework. Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en

Ontario Ministry of Education and Training (OMET) (2005). *The Ontario Curriculum: Grades 11 and 12, business education*. http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/secondary/business1112curr

Pino-Fan, L., Báez-Huaiquián, D., Molina-Cabero, J. y Hernández-Arredondo, E. (2020). Criterios utilizados por profesores de matemáticas para el planteamiento de problemas en el aula. *Uniciencia*, 34(2), 114–136. https://doi.org/10.15359/ru.34-2.7

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2019). Componentes de conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas en educación primaria. *PNA 13*(2), 104–129. https://doi.org/10.30827/pna.v13i2.7876

Serin, M. K. (2019). Analysis of the problems posed by pre-service primary school teachers in terms of type, cognitive structure and content knowledge. *International Journal of Educational Methodology*, *5*(4), 577–590. https://doi.org/10.12973/ijem.5.4.577

Singer, F. M., Ellerton, N. y Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics, 83,* 1–7. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2

Singer, F. y Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. Educational studies in mathematics, 83(1), 9–26. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9422-x

Tichá, M., y Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 133–143. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9455-1

Xie, J. y Masingila, J. (2017). Examining interactions between problem posing and problem solving with prospective primary teachers: A case of using fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 101–118. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9760-9

Weiland, T., Orrill, C.H., Nagar, G.G., Brown, R. y Burke, J. (2020). Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 24(*2), 179–202. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09453-0

Autor de correspondencia

Jorhan J. Chaverri Hernández

Dirección: Universidad de Costa Rica, Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, San Pedro de Montes de Oca, San José, Costa Rica / www.ucr.ac.cr / jorhan.chaverri@ucr.ac.cr

Código postal: 11501-2060 San José