 https://doi.org/10.24844/EM3602.03

Desde estrategias aditivas hasta estrategias proporcionales: Características identificadas con estudiantes de Educación Básica Media y Superior de Ecuador

From additive to proportional strategies: Features identified with middle and high school students in Ecuador

Ceneida Fernández,[1] Pedro Ivars,[2] Francisco Rojas,[3] Salvador Castillo[4]

Resumen: Estudios previos han mostrado que, al resolver situaciones proporcionales y aditivas, los estudiantes transitan desde usar indiscriminadamente estrategias aditivas a usar indiscriminadamente estrategias proporcionales. Además, el tipo de razón y la naturaleza de las cantidades parece influir en el uso de estas estrategias. Este estudio explora qué estrategias usan los estudiantes de Educación Básica Media y Superior de Ecuador cuando resuelven problemas aditivos y proporcionales de valor ausente con razones enteras/no enteras y cantidades discretas/continuas. Los resultados muestran una tendencia diferente: cuando los estudiantes dejan de usar indiscriminadamente estrategias aditivas en situaciones proporcionales y aditivas, no usan indiscriminadamente la proporcionalidad. Estos estudiantes usan otros procedimientos erróneos para resolver los problemas proporcionales. Además, ambas variables influyeron significativamente: (I) se usaron más las estrategias aditivas con relaciones/razones no enteras y las proporcionales con relaciones/razones enteras; y (II) se usaron mayormente las estrategias

Fecha de recepción: 25 de noviembre de 2022. **Fecha de aceptación:** 13 de mayo de 2024.

[1] Universidad de Alicante, España, ceneida.fernandez@ua.es, https://orcid.org/0000-0002-4791-9247.
[2] Universidad de Alicante, España, pere.ivars@ua.es, https://orcid.org/0000-0002-1965-8721.
[3] Universidad Central de Ecuador, hfra1@alu.ua.es
[4] Universidad de Alicante, España, salvador.castillo@ua.es, https://orcid.org/0000-0002-5248-5172.

proporcionales en problemas proporcionales con cantidades discretas y las aditivas en problemas aditivos con cantidades continuas.

Palabras clave: *Razonamiento proporcional; transición del pensamiento aditivo al multiplicativo; tipo de razón; naturaleza de las cantidades; Educación Básica Media y Superior.*

Abstract: Previous studies have shown that students move, when solving proportional and additive situations, from using additive relations indiscriminately to using multiplicative relations indiscriminately. In addition, the type of ratio and the nature of the quantities seem to influence the use of these relations. This study explores the strategies used by Ecuadorian middle and high school students when solving additive and proportional missing-value problems with integer/non-integer ratios and discrete/continuous quantities. The results show a different pattern: when students stop using the additive strategy indiscriminately, they do not use proportionality indiscriminately, they use incorrect procedures to solve proportional problems. Moreover, both variables were significantly influenced: (I) additive strategies were used more with non-integer ratios/relations and proportional strategies were used more with integer ratios/relations; and (II) proportional strategies were used more in proportional problems with discrete quantities and additive strategies were used more in additive problems with continuous quantities.

Keywords: *Proportional reasoning; transition from additive to multiplicative thinking; type of ratio; nature of quantities; middle and high school education.*

INTRODUCCIÓN

Desde el inicio de la escolarización se introduce el pensamiento aditivo a los estudiantes mientras que el pensamiento multiplicativo se presenta en los últimos años de educación primaria (9-12 años). La transición del pensamiento aditivo al multiplicativo genera dificultades a los estudiantes (Harel y Confrey, 1994; Siemon *et al*., 2005; Verschaffel *et al*., 2007) y ha estimulado una extensa agenda de investigación en las últimas décadas, particularmente, sobre el papel del razonamiento proporcional en esta transición (Degrande *et al*., 2020;

Fernández y Llinares, 2011, 2012; Jiang *et al.*, 2017; Van Dooren *et al.*, 2005; Van Dooren, *et al.*, 2008; Van Dooren *et al.*, 2010).

Una característica de la transición del pensamiento aditivo al multiplicativo es la dificultad de los estudiantes para diferenciar situaciones con estructura multiplicativa (en particular, situaciones proporcionales) de situaciones con estructura aditiva. Una manifestación de esta dificultad es el uso indiscriminado de estrategias aditivas en situaciones aditivas y proporcionales (Hart, 1988; Misailidou y Williams, 2003; Piskin Tunç, 2020; Tourniaire y Pulos, 1985) y, al mismo tiempo, el uso indiscriminado de estrategias proporcionales en situaciones proporcionales y aditivas. Las estrategias aditivas son entendidas como el cálculo de la diferencia entre las cantidades dadas y su empleo en el cálculo de la cantidad desconocida (Hart, 1988; Misalidou y Philippou, 2002; Tournaire y Pulos, 1985). Las estrategias proporcionales integran las diferentes estrategias usadas por los estudiantes en los problemas proporcionales, como el enfoque escalar, el enfoque funcional, la reducción a la unidad, las estrategias constructivas y regla de tres (Ben-Chaim *et al.*, 1998; Freudenthal, 1999; Lamon, 1994; Lo y Watanabe, 1997; Tourniaire y Pulos, 1985). El uso indiscriminado de estrategias proporcionales en problemas proporcionales y no proporcionales es conocido en la literatura como “ilusión de la linealidad” (De Bock *et al.*, 2007; Fernández y Llinares, 2011, 2012; Fernández *et al.*, 2011, 2012; Van Dooren *et al.*, 2005; Van Dooren *et al.*, 2008).

Recientes estudios han identificado un fenómeno que se da a lo largo de la educación primaria (6-12 años) y secundaria (12-16 años): los estudiantes transitan desde un uso indiscriminado de estrategias aditivas a un uso indiscriminado de estrategias proporcionales independientemente de si la situación es aditiva o proporcional (Fernández y Llinares, 2012; Jiang *et al.*, 2017; Van Dooren *et al.*, 2010). En este fenómeno, los estudiantes dejan de usar las estrategias aditivas, que conducen a respuestas erróneas en los problemas proporcionales y, comienzan a usar estrategias proporcionales en estos problemas, pero también en problemas no proporcionales, como las situaciones aditivas (De Bock *et al.*, 2007; Fernández y Llinares, 2012; Van Dooren *et al.*, 2005).

Este fenómeno ha sido identificado en investigaciones con estudiantes de Bélgica, España y China usando instrumentos de recogida de datos similares (problemas proporcionales y aditivos en formato de valor ausente). Se han observado tendencias en común y diferentes. Van Dooren *et al.* (2010), en un estudio con estudiantes de 3º a 6º grado, en Bélgica, mostraron que la tendencia a usar estrategias aditivas tanto en problemas proporcionales y aditivos decrecía a lo largo de los grados casi desapareciendo en este último curso, mientras la tendencia a usar estrategias proporcionales tanto en problemas proporcionales como en no proporcionales aumentaba (el cruce de una tendencia a otra se daba entre 5º y 6º grado). Además, obtuvieron que el grupo de estudiantes que resolvían los problemas correctamente apenas aumentaba a lo largo de los cursos. Fernández y Llinares (2012), con estudiantes de educación primaria y secundaria en España, mostraron la misma tendencia que el estudio de Van Dooren *et al.* (2010). En este estudio se mostró que el uso de estrategias proporcionales en situaciones proporcionales y aditivas aumentaba de 4º a 10º grado y el uso de estrategias aditivas en problemas proporcionales y aditivos decrecía a lo largo de estos grados. En este estudio, el cruce de las tendencias se daba entre 8º y 9º grado. Estos autores argumentaron en su estudio que estas tendencias "podían ser una característica del desarrollo del razonamiento proporcional y que el hecho de que se dé antes o después podría venir explicado por el desarrollo del currículo" (p. 138). Entre 8º y 9º grado en España es cuando se introducía con más énfasis la aproximación algorítmica para resolver los problemas denominados *de regla de tres*. Por otro lado, Jiang *et al.* (2017) en una investigación con estudiantes de 4º a 8º grado en China, mostraron que también transitaron desde un uso abusivo de las estrategias aditivas a un uso abusivo de las estrategias proporcionales. El cruce de este uso abusivo se dio entre 5º y 6º grado al igual que con los estudiantes belgas. La explicación que dieron los autores fue que en el currículum de China el razonamiento proporcional aparece antes. Además, mostraron una tendencia diferente y es que a partir de 6º grado también comenzó a disminuir el uso de las estrategias proporcionales en los problemas aditivos, por lo que los estudiantes de los últimos grados que participaron en China resolvieron mejor los problemas que los estudiantes del estudio de España y Bélgica. Los autores explicaron este hecho por el "aprendizaje repetitivo del currículum de China" que podría mejorar las habilidades de resolución de problemas.

Además, estas investigaciones previas sobre el fenómeno han mostrado que el tipo de razón/relación multiplicativa (enteras o no enteras) influye en el uso de estrategias aditivas o proporcionales (Fernández y Llinares, 2011; Karplus *et al.*, 1983; Piskin Tunç, 2020; Steinthorsdottir, 2006; Van Dooren *et al.*, 2009). Así, se ha mostrado que, si las relaciones multiplicativas entre las cantidades son enteras (independientemente de si la situación es proporcional o aditiva), los estudiantes tienden a usar más las estrategias proporcionales. Si las relaciones multiplicativas entre las cantidades son no enteras, los estudiantes tienden a usar más las estrategias aditivas independientemente también de la situación (Fernández y Llinares, 2012; Jiang *et al*., 2017; Van Dooren *et al*., 2010).

Otra variable que parece influir en la resolución de problemas proporcionales es la naturaleza discreta o continua de las cantidades (Harel y Behr, 1989; Lo y Watanabe, 1997; Moss y Case, 1999), aunque no todos los resultados obtenidos en estudios previos apuntan en la misma dirección. Vanluydt *et al.* (2020) mostraron que los problemas proporcionales en los que las cantidades eran discretas eran más fáciles de resolver para estudiantes de 5 a 9 años que aquellos en los que las cantidades eran continuas. Tourniaire y Pulos (1985) también indicaron que los estudiantes pueden visualizar más fácilmente las situaciones proporcionales con cantidades discretas que con continuas ya que las primeras favorecen la resolución del problema mediante técnicas de agrupamiento. Sin embargo, otros estudios han mostrado que los estudiantes tienen mayor nivel de éxito en situaciones proporcionales con cantidades continuas (Begolli *et al*., 2020; Boyer *et al*., 2008; Hurst y Cordes, 2018; Jeong *et al*., 2007; Spinillo y Bryant, 1999). Por otra parte, Fernández *et al.* (2012) mostraron que los estudiantes usaron más las relaciones multiplicativas con cantidades discretas que con cantidades continuas independientemente del tipo de situación (proporcional o aditiva). Sin embargo, Jiang *et al.* (2017), con estudiantes de China y con el mismo instrumento que Fernández *et al.* (2012), no encontraron diferencias significativas en cuanto a la naturaleza de las cantidades.

Estos estudios han puesto de manifiesto que el fenómeno o tendencias identificadas pueden ser una característica del desarrollo del razonamiento proporcional, ya que se han mostrado presentes en diferentes investigaciones. Seguir explorando estas tendencias en contextos o países diferentes puede ser relevante para seguir obteniendo información sobre el desarrollo del razonamiento proporcional a lo largo de los grados. Por otro lado, destacamos que la influencia de la variable *naturaleza de las cantidades* en el uso de las estrategias aditivas y proporcionales en los problemas aditivos y proporcionales no está clara. Este hecho también subraya la necesidad de conducir más estudios para explorar esta variable. Finalmente, en el contexto de Ecuador, no se han encontrado investigaciones centradas en la resolución de problemas aditivos y proporcionales. Sin embargo, Ecuador participó en 2017 en el Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes para el Desarrollo (PISA-D) de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos) obteniendo resultados preocupantes para la competencia matemática.

Desde este contexto, realizar un estudio centrado en cómo estudiantes de Ecuador de 6º a 10º grados resuelven problemas proporcionales y aditivos es relevante por dos motivos: (I) seguir explorando cómo se desarrolla el razonamiento proporcional y obtener más información acerca de las tendencias y el efecto de variables y (II) para el contexto de Ecuador puede dar información relevante para el desarrollo de los currículums de Educación Básica Media y Educación Básica Superior y para el diseño de cursos de formación de profesores.

Objetivo y preguntas de investigación

El objetivo de investigación es explorar cómo los estudiantes de Ecuador de entre 11 y 16 años resuelven problemas proporcionales y aditivos de valor ausente, y cómo influyen las variables *tipo de razón* y *naturaleza de las cantidades*. Las preguntas de investigación son:

- ¿Qué estrategias (proporcionales o aditivas) usan los estudiantes al resolver problemas proporcionales de valor ausente y aditivos a lo largo de la Educación Básica Media (6º y 7º grado) y Superior (8º, 9º y 10º grado)?
- ¿Cómo influyen las variables *tipo de razón* y *naturaleza de las cantidades* en el uso de estas estrategias?

MÉTODO

Participantes

Fueron 360 estudiantes: 144 de Educación Básica Media (EBM, 11-13 años; 72 de 6º grado y 72 de 7º grado) y 216 de Educación Básica Superior (EBS, 13-16 años; 73 de 8º grado, 73 de 9º grado y 70 de 10º grado). Los de EBM provenían de centros municipales (centros administrados por los municipios) y los de EBS de centros de educación pública (centros en los que el Estado tiene total responsabilidad). Estos centros educativos están situados en la ciudad de Quito y las familias, cuyos hijos van a los centros participantes, son de clase media y baja.

Los contenidos de proporcionalidad forman parte del programa de Matemáticas que se imparte en los grados de 6º y 7º de la Educación General Básica Media y los grados de 8º a 10º de la Educación General Básica Superior y se recogen en el currículo de la Educación General Superior, Ley Orgánica de Educación Intercultural (LOEI), Acuerdo Ministerial Nro. MINEDUC-ME-2016-00020-A, establecido para todo el Sistema Nacional de Ecuador y, específicamente, para la provincia de Pichincha, donde se recogió la información. Durante la EBM, en 6º grado, se desarrollan los contenidos de proporcionalidad directa, de fracciones y decimales, y porcentajes, y en 7º grado los contenidos de razones y proporciones, proporcionalidad directa e inversa, regla de tres compuesta, problemas sobre proporcionalidad directa e inversa, y repartos proporcionales directos. Durante la EBS, en 8º grado, se desarrollan los contenidos de proporcionalidad directa e inversa. En 9º grado se trabaja la proporcionalidad directa junto al estudio de las funciones lineales y afines, y ejemplos de aplicaciones. En 10º grado no se trabajan contenidos específicos sobre proporcionalidad, pero aparecen funciones lineales y afines.

Instrumento

Se usó el cuestionario diseñado por Fernández y Llinares (2011; 2012), que tenía el mismo objetivo que este estudio y consta de 12 problemas: ocho problemas experimentales (Tabla 1) y cuatro problemas distractores. De los ocho problemas experimentales, cuatro problemas son proporcionales (P) y cuatro problemas son aditivos (A). Estos problemas fueron adaptados al contexto de Ecuador, únicamente en cuanto al contexto utilizado (e.g., "montaña de los Andes").

Los problemas experimentales tienen formato de valor ausente y se diferencian en una frase. En las situaciones proporcionales aparece la frase "Empezaron al mismo tiempo, pero XXX es más rápido/ más lento" y en las situaciones aditivas aparecía la frase "[una acción] a la misma velocidad, pero XXX empezó más tarde/ empezó antes". Dos de los problemas proporcionales tienen cantidades discretas (D) (con razones internas y externas enteras, D-I, y con razones internas y externas no enteras, D-N) y los otros dos tienen cantidades continuas (C) (con razones internas y externas enteras, C-I, y con razones internas y externas no enteras, C-N). Dos de los problemas aditivos tienen cantidades discretas (D) (con relaciones internas y externas enteras, D-I, y con relaciones internas y externas no enteras, D-N) y los otros dos tienen cantidades continuas (C) (con relaciones internas y externas enteras, C-I, y con relaciones internas y externas no enteras, C-N).

Los problemas distractores son formulados de manera que se mantienen lo más parecido posible a los problemas experimentales, pero con una estructura diferente. Tal y como justifican Fernández y Llinares (2012), estos problemas se incorporan para evitar los efectos de aprendizaje y respuestas estereotipadas. Un ejemplo es: *Julia y Álvaro están construyendo una torre cada uno con las piezas de Lego. Construyeron una torre de la misma longitud, pero Julia usó más bloques que Álvaro. Julia usó 4 veces el número de bloques de Álvaro. Si Álvaro usó 17 bloques, ¿cuántos bloques usó Julia?* Este problema es de estructura multiplicativa de comparación creciente donde la incógnita es la cantidad comparada.

Las respuestas de los participantes a los ocho problemas experimentales son los datos que conforman esta investigación.

Tabla 1. Problemas experimentales del cuestionario

	Problemas Proporcionales (P)		Problemas Aditivos (A)
P-D-I	Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Empezaron al mismo tiempo, pero Tomás es más rápido. Cuando Pedro ha cargado 6 cajas, Tomás ha cargado 12 cajas. Si Pedro ha cargado 24 cajas, ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?	A-D-I	Laura y Luis están pegando sellos en postales. Pegan a la misma velocidad, pero Laura empezó más tarde. Cuando Laura ha pegado 12 sellos, Luís ha pegado 36 sellos. Si Laura ha pegado 24 sellos, ¿cuántos sellos ha pegado Luís?
P-D-N	Ana y David están elaborando piñatas. Empezaron al mismo tiempo, pero Ana es más lenta. Cuando Ana ha elaborado 50 piñatas, David ha elaborado 70 piñatas. Si Ana ha elaborado 125 piñatas, ¿cuántas piñatas ha elaborado David?	A-D-N	Raquel y Juan están plantando flores. Plantan a la misma velocidad, pero Juan empezó antes. Cuando Raquel ha plantado 20 flores, Juan ha plantado 30 flores. Si Raquel ha plantado 50 flores, ¿cuántas flores ha plantado Juan?
P-C-I	Sofía y Sara están caminando por el parque la Carolina. Empezaron al mismo tiempo, pero Sara es más rápida. Cuando Sofía ha caminado 15 metros, Sara ha caminado 60 metros. Si Sofía ha caminado 45 metros, ¿cuántos metros ha caminado Sara?	A-C-I	María y Pablo están nadando. Nadan a la misma velocidad, pero Pablo empezó antes. Cuando María ha nadado 30 metros, Pablo ha nadado 60 metros. Si María ha nadado 90 metros, ¿cuántos metros ha nadado Pablo?
P-C-N	Pablo y Tomás están escalando una montaña de los Andes. Empezaron a la vez, pero Pablo es más lento. Cuando Pablo ha escalado 12 metros, Tomás ha escalado 30 metros. Si Pablo ha escalado 18 metros, ¿cuántos metros ha escalado Tomás?	A-C-N	Cristina y Alberto están en una competencia de ciclismo. Compiten a la misma velocidad, pero Cristina empezó más tarde. Cuando Cristina ha recorrido 24 km, Alberto ha recorrido 36 km. Si Cristina ha recorrido 60 km, ¿cuántos km. ha recorrido Alberto?

Fuente: elaboración propia.

Los estudiantes resolvieron los problemas durante el transcurso de su clase diaria de matemáticas (45 minutos aproximadamente). Se tuvo el apoyo de las autoridades a quienes se les solicitó el respectivo permiso para aplicar este cuestionario. Fueron los propios profesores de matemáticas, de cada institución educativa, los que pasaron los cuestionarios tras haber recibido las indicaciones oportunas por parte de los investigadores y los consentimientos informados pertinentes.

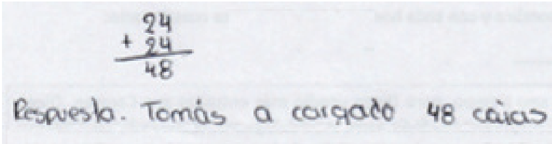
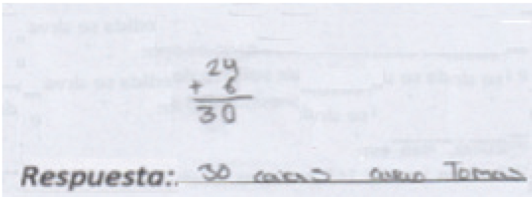
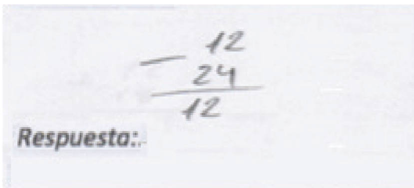
Análisis

En primer lugar, identificamos si los estudiantes empleaban estrategias proporcionales (enfoque escalar, enfoque funcional, reducción a la unidad, estrategias constructivas o regla de tres), estrategias aditivas u otras estrategias incorrectas (sin sentido o en blanco). El uso de estrategias proporcionales es correcto en los problemas proporcionales, pero incorrecto en los problemas aditivos. El uso de las estrategias aditivas es correcto en los problemas aditivos pero incorrecto en los problemas proporcionales. La tabla 2 ejemplifica la identificación del uso de las diferentes estrategias en un problema proporcional y la tabla 3 en un problema aditivo.

Posteriormente, se realizaron tres modelos de regresión logística de medidas repetidas usando el software SPSS25, utilizando el método de estimación de ecuaciones generalizado (GEE). Las variables necesarias para el análisis de regresión logística de medidas repetidas fueron codificadas en los siguientes términos. La variable ‘uso de estrategias proporcionales’ fue codificada por ‘Prop’; la variable ‘uso de estrategias aditivas’ por ‘Add’ y la variable ‘otras estrategias incorrectas’ por ‘Otras’. De esta manera, el uso de una determinada estrategia en un problema fue codificado con un 1 y el no uso con el valor 0. Por ejemplo, si un estudiante usaba una estrategia aditiva en un problema, se codificada la variable ‘Add’ con un 1, y las variables ‘Prop’ y ‘Otras’ con un 0. El primer modelo predecía la variable dependiente uso de una estrategia proporcional (Prop) por medio de las variables independientes ‘grado’ (6º, 7º, 8º, 9º y 10º), ‘tipo de problema’ (proporcional o aditivo), ‘tipo de razón’ (entera o no entera) y ‘naturaleza de las cantidades’ (discreta o continua). Los otros dos modelos estadísticos de regresión logística predecían, análogamente, las variables dependientes uso de una estrategia aditiva (Add) y uso de otras estrategias incorrectas (Otras).

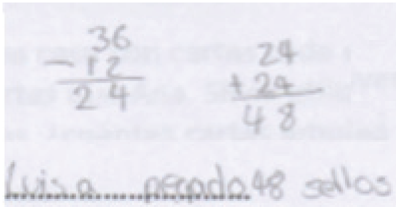
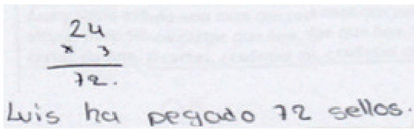
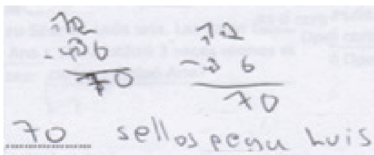
Tabla 2. Identificación del uso de las diferentes estrategias en los problemas proporcionales

Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Empezaron al mismo tiempo, pero Tomás es más rápido. Cuando Pedro ha cargado 6 cajas, Tomás ha cargado 12 cajas. Si Pedro ha cargado 24 cajas, ¿Cuántas cajas ha cargado Tomás?

Estrategia proporcional (correcta)	**Ejemplo**
Identifica una relación multiplicativa (estrategia constructiva). El estudiante se da cuenta de que la relación entre las cajas cargadas por Pedro y Tomás es del doble ($6 + 6 = 12$) y la utiliza para obtener las cajas de Tomás ($24 + 24 = 48$).	
Estrategia aditiva (incorrecta)	**Ejemplo**
Identifica una relación aditiva. El estudiante identifica que la relación entre las cajas cargadas por Pedro y Tomás es aditiva –con una diferencia de 6 cajas ($12 - 6 = 6$). Utiliza esta diferencia para obtener las cajas de Tomás ($24 + 6 = 30$).	
Otras estrategias incorrectas (sin sentido)	**Ejemplo**
Hace una resta sin sentido para resolver el problema.	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 3. Identificación del uso de las diferentes estrategias en los problemas aditivos

<table>
<tr><td colspan="2">Laura y Luis están pegando sellos en postales. Pegan a la misma velocidad, pero Laura empezó más tarde. Cuando Laura ha pegado 12 sellos, Luís ha pegado 36 sellos. Si Laura ha pegado 24 sellos, ¿cuántos sellos ha pegado Luís?</td></tr>
<tr><th>Estrategia aditiva (correcta)</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Identifica una relación aditiva. El estudiante identifica que la relación entre los sellos pegados por Laura y Luis es aditiva –con una diferencia de 24 sellos (36 – 12 =24). Utiliza esta diferencia para obtener los sellos pegados por Luis (24 + 24 = 48)</td><td>
</td></tr>
<tr><th>Estrategia proporcional (incorrecta)</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Identifica una relación multiplicativa (enfoque funcional). El estudiante identifica que la relación entre los sellos pegados por Laura y Luis es del triple (12 × 3 = 36) y la utiliza para obtener los sellos pegados por Luis (24 × 3 = 72).</td><td>
</td></tr>
<tr><th>Otras estrategias incorrectas (sin sentido)</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Hace operaciones sin sentido.</td><td>
</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

RESULTADOS

Los resultados están organizados en tres subsecciones. En la primera, mostramos el uso de las estrategias aditivas y proporcionales en cada tipo de problema a lo largo de los grados. En la segunda, mostramos los resultados con relación a la influencia del tipo de razón/relación multiplicativa (entera o no entera) en el uso de las estrategias aditivas y proporcionales, y finalmente presentamos los resultados respecto a la influencia de la naturaleza de las cantidades (discreta o continua) en el uso de estas estrategias.

Uso de las estrategias aditivas y proporcionales por los estudiantes a lo largo de los grados

La figura 1 muestra el uso de las estrategias (proporcionales, aditivas y otras) en los problemas proporcionales. El análisis estadístico mostró un efecto significativo de la interacción 'grado' × 'tipo de problema' en el uso de las estrategias proporcionales, $\chi^2(4, N=360)=13.794$, $p<0.001$. Se observa un incremento significativo en el uso de las estrategias proporcionales desde 1.0% en 6º grado hasta 13.5% en 7º grado de EBM. Sin embargo, el uso de esta estrategia disminuyó significativamente hasta 8.2% en 10º grado de EBS, coincidiendo con la transición de la EBM a la EBS. Posteriormente, el porcentaje de uso de esta estrategia se mantiene constante durante la EBS no siendo significativas las diferencias entre 8º y 9º (8.9% *vs.* 6.8%) ni entre 9º y 10º (6.8% *vs.* 8.2%).

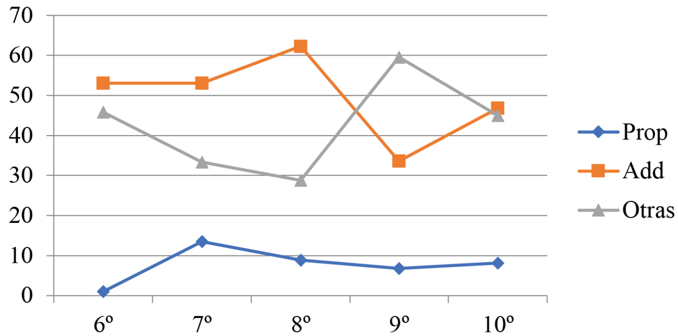


Figura 1. Problemas proporcionales: Uso de las estrategias proporcionales (Prop), aditivas (Add) y otras (Otras) a lo largo de los grados. Fuente: elaboración propia.

Respecto al uso de las estrategias aditivas incorrectas en los problemas proporcionales, el análisis estadístico mostró también un efecto significativo de la interacción 'grado' × 'tipo de problema' en el uso de las estrategias aditivas, $\chi^2(4, N=360)=13.735$, $p=0.008$. En este caso, hubo un aumento significativo entre 7º y 8º grado (53.1% *vs.* 62.3%), posteriormente disminuyó significativamente entre 8º y 9º grado (62.3% *vs.*33.6%), y aumentó entre 9º y 10º grado (33.6% *vs.* 46.8%) siendo esta diferencia también significativa.

Finalmente, el análisis estadístico también mostró un efecto significativo de la interacción 'grado' × 'tipo de problema' en el uso de otras estrategias incorrectas (sin sentido o en blanco), $\chi^2(4, N=360)=92.301$, $p<0.001$. Por tanto, la disminución entre 6º y 7º grado y entre 7º y 8º grado del uso de otras estrategias incorrectas fue significativa. Después hubo un aumento significativo de uso entre 8º y 9º grado y una disminución significativa de 9º a 10º grado. Es decir, la disminución del uso de las estrategias aditivas incorrecta en los problemas proporcionales en 9º grado se convirtió en un aumento de otras estrategias incorrectas, en lugar de en un uso de las estrategias proporcionales.

La figura 2 muestra el uso de las distintas estrategias (aditivas, proporcionales y otras) en los problemas aditivos. Al igual que en los problemas proporcionales, el análisis estadístico también mostró un efecto significativo de la interacción 'grado' × 'tipo de problema' en el uso de las estrategias aditivas correctas, $\chi^2(4, N=360)=13.735$, $p=0.001$, en el uso de las estrategias proporcionales incorrectas, $\chi^2(4, N=360)=13.794$, $p<0.001$ y en el uso de otras estrategias incorrectas, $\chi^2(4, N=360)=92.301$, $p<0.001$. El uso de la estrategia aditiva aumentó de 6º a 8º grado (51.4% en 6º grado *vs.* 72.9% en 8º grado) siendo esta diferencia significativa. También fueron significativas la disminución de su uso de 8º a 9º grado (72.9% *vs.* 43.5%) y el aumento de 9º a 10º grado (56.4% en 10º grado). Además, el uso de las estrategias proporcionales (incorrectas en los problemas aditivos) aumentó de 2.1% en 6º grado a 11.5% en 7º grado (siendo esta diferencia significativa), mientras que disminuyó significativamente entre 7º y 8º grado (11.5% *vs.* 4.5%) y aumentó de 8º a 9º grado (8.9%), siendo esta diferencia también significativa.

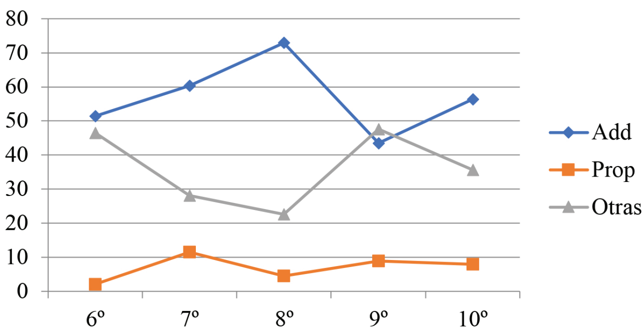


Figura 2. Problemas aditivos: Uso de las estrategias aditivas (Add), proporcionales (Prop) y otras (Otras) a lo largo de los grados. Fuente: elaboración propia.

El uso de otras estrategias incorrectas (sin sentido y en blanco), en los problemas aditivos, disminuyó de 6º a 8º grado siendo esta diferencia significativa. Posteriormente, aumentó significativamente de 8º a 9º grado y, disminuyó de 9º a 10º. Es decir, en los problemas aditivos, el descenso en el uso de las estrategias aditivas de 8º a 9º grado se convirtió en un aumento de otras estrategias incorrectas.

En resumen, los resultados muestran un uso constante de las estrategias proporcionales, tanto en problemas proporcionales como aditivos (figuras 1 y 2), siendo su uso muy bajo en los problemas proporcionales al final de la EBS (figura 1). Por otro lado, se observa un aumento en el uso de las estrategias aditivas en los problemas aditivos desde 6º a 8º grado que coincide con un aumento del uso, incorrecto, de esta estrategia en los problemas proporcionales. Además, el uso de las estrategias aditivas disminuye de 8º a 9º grado, tanto en los problemas proporcionales como aditivos, sin embargo, esta disminución no viene acompañada de un aumento de la de las estrategias proporcionales, sino por el uso de otras estrategias incorrectas.

Influencia de la variable tipo de razón/relación multiplicativa (entera o no entera) en el uso de las estrategias

La tabla 4 muestra los porcentajes de uso de las estrategias proporcionales y aditivas en los problemas proporcionales con razones enteras y no enteras y en los problemas aditivos con relaciones multiplicativas enteras y no enteras. El análisis estadístico mostró que la variable ‘tipo de razón’ influye significativamente en el uso de las estrategias proporcionales ($\chi^2(1, N=360)=105.649$, $p<0.001$) y en el uso de las estrategias aditivas ($\chi^2(1, N=360)=93.224$, $p<0.001$). Globalmente, los estudiantes usaron más las estrategias proporcionales con las razones/relaciones multiplicativas enteras (12.9%, I *vs.* 1.8%, N) siendo esta diferencia significativa y usaron más estrategias aditivas con las razones/relaciones multiplicativas no enteras (47.6%, I *vs.* 59.1%, N) siendo esta diferencia significativa.

Aunque el análisis estadístico no mostró un efecto significativo de la interacción ‘tipo de razón’ × ‘tipo de problema’ en el uso de las estrategias aditivas o proporcionales, se observa que los estudiantes, a lo largo de la EBM y EBS, usaron más las estrategias proporcionales en los problemas proporcionales con razones enteras que en los problemas proporcionales con razones no enteras (13.9%, P-I *vs.* 1.5%, P-N). En los problemas aditivos también usaron más las estrategias proporcionales (incorrecta) con relaciones multiplicativas enteras que con relaciones no enteras (11.9%, A-I *vs.* 2.0%, A-N).

Tabla 4. Porcentaje de uso de las estrategias proporcionales y aditivas en los problemas proporcionales (P) y problemas aditivos (A) con razones/relaciones multiplicativas enteras (I) y no enteras (N) 0

	Uso de estrategias proporcionales					Uso de estrategias aditivas			
Problema	P		A			P		A	
Grado	I	N	I	N	**Grado**	I	N	I	N
6º	2.1	0.0	2.8	1.4	**6º**	48.6	57.6	47.2	55.6
7º	25.0	2.1	20.1	2.8	**7º**	41.0	65.3	48.6	72.2
8º	17.1	0.7	8.9	0.0	**8º**	57.5	67.1	66.4	79.5
9º	11.0	2.7	15.1	2.7	**9º**	32.9	34.2	42.5	44.5
10º	14.3	2.1	12.9	2.9	**10º**	39.3	54.3	52.1	60.7
Total	**13.9**	**1.5**	**11.9**	**2.0**	**Total**	**43.9**	**55.7**	**51.4**	**62.5**

Fuente: elaboración propia.

Por otra parte, los estudiantes usaron más las estrategias aditivas en los problemas aditivos con relaciones multiplicativas entre las cantidades no enteras que en los aditivos con relaciones multiplicativas enteras (62.5%, A-N *vs.* 51.4%, A-I). También en los problemas proporcionales usaron más las estrategias aditivas cuando incluían razones no enteras que cuando incluían razones enteras (55.7%, P-N *vs.* 43.9%, P-I).

Estos datos indican que, con razones o relaciones multiplicativas enteras entre las cantidades, los estudiantes, independientemente de si el problema es aditivo o proporcional, tienden a usar estrategias proporcionales. Este comportamiento lleva al estudiante a proporcionar respuestas correctas en los problemas proporcionales, pero respuestas incorrectas en los problemas aditivos. Sin embargo, con razones o relaciones multiplicativas no enteras los estudiantes usan las estrategias aditivas en los problemas aditivos, de manera correcta, pero también en los problemas proporcionales, donde esta estrategia es incorrecta. Este comportamiento se dio en todos los grados de EBM y EBS.

Influencia de la variable naturaleza de las cantidades (discretas o continuas) en el uso de las estrategias

La tabla 5 muestra el porcentaje de uso de las relaciones multiplicativas y aditivas en los problemas proporcionales con cantidades continuas y discretas y en los problemas aditivos con cantidades continuas y discretas

Tabla 5. Porcentaje de uso de las estrategias proporcionales y aditivas en los problemas proporcionales y aditivos con cantidades discretas (D) o continuas (C) a lo largo de los grados

	Uso de estrategias proporcionales					Uso de estrategias aditivas			
Problema	**P**		**A**			**P**		**A**	
Grado	D	C	D	C	**Grado**	D	C	D	C
6º	2.1	0.0	0.0	4.2	**6º**	61.1	45.1	43.8	59.0
7º	18.1	9.0	10.4	12.5	**7º**	58.3	47.9	57.6	63.2
8º	13.0	4.8	2.7	6.2	**8º**	67.8	56.8	68.5	77.4
9º	8.9	4.8	9.6	8.2	**9º**	37.7	29.5	45.2	41.8
10º	10.7	5.7	5.7	10.0	**10º**	50.0	43.6	54.3	58.6
Total	**10.6**	**4.9**	**5.7**	**8.2**	**Total**	**55.0**	**44.6**	**53.9**	**60.0**

Fuente: elaboración propia.

El análisis de regresión logística mostró que la interacción 'tipo de problema' × 'naturaleza de las cantidades' influía en el uso de las estrategias proporcionales ($\chi^2(1, N=360)=70.318$, $p=0.001$) y en el uso de las estrategias aditivas ($\chi^2(1,N=360)=45.487$, $p=0.001$). Los estudiantes usaron más las estrategias proporcionales en los problemas proporcionales con cantidades discretas que con cantidades continuas (10.6%, P-D *vs.* 4.9%, P-C), siendo esta diferencia significativa. Sin embargo, esta tendencia se invirtió en los problemas aditivos donde usaron más las estrategias proporcionales incorrectas en los problemas con cantidades continuas que con cantidades discretas (5.7%, A-D *vs.* 8.2%, A-C), siendo esta diferencia también significativa.

Por otra parte, los estudiantes usaron más las estrategias aditivas en los problemas aditivos con cantidades continuas que en los aditivos con cantidades discretas (60.0%, A-C *vs.* 53.9%, A-D), siendo esta diferencia significativa. Sin embargo, esta tendencia se invierte en los problemas proporcionales. Los estudiantes usaron más las estrategias aditivas incorrecta en los problemas proporcionales con cantidades discretas que en los proporcionales con cantidades continuas (55.5%, P-D *vs.* 44.6%, P-C), siendo esta diferencia significativa.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio es explorar cómo estudiantes de Ecuador de EBM y EBS resuelven problemas proporcionales y aditivos de valor ausente y cómo influyen las variables tipo de razón (razones/relaciones multiplicativas enteras) y naturaleza de las cantidades (discretas/continuas).

Nuestros resultados señalan que, en los problemas proporcionales, hubo un incremento en el uso de las estrategias proporcionales (correcta en estos problemas) de 6º a 7º grado (11-12 años). Sin embargo, su uso disminuyó ligeramente y permaneció constante (aproximadamente 10%) a lo largo de la EBS (8º a 10º grado; 13-15 años). Estos resultados difieren de los obtenidos en estudios anteriores donde el uso de las estrategias proporcionales en problemas proporcionales era superior, y aumentaba progresivamente desde 6º a 10º grado. En el estudio de Fernández *et al.* (2012), con estudiantes de España, el uso de estrategias proporcionales en 10º grado (15-16 años) fue de más del 70% y en Jiang *et al.* (2017), con estudiantes de China en 8º grado (13-14 años) fue del 60%.

El uso de estrategia aditiva incorrecta en los problemas proporcionales también aumentó de 6º a 8º grado y disminuyó de 8º a 9º Sin embargo, esta disminución no comportó un aumento del uso de las estrategias proporcionales sino un aumento de otras estrategias incorrectas. Este resultado parece indicar que cuando los estudiantes dejan de usar las estrategias aditivas en situaciones proporcionales, no tienen estrategias o procedimientos que les permitan resolver los problemas proporcionales. Este resultado podría estar vinculado con la distribución curricular de los contenidos de proporcionalidad durante la EBM y EBS en Ecuador pues, a partir de 8º grado, los contenidos como razón, proporción, problemas de proporcionalidad directa e inversa no aparecen en el currículum. Sin embargo, los estudiantes parecen seguir teniendo muchas dificultades con estos contenidos, ya que únicamente alrededor de un 10% de los estudiantes de 10º grado usaron estrategias proporcionales en los problemas proporcionales.

En los problemas aditivos, el uso de la estrategia aditiva (correcta en estos problemas) aumentó de 6º a 8º. Sin embargo, de 8º a 9º disminuyó su uso y aumentó el uso de otras estrategias incorrectas. Es decir, la disminución del uso de las estrategias aditivas no se corresponde con el aumento del uso de estrategias proporcionales incorrectas (permanecen constantes a lo largo de los grados) sino con un aumento de otras estrategias incorrectas. Este resultado es relevante pues difiere de los obtenidos en estudios previos donde, en los problemas aditivos, se transitaba desde el uso correcto de las estrategias aditivas al uso incorrecto de estrategias proporcionales (Fernández *et al.*, 2012; Jiang *et al.*, 2017; Van Dooren *et al.*, 2009, 2010).

Estos resultados muestran que el fenómeno, desde un uso indiscriminado de las estrategias aditivas a un uso indiscriminado de estrategias proporcionales, observado en Bélgica, España y China, no se identifica en el contexto de Ecuador. Los estudiantes de esta investigación hicieron un uso indiscriminado de las estrategias aditivas en los primeros grados, pero no transitan a un uso indiscriminado de las estrategias proporcionales. Aunque somos conscientes de que los datos de esta investigación no permiten conocer el porqué, una posible explicación de esta diferencia puede ser que el currículum de Ecuador no tiene tanta presencia del algoritmo de la regla de tres. En los estudios de Fernández y Llinares (2012), y Jiang *et al.* (2017), aunque este cambio se producía en diferentes grados, coincidía con el momento en el que se introducen de manera más sistemática la aproximación algorítmica para resolver los problemas denominados "de regla de tres".

Con respecto a la influencia de la variable tipo de razón (presencia de razones/relaciones multiplicativas enteras), el análisis mostró que, globalmente, las razones/relaciones multiplicativas enteras inducían a los estudiantes, tanto de EBM como EBS, al uso de estrategias proporcionales y las razones/relaciones multiplicativas no enteras inducían a los estudiantes al uso de estrategias aditivas. En los problemas proporcionales de valor ausente, los estudiantes tienen que construir una unidad de referencia (primera razón) y calcular el dato que falta en la situación en términos de esta unidad (segunda razón). Con razones no enteras, los estudiantes tienen dificultades para descubrir un múltiplo entero en la primera razón (e.g, doble, triple, ...) que les ayude a encontrar la segunda razón, provocando el uso de estrategias aditivas y, por tanto, mayor éxito en los problemas proporcionales con razones enteras que con razones no enteras. Estos resultados concuerdan con los obtenidos en investigaciones previas para problemas proporcionales: los estudiantes tuvieron mayor éxito con razones enteras que con razones no enteras (Cramer *et al.*, 1993; Jiang *et al.*, 2017; Steinthorsdottir, 2006; Van Dooren *et al.*, 2009). También apoyan los obtenidos con respecto al éxito en los problemas aditivos: los estudiantes tuvieron más éxito en los problemas aditivos con relaciones multiplicativas no enteras que con relaciones enteras (Fernández *et al.*, 2012; Jiang *et al.*, 2017; Van Dooren *et al.*, 2009).

Los resultados sobre el impacto de la variable naturaleza de las cantidades muestran diferencias significativas en cuanto al tipo de problema, al extender los obtenidos por Fernández *et al.* (2012): en los problemas proporcionales, los estudiantes usaron más las estrategias proporcionales en los problemas con cantidades discretas que en los problemas con cantidades continuas. Sin embargo, esta tendencia se invierte en los problemas aditivos, donde los estudiantes usaron más las estrategias proporcionales incorrectas en los problemas con cantidades continuas que con cantidades discretas. En los problemas aditivos, los estudiantes usaron más las estrategias aditivas con cantidades continuas que con cantidades discretas. Esta tendencia también se invirtió en los problemas proporcionales donde los estudiantes usaron más las estrategias aditivas incorrecta en los problemas proporcionales con cantidades discretas que en los proporcionales con cantidades continuas.

Estos resultados difieren de las evidencias aportadas por Boyer y Levin (2015) y Jeong *et al.* (2007), ambos con niños entre 6 y 10 años, que tuvieron más dificultad en resolver problemas proporcionales cuando las proporciones incluían cantidades discretas que cuando incluían cantidades continuas. Estas discrepancias podrían explicarse por el tipo de problemas usados en estas últimas investigaciones: problemas de comparación numérica (las razones son dadas y tienen que ser comparadas) en lugar de los problemas de valor ausente empleados en este estudio y en el de Fernández *et al.* (2012).

Estos resultados señalan cómo las características específicas de los problemas, por ejemplo, que sean de valor ausente o de comparación numérica parecen influir en el impacto de la variable naturaleza de las cantidades sobre las estrategias usadas por los estudiantes. En futuras investigaciones sería interesante considerar un estudio que incluyera no solo problemas de valor ausente sino otros tipos de problemas para analizar el impacto de estas variables.

Implicaciones para la enseñanza

Nuestros resultados tienen implicaciones en el currículum y en la enseñanza de la proporcionalidad en el contexto de Ecuador. Que los estudiantes, a lo largo de la EBM y EBS, transiten al uso de otras estrategias incorrectas al dejar de usar indiscriminadamente las estrategias aditivas parece indicar que: (I) inicialmente, entre los grados 6º a 8º los estudiantes no diferencian las situaciones proporcionales de las aditivas, ya que usan las estrategias aditivas en ambas situaciones y, (II) cuando parece que consiguen diferenciarlas (al no usar estrategias aditivas en las situaciones proporcionales) no disponen de estrategias para resolver los problemas proporcionales.

Para apoyar la diferenciación de las situaciones, la instrucción debería focalizarse en la identificación de las relaciones entre las cantidades (aditivas o multiplicativas). El currículum debería presentar situaciones proporcionales y no proporcionales y generar oportunidades a los estudiantes para diferenciarlas centrándose en la estructura matemática del problema, es decir, en las relaciones entre las cantidades (Kaput y West, 1994). Usar situaciones reales puede ayudar a identificar y reconocer las relaciones multiplicativas y así diferenciar las situaciones proporcionales de las aditivas. En este sentido, el uso desde la EBM (cuando se introducen los conceptos de razón y proporción) de tablas de números proporcionales y no proporcionales en contextos reales puede apoyar la comprensión de los estudiantes del comportamiento de las relaciones entre las cantidades (Lamon, 1999; Singer *et al.*, 1997). Además, el uso de tablas de números proporcionales podría ayudar a la generación de aproximaciones constructivas para resolver los problemas proporcionales.

Por otra parte, la influencia mostrada de las variables tipo de razón y naturaleza de las cantidades parece mostrar que los estudiantes aplican procedimientos que, al menos parcialmente, se basan en asociaciones superficiales (como, por ejemplo, tener cantidades discretas o tener razones enteras) sin tener en cuenta la estructura matemática del problema. Esto pone de manifiesto la necesidad de usar diferentes tipos de razones (enteras y no enteras) al introducir la idea de razón. Además, es necesario utilizar problemas con cantidades continuas y discretas. Utilizar problemas proporcionales con cantidades discretas en los que la solución sea no entera (problemas no utilizados en nuestra investigación) puede ser interesante para la discusión en clase de por qué su solución o algunos de los pasos intermedios no tienen significado en la vida real. Para discutir estos ejemplos, los estudiantes necesitarían desarrollar un entendimiento más abstracto de las relaciones multiplicativas con las que están tratando.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación se ha realizado dentro del proyecto PROMETEO/2017/135 subvencionado por la Conselleria d'Ecucació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana, España).

REFERENCIAS

Begolli, K. N., Booth, J. L., Holmes, C. A., y Newcombe, N. S. (2020). How many apples make a quarter? The challenge of discrete proportional formats. *Journal of Experimental Child Psychology*, *192*, 104774. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2019.104774

Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Benedetto, C., y Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics*, *36*(3), 247-273. https://doi.org/10.1023/a:1003235712092

Boyer, T. W., y Levine, S. C. (2015). Prompting children to reason proportionally: Processing discrete units as continuous amounts. *Developmental Psychology, 51*(5), 615–620. https://doi.org/10.1037/a0039010

Boyer, T. W., Levine, S. C., y Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental Psychology, 44*(5), 1478–1490. https://doi.org/10.1037/a0013110

Cramer, K. A., Post, T., y Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications: Middle grades mathematics. En D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). Macmillan Publishing Company.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., y Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. Springer Science & Business Media.

Degrande, T., Verschaffel, L., y Van Dooren, W. (2020). To add or to multiply in open problems? Unraveling children's relational preference using a mixed-method approach. *Educational Studies in Mathematics*, *104*(3), 405-430. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09966-z

Fernández, C., y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje*, *34*(1), 67-80. https://doi.org/10.1174/021037011794390111

Fernández, C., y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(1), 129-142. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., y Verschaffel, L. (2011). Effect on number structure and nature of quantities on secondary school students' proportional reasoning". *Studia Psychologica*, *53*(1), 69-81.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., y Verschaffel, L. (2012). The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school. *European Journal of Psychology of Education, 27*(3), 421-438. https://doi.org/10.1007/s10212-011-0087-0

Freudenthal, H. (1999). Ratio and proportionality. En H. Freudenthal (Ed.), *Didactical phenomenology of mathematical structures* (pp. 178–209). Kluwer Academics Publishers.

Harel, G., y Behr, M. (1989). Structure and hierarchy of missing-value proportion problems and their representations. *Journal of Mathematical Behavior, 8*(1), 77-119.

Harel, G., y Confrey, J. (1994). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* State University of New York Press.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, (pp. 198-219). National Council of Teachers of Mathematics and Lawrence Erlbaum Associates.

Hurst, M. A., y Cordes, S. (2018). Attending to relations: Proportional reasoning in 3- to 6-year-old children. *Developmental Psychology, 54*(3), 428–439. https://doi.org/10.1037/dev0000440

Jeong, Y., Levine, S. C., y Huttenlocher, J. (2007). The development of proportional reasoning: Effect of continuous versus discrete quantities. *Journal of Cognition and Development, 8*(2), 237-256. https://doi.org/10.1080/15248370701202471

Jiang, R., Li, X., Fernández, C., Fu, X. (2017). Students' performance on missing-value word problems: a cross-national developmental study. *European Journal of Psychology of Education 32*, 551–570. https://doi.org/10.1007/s10212-016-0322-9

Kaput, J. y West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics,* (pp. 235-287). State University of New York Press.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 219-233. https://doi.org/10.1007/BF00410539

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics*, (pp. 89–120). State University of New York Press.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teacher.* Lawrence Erlbaum Associates.

Ley Orgánica de Educación Intercultural (LOEI), 17 de febrero de 2016, relativa a los currículos de educación general básica para los subniveles de preparatoria, elemental, media y superior; y, el currículo de nivel de bachillerato general unificado, con sus respectivas cargas horarias. *Acuerdo Ministerial Nro. MINEDUC-ME-2016-00020-A,* de 17 de febrero de 2016.

Lo, J., y Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(2), 216-236. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.28.2.0216

Misailidou, C., y Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 335-368. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00025-7

Modestou, M., y Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology, 27*(1), 75-92. https://doi.org/10.1080/01443410601061462

Moss, J., y Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122-147. https://doi.org/10.2307/749607

Pi̇şki̇n, M. (2020). Investigation of middle school students' solution strategies in solving proportional and non-proportional problems. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT), 11*(1), 1–14. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.560349

Siemon, D., Breed, M., y Virgona, J. (2005). From additive to multiplicative thinking: The big challenge of the middle years. En J. Mousley, L. Bragg y C. Campbell (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the Mathematical Association of Victoria,* (pp. 278– 286). Mathematical Association of Victoria.

Singer, J., Kohn, A., y Resnick, L. (1997). Knowing about proportions in different contexts. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics. An international perspective,* (pp.115-132). Psychology Press Ltd. Publishers.

Spinillo, A. G., y Bryant, P. E. (1999). Proportional reasoning in young children: Part-part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition, 5*(2), 181-197. https://doi.org/10.1080/135467999387298

Steinthorsdottir, O. (2006). Proportional reasoning: Variable influencing the problems difficulty level and one's use of problem solving strategies. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education vol. 5,* (pp. 169-176). PME.

Tourniaire, F., y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16,* 181-204.

Van Dooren, W., De Bock, D., y Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication... and back: The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction, 28*(3), 360-381. https://doi.org/10.1080/07370008.2010.488306

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M., y Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(2), 187-211. https://www.jstor.org/stable/40539331

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for

overgeneralization. *Cognition and instruction*, *23*(1), 57-86. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2301_3
Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., y Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(3), 311-342. https://doi.org/10.2307/30034972
Vanluydt, E., Degrande, T., Verschaffel, L., y Van Dooren, W. (2020). Early stages of proportional reasoning: a cross-sectional study with 5-to 9-year-olds. *European Journal of Psychology of Education*, *35*(3), 529-547. https://doi.org/10.1007/s10212-019-00434-8
Verschaffel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* (pp. 557–628). Information Age Publishing.

Autor de correspondencia
Pedro Ivars
Dirección: Universidad de Alicante. Facultad de Educación. Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Ctra. San Vicente del Raspeig s/n (03690) España
pere.ivars@ua.es