

Relaciones direccionales intra-dominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre localización en el plano

Intra-domain directional relationships of mathematics teacher's specialized knowledge about location in the plane

Ever Pacheco-Muñoz @ ¹, Estela Juárez-Ruiz @ ¹, Eric Flores-Medrano @ ²

¹ Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

² Universidad Complutense de Madrid (España)

Resumen ∞ La presente investigación se centra en identificar relaciones direccionales entre subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) involucrados en la enseñanza de la localización en el plano cartesiano. La metodología es de tipo cualitativa con un estudio de caso instrumental, con una profesora de matemáticas mexicana. La recolección de la información se basó en el diseño de una planeación de clase y una entrevista semiestructurada. En los resultados se encontró que la categoría dificultades en el aprendizaje de las matemáticas condicionó la emergencia de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Asimismo, las definiciones, propiedades y fundamentos del conocimiento de los temas condicionó la emergencia de conexiones auxiliares del conocimiento de la estructura de las matemáticas. Por último, las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático del conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas condicionó la emergencia de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Todas las relaciones encontradas fueron intra-dominio.

Palabras clave ∞ Conocimiento especializado del profesor de matemáticas; MTSK; Relaciones entre subdominios; Localización en el plano cartesiano; Enseñanza de la geometría

Abstract ∞ The present research focuses on identifying directional relationships between subdomains of mathematics teacher specialized knowledge (MTSK) involved in the teaching of location in the Cartesian plane. The methodology is qualitative, with an instrumental case study with a Mexican mathematics teacher. Data collection was based on the design of a lesson plan and a semi-structured interview. The results showed that the category of difficulties in learning mathematics conditioned the emergence of strategies, techniques, tasks and examples. Likewise, the definitions, properties and foundations of knowledge of the topics conditioned the emergence of auxiliary connections of the knowledge of the structure of mathematics. Finally, the learning expectations of a mathematical content of mathematics learning standards knowledge conditioned the emergence of strategies, techniques, tasks and examples. All the relationships found were intra-domain.

Keywords ∞ Specialized knowledge of the mathematics teacher; MTSK; Relationships between subdomains; Location on the Cartesian plane; Teaching geometry

Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruiz, E. & Flores-Medrano, E. (2023). Relaciones direccionales intra-dominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre localización en el plano. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática*, 24, 57-74. <https://doi.org/10.35763/aiem24.4360>

1. INTRODUCCIÓN

En la historia de la humanidad, ubicarse o localizarse en un lugar determinado ha sido una de las necesidades básicas en las diferentes comunidades y culturas, actividad vinculada a aspectos relacionados con la supervivencia, así como al desarrollo y crecimiento de las poblaciones. En efecto, Bishop (1999) muestra la actividad de localizar en descripciones de recorridos o en la localización en el entorno, en el uso de expresiones que el hombre utiliza en su diario vivir como arriba-abajo, izquierda-derecha, delante-atrás; o bien, en el contexto de las matemáticas, distancias, líneas, ángulo de rotación y lugares geométricos en el plano.

En los estándares del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) se propone que, al principio, los niños pequeños aprendan los conceptos de posición relativa, como encima, detrás, cerca y entre, para más adelante, utilizar las cuadrículas rectangulares para localizar objetos y medir la distancia entre puntos a lo largo de líneas verticales u horizontales. En los grados medio y secundario, el plano de coordenadas puede ser útil para trabajar en el descubrimiento y el análisis de las propiedades de las formas geométricas, encontrar distancias entre puntos en el plano utilizando las escalas de los mapas o la relación pitagórica. En el currículo oficial mexicano, en los primeros grados de escolaridad, se van construyendo las bases para el concepto de plano cartesiano. Es decir, se desarrolla en el aula de matemáticas la ubicación espacial, puntos cardinales, trazo y propiedades de las figuras planas hasta llegar a los sistemas de referencia y representación gráfica cartesiana. (Valdespino, 2017, p. 12)

Dada la complejidad, pertinencia y transversalidad que tiene el plano cartesiano como sistema de referencia que favorece la localización espacial, o como una herramienta que permite la comprensión de otros contenidos matemáticos, tales como funciones, isometrías o lectura de gráficos, aún se siguen presentado dificultades tanto para localizar puntos en el plano, como para identificar los diferentes elementos y características que lo componen (Aravena y Morales, 2018). En la práctica de enseñanza de funciones lineales, se observa que algunos de los errores cometidos por los estudiantes responden a la falta de dominio de aspectos conceptuales, como la diferenciación entre los términos abscisa y ordenada (Alpízar et al., 2018), así como la ubicación de puntos y figuras geométricas en una determinada posición en el plano (Aravena y Morales, 2018). Además, Acuña (2001) identificó que los estudiantes de bachillerato presentan confusión con el orden y sentido entre las coordenadas en el plano, prevaleciendo el manejo del plano cartesiano en términos de parejas de números negativos y positivos, más que de un espacio bidimensional orientado. En efecto, Saiz (2003, citado en Aravena y Morales, 2018) plantea que en las actividades cotidianas relacionadas con el actuar de los sujetos, se presentan dificultades para orientarse en un ambiente diferente y para utilizar o elaborar planos y mapas.

Por otro lado, considerando el rol del profesor y su conocimiento en el proceso de enseñanza y aprendizaje, Hernández et al. (2015) indican que el nivel de dificultad que el docente en formación asume hacia problemas relacionados con la ubicación espacial, está vinculado significativamente con el proceso de aprendizaje, es

decir, con las propias dificultades que el estudiante muestra, tanto en sus procesos de construcción del conocimiento, como en sus espacios de desenvolvimiento.

Con el propósito de subsanar estas dificultades, para que la enseñanza sea adecuada y no se produzcan estos errores, particularmente en la localización en el plano cartesiano (LPC), el profesor de matemáticas debe poseer y movilizar de forma adecuada tanto conocimiento matemático como didáctico del contenido que enseña.

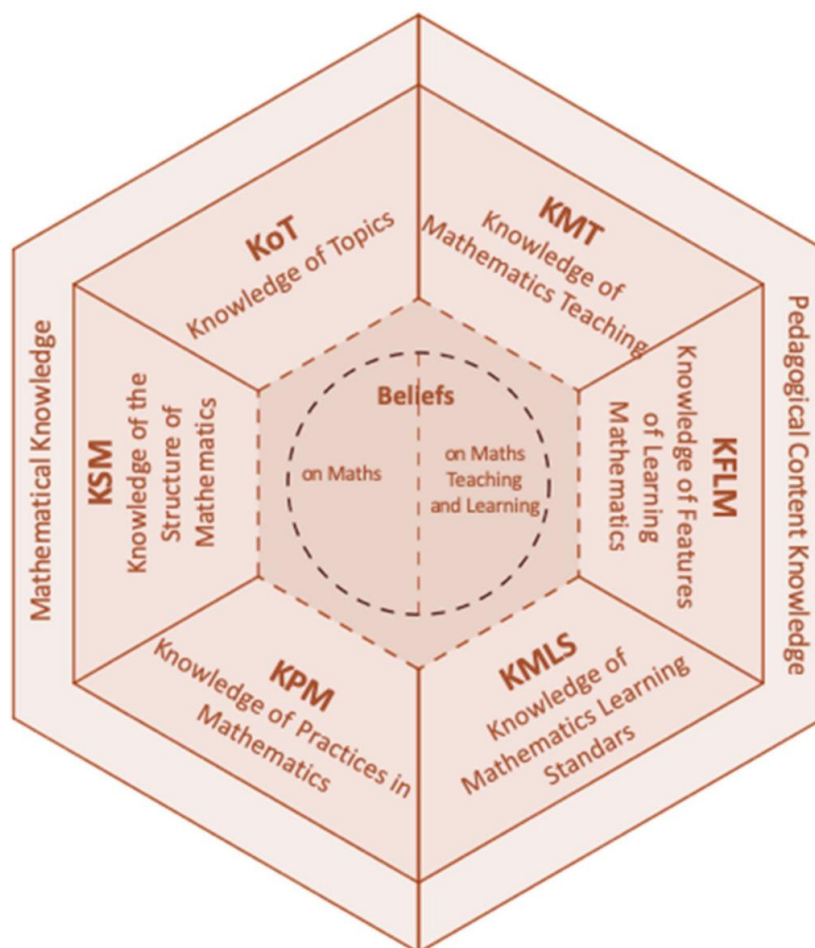
En este sentido, en el afán de estudiar a profundidad el conocimiento del profesor de matemática, se han creado diferentes perspectivas. Por ejemplo, Shulman (1986, 1987) identificó el Pedagogical Content Knowledge (PCK) y el Subject Matter Knowledge (SMK) como características definitorias del conocimiento del docente. Igualmente, Ball et al. (2008) dieron a conocer el modelo del Mathematical Knowledge for Teaching (MKT). Tanto los aportes de Shulman como los de Ball y colaboradores fueron una base importante para que el equipo de investigadores de la Universidad de Huelva, en España, pudiera plasmar lo que hoy se conoce como el modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2022). Dada la importancia de estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas, se han realizado algunas investigaciones en donde se han establecido algunas relaciones entre los subdominios del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico del contenido del MTSK, pero muy pocos han establecido relaciones direccionales (e. g., Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2020). En la mayoría de ellos no se analiza qué tipo de relación se logra identificar o cómo es el comportamiento de las categorías involucradas. En esta investigación se aborda este problema analizando el conocimiento del profesor de matemáticas desde la perspectiva del modelo MTSK, para identificar relaciones direccionales entre los distintos subdominios del modelo, mediante una planeación de clase y una entrevista semiestructurada en el tema de la LPC, que moviliza una profesora mexicana de educación primaria.

2. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El conocimiento del profesor de matemáticas se caracteriza por ser útil y heterogéneo, influenciado por las creencias propias acerca del desarrollo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Tardif (2004, citado en Salazar y Lima, 2019) plantea que el conocimiento del profesor es un saber plural, formado por una amalgama más o menos coherente de saberes procedentes de la formación profesional y disciplinarios, curriculares y experienciales. En este sentido, Carrillo-Yáñez et al. (2018) señalan que “el conocimiento del profesor es reconocido como un factor relevante de su desempeño profesional y para promover el aprendizaje de las matemáticas de sus alumnos” (p. 105). Es preciso que el docente conozca qué enseñar, cómo enseñar e identificar las deficiencias o errores constantes de los alumnos (Chamorro, 2003).

El modelo MTSK (Figura 1), según Flores-Medrano (2022), está conformado por tres dominios: el conocimiento matemático, el conocimiento didáctico del contenido y las creencias, que permean todo el modelo.

Figura 1. Modelo del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas



2.1. Subdominios del modelo MTSK

Conocimiento de los Temas (KoT): Este subdominio incluye el conocimiento disciplinar que debe poseer el profesor para enseñar cierto contenido matemático, el cual va desde el conocimiento de definiciones, propiedades, reglas, procedimientos y los diferentes registros de representación (Carrillo-Yáñez, 2018). Según Zakaryan y Ribeiro (2016):

Este subdominio contempla más que el conocimiento de la matemática como disciplina, incluyendo la matemática escolar y más allá de lo que sus alumnos aprenden, así como lo relativo a sus fundamentos matemáticos, los procedimientos, estándares y alternativos, o las distintas formas de representación de los diferentes temas. (p. 305)

Para Escudero (2015), el KoT se estructura en las categorías: *procedimientos*, aquí es importante para el profesor conocer los procedimientos estándar asociados a contenidos específicos, como también reconocer procesos alternativos al abordar un determinado contenido matemático. Un ejemplo de este elemento es conocer el orden que debe llevar la abscisa y la ordenada en un par ordenado y saber localizar una coordenada en el plano cartesiano. *Definiciones, propiedades y fundamentos*, se refiere al conocimiento sobre propiedades específicas que permiten definir un

objeto determinado, y los fundamentos que estas tienen, las cuales le dan sentido y significado. Por ejemplo, saber que el plano cartesiano se conforma de dos rectas perpendiculares, llamadas ejes de coordenadas cartesianas, donde la recta horizontal se denomina eje de abscisas, o eje x y la recta vertical, eje de ordenadas o eje y . La intersección de ambas rectas corresponde con el punto O (Pinto, 2016). *Registros de representación*, se refiere al conocimiento sobre la existencia de distintos registros de representación que pueden presentarse en un determinado contenido. Por ejemplo, el croquis, el plano y el mapa constituyen un espacio donde se desarrollan los elementos matemáticos referentes a la orientación, como son: punto en el mapa, croquis o plano cuadrícula; puntos cardinales: norte-sur, oriente-poniente; distancia de un punto a otro; posición: anterior, posterior y laterales; y dirección y sentido: sobre línea horizontal (izquierda a derecha) o sobre línea vertical (arriba y abajo) y coordenadas (Valdespino, 2017). *La fenomenología y aplicación*, hace referencia a las diferentes aplicaciones de un concepto matemático particular o a situaciones que lo evocan.

Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM): Este subdominio incluye el conocimiento del profesor de matemáticas de las distintas relaciones y conexiones que tiene el tema a desarrollar. Según Carrillo et al. (2022), el KSM se compone de las siguientes categorías: *Conexiones basadas en la complejización*, conocimiento que permite relacionar los contenidos enseñados con contenidos posteriores. *Conexiones basadas en la simplificación*, que relaciona contenidos enseñados con contenidos anteriores. *Conexiones transversales*, que van ligadas a la naturaleza de algunos conceptos que aparecen al tratar otros conceptos a lo largo de la matemática escolar. *Conexiones auxiliares*, que son consideradas cuando un concepto o tema diferente al que se está tratando, sin ser el foco de la actividad matemática que se desarrolla, aporta elementos que ayudan a ese desarrollo en ese momento. Un ejemplo de estas conexiones para la LPC sería el conocimiento del profesor acerca de la conexión entre punto, distancia entre puntos y la ubicación de un punto en el mapa.

Conocimiento de prácticas en matemáticas (KPM): Este subdominio estudia los modos de producción y funcionamiento matemático. Además, tiene presente en los profesores de matemáticas el saber qué es demostrar, justificar, definir, hacer deducciones e inducciones, dar ejemplos y comprender el papel de los contraejemplos (Carrillo-Yáñez. 2018). En este estudio no se hará énfasis en este subdominio, debido a que sus categorías aún se encuentran en construcción.

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT): Este subdominio hace referencia al conocimiento que posee el profesor de cómo enseñar un tema particular. Aquí se refleja la implementación de teorías institucionalizadas y personales, la idoneidad de los materiales o recursos didácticos (físicos o virtuales), así como el uso de estrategias y técnicas que son necesarias en el quehacer docente.

Este subdominio, de acuerdo con Carrillo-Yáñez et al. (2018) cuenta con las siguientes categorías: *Teorías de la enseñanza de las matemáticas*, hace referencia al conocimiento teórico, tanto personal como institucional específico de la enseñanza de las matemáticas que se puede aplicar al diseño de oportunidades de aprendizaje.

Recursos didácticos (físico y digitales), considera el conocimiento de recursos y materiales didácticos, incluidos libros de texto, objetos manipulables, recursos tecnológicos, y pizarras interactivas. Además, este conocimiento va más allá de la mera conciencia de estos recursos y cómo se utilizan, para abarcar la evaluación crítica de cómo pueden mejorar la enseñanza de un tema en particular y las limitaciones que conlleva. *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*, se refiere a distintas maneras de abordar los contenidos específicos al momento de enseñar (metáforas, analogías, ejemplos potentes o explicaciones). Un ejemplo sería la utilización de la aplicación Google Maps como recurso para aprender a ubicarse o localizar lugares en su comunidad, como también tareas donde el estudiante pueda pasar de la ubicación de un punto en el plano reticular al plano cuadrículado y posteriormente concretar en el plano cartesiano.

Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM): En este subdominio se considera el conocimiento del profesor sobre cómo se aprende un tema matemático en particular. Es decir, busca interpretar y comprender cómo se aprenden y cómo se piensan los contenidos matemáticos. Este subdominio incluye cuatro categorías (Carrillo-Yáñez et al., 2018): *Teorías del aprendizaje matemático*: refleja la necesidad de que el docente sea consciente de cómo los estudiantes piensan y construyen conocimiento al abordar actividades y tareas matemáticas; *Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas*, en esta categoría se incluye la conciencia de dónde los estudiantes tienen dificultades y dónde muestran fortalezas, tanto en general como en un contenido específico; *Formas en que los alumnos interactúan con el contenido matemático*, se relaciona con estrategias convencionales o no convencionales que los estudiantes utilizan para hacer matemáticas, así como la terminología usada al hablar de contenidos específicos; y *Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas*, incluye situaciones cotidianas que despiertan la motivación, interés y expectativas del estudiante en relación con las matemáticas de manera general y en áreas específicas.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas (KMLS): Este subdominio incluye el conocimiento del profesor sobre los aprendizajes que los estudiantes deben alcanzar y desarrollar en un nivel educativo específico o determinado.

En este subdominio se establecieron las siguientes categorías (Carrillo-Yáñez et al., 2018): *Resultados de aprendizaje esperados*, aquí se considera el conocimiento del docente de todo lo que el estudiante debe o puede lograr en un nivel particular, en combinación con lo que ha estudiado previamente y las especificaciones para los niveles posteriores; *Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado*, incluye el conocimiento de los contenidos matemáticos que se van a enseñar en cualquier nivel en particular; por último, la *Secuenciación de temas*, hace referencia al conocimiento sobre la secuenciación entre diversos contenidos matemáticos, dentro del mismo curso o en otros cursos (Escudero, 2015). Un ejemplo de este subdominio es el aprendizaje esperado que plantea la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017) de México en relación con el eje temático “forma espacio y medida”: “Resuelve situaciones que impliquen la ubicación de puntos en el plano cartesiano” (p. 175).

2.2. Relaciones entre los subdominios del modelo MTSK

Dentro de la literatura científica, diversas investigaciones se han centrado en estudiar el conocimiento del profesor teniendo en cuenta, en las diferentes facetas de su quehacer docente, el nivel educativo o el objeto matemático, logrando identificar relaciones entre los subdominios del PCK con los del MK. Un ejemplo de estas relaciones se discute en los estudios de Padilla-Escorcía y Acevedo-Rincón (2021, 2022) con los objetos matemáticos función seno y elipse, respectivamente, ambos utilizando el software GeoGebra, lográndose identificar la relación entre el conocimiento de los temas (KoT) y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). De igual manera, Paternina-Borja et al. (2021), en su estudio con el objeto matemático simetrías, logró caracterizar las relaciones entre los distintos subdominios del modelo MTSK, en particular el conocimiento de los temas (KoT) con los subdominios del PCK. Lo anterior es una muestra de la evidencia de relaciones que pueden identificarse en el modelo MTSK que enriquecen aún más dicho modelo. Estas relaciones tienen que ver con objetos matemáticos geométricos.

Por otro lado, recientes investigaciones han encontrado en sus estudios hallazgos interesantes en cuanto a la forma de identificar evidencias de relaciones entre los subdominios del modelo MTSK. Dichas relaciones pueden identificarse de distintas formas, debido a que tienen diferentes comportamientos. Es decir, se pueden dar relaciones internas entre los conocimientos de un mismo subdominio, entre los subdominios de un mismo dominio o entre subdominios de diferentes dominios. A estas distintas formas de relaciones, Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020) las llamaron relaciones intra-subdominio, intra-dominio e inter-dominio, respectivamente.

Un ejemplo de relaciones inter-dominio las podemos encontrar en los trabajos de Flores-Medrano et al. (2014) y Padilla-Escorcía y Acevedo-Rincón (2021), donde lograron identificar evidencias de relaciones entre el KSM con el KMLS, y el KoT con el KMT. Asimismo, un ejemplo de relaciones intra-dominio se evidencia con el estudio Zakaryan et al. (2018) entre el KMT con el KFLM.

En esta misma línea, resaltando la forma cómo se relacionan los subdominios del modelo MTSK, Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020) definen una relación de direccionalidad, que denotan con un guion, cuando afirman que determinado subdominio “condiciona la presencia” (p. 574) de otro u otros subdominios, es decir cuando se identifica que un subdominio sustenta la aparición de otro o más subdominios. En una relación direccional, el subdominio que toma el punto de partida tiene un rol de condicionador y el subdominio como punto de llegada toma el rol de movilizado. Cabe mencionar que el rol de condicionador lo puede tomar una categoría y el rol de movilizado lo puede tomar una o más categorías, en un argumento específico. En este trabajo nos adherimos a dicha definición de *relación direccional*. Estas relaciones son de interés para la comunidad investigativa, debido que nos permiten evidenciar procesos cognitivos más complejos que solo conocimientos aislados. En este trabajo los denotaremos con una flecha. Para ejemplificar este tipo de relación se ha tomado el resultado proporcionado por Zakaryan y Ribeiro (2016) en el objeto matemático fracciones, cuando la categoría estrategias, tareas,

técnicas y ejemplos del KMT condiciona la movilización de las categorías fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas del KFLM y los diferentes significados del objeto matemático (KoT). Esta relación direccional se denota en este documento como $KMT \rightarrow (KFLM \text{ y } KoT)$.

3. MÉTODO

La presente investigación tiene como objetivo identificar relaciones direccionales entre el conocimiento didáctico del contenido y el conocimiento matemático involucradas en la enseñanza de la localización en el plano cartesiano. Es de tipo cualitativo mediante un estudio de caso instrumental, el cual es un diseño metodológico que permite la comprensión de un tema particular (Muñoz-Catalán, 2021), en este caso, el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de la LPC. La informante es una maestra de primaria mexicana (en adelante María) que atiende a estudiantes de 6.º grado del nivel básica primaria (6 a 14 años). María está titulada como profesora de Matemáticas y magister en Educación Matemática, con 25 años de experiencia docente en este nivel.

Para la recogida de la información, al inicio se le pidió a la profesora el diseño de una planeación de clase del tema LPC. El diseño que la profesora entregó considera los antecedentes, el diagnóstico, las fortalezas y debilidades que presentan los estudiantes tanto en las pruebas a nivel nacional (PLANEA) como en las pruebas internas, por la situación del confinamiento por la pandemia Covid-19. Asimismo, tiene presente los aspectos curriculares en donde incluyó el nivel, grado, campo de formación, eje temático, propósitos, aprendizajes esperados, objetivo de la clase, competencias a desarrollar, enfoque y metodología de aprendizaje. De igual manera, incluyó los momentos de inicio, desarrollo y cierre. En el momento de inicio, la profesora incluyó una actividad de motivación titulada “¿Dónde están los semáforos?”, acompañada de preguntas detonadoras o de cuestionamiento. Además, tiene presente los aprendizajes desarrollados en la actividad “Batalla naval” como el uso de un sistema de referencia para ubicar puntos en una cuadrícula, para después relacionarlos con los nuevos aprendizajes. En el momento de desarrollo tiene en cuenta preguntas de cuestionamiento relacionadas con la actividad “¿Dónde están los semáforos?” extraída del libro “Desafíos de Matemáticas” de sexto grado, reflexionando en los elementos del plano cartesiano (la perpendicularidad de los ejes, las coordenadas del punto de origen, los valores y los nombres de las coordenadas, etc.). Posteriormente, la profesora coloca una actividad grupal donde los estudiantes deben ubicar una secuencia de puntos en el plano cartesiano. Por último, en el momento de cierre, implementa una retroalimentación de lo discutido en clase.

Por otro lado, durante la investigación se hizo un análisis de la planeación de la profesora buscando evidencias e indicios de conocimiento. La evidencia es un elemento que sustenta la presencia de conocimiento del docente, mientras que un indicio es una sospecha de la existencia de este, pero se necesita información adicional para confirmar o refutar esta sospecha (Moriel-Junior y Carrillo, 2014), la cual, para este trabajo, resolvimos a partir de preguntas focalizadas en los aspectos que generaban tales sospechas. Asimismo, estos autores mencionan que investigar

mediante preguntas diseñadas para cada subdominio del MTSK permite ampliar y comprender el fenómeno investigado y brinda confianza en el conocimiento identificado. Por esta razón, se diseñó un cuestionario de preguntas basadas en descriptores definidos para cada categoría del modelo MTSK y para triangular los resultados obtenidos. En estudios cuantitativos, las variables se operacionalizan a través de indicadores que señalan la forma en la que se medirán dichas variables. En estudios cualitativos llamaremos *descriptor* de una categoría al enunciado que permite identificar la presencia o ausencia del rasgo o cualidad de esta.

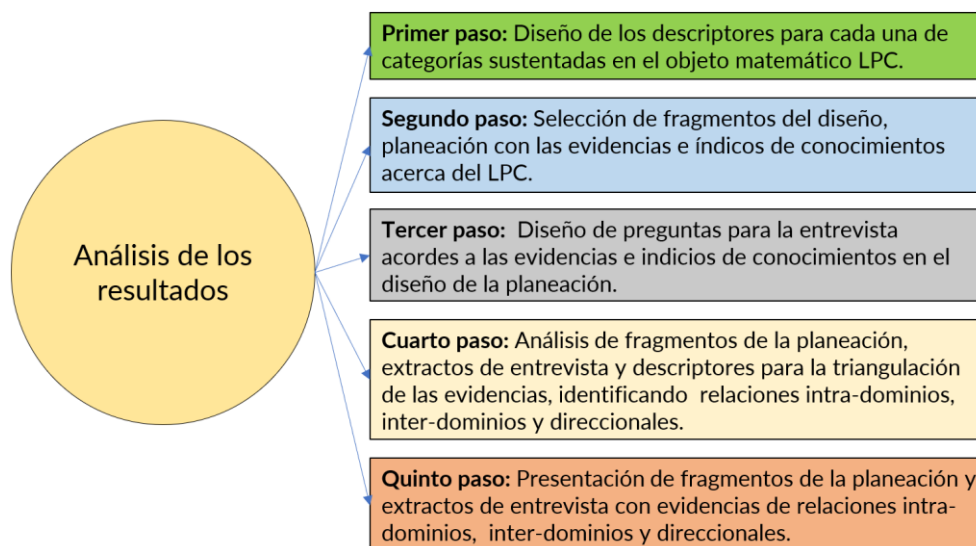
De esta manera, se diseñó y validó por el grupo de investigadores de este trabajo, una tabla con las categorías del MTSK, descriptores para cada categoría y preguntas para cada descriptor relacionadas con el objeto matemático LPC. En la Tabla 1, se presenta un ejemplo de descriptor y pregunta para una categoría de los subdominios KFLM y KoT.

Tabla 1. Ejemplo de descriptores y preguntas de los subdominios KFLM y KoT

Dominio	Subdominio	Categoría	Descriptor	Pregunta
PCK	KFLM	Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas	Conoce las fortalezas y debilidades en el aprendizaje de la localización en el plano cartesiano	¿Qué fortalezas y debilidades presentan los estudiantes al momento de aprender localizar puntos en el plano cartesiano?
MK	KoT	Definiciones, propiedades y conocimientos	Conoce los términos o elementos matemáticos al momento de localizar puntos, tanto en una cuadrícula (horizontal, vertical) como en el plano cartesiano (abscisa, ordenada)	¿Qué términos o elementos matemáticos involucra el tema de localización de puntos en el plano cartesiano?

Para la realización de la entrevista se utilizó la plataforma Google Meet, debido al confinamiento por la pandemia generada por el Covid-19. Esta fue grabada e inmediatamente transcrita. Se analizaron en profundidad el diseño de la planeación y los fragmentos de entrevista mediante un análisis de contenido identificando extractos potencialmente relacionables con las categorías del MTSK (Carrillo et al., 2022), para luego proceder a una abstracción sobre el conocimiento que la profesora ponía en juego en tal acción, ya sea que la identificáramos como evidencia (certeza) o indicio (sospecha), para así conformar descriptores de conocimiento. Finalmente se identificaron relaciones direccionales, como se muestra en la Figura 2.

Figura 2. Procedimiento para el análisis de la información



4. RESULTADOS

En este apartado presentamos algunas relaciones direccionales que se lograron identificar entre algunos subdominios del modelo MTSK. Para esto, se consideraron los indicios y oportunidades de conocimiento identificadas en la planeación de clase.

Para profundizar en los indicios de conocimiento de María, se observó, en la sección “desarrollo” del diseño de planeación, la estrategia del uso de cuestionamientos relacionados con las actividades de juego “Batalla Naval” (trabajo con una cuadrícula) y “¿Dónde están los semáforos?” (trabajo con el plano cartesiano) previas a la enseñanza de la LPC, como se muestra en la Figura 3.

Figura 3. Porción del momento “desarrollo” de la planeación de clase

<p>Se proporciona una copia con las preguntas ya formuladas, deberán ser contestadas de forma escrita</p>	<p>Con respecto al juego Batalla naval y la actividad ¿dónde están los semáforos?, ¿Qué observaron en las imágenes? El semáforo 3, ¿a cuántas calles del eje vertical se encuentra? El semáforo 3, ¿a cuántas calles del eje horizontal se encuentra?</p>
---	---

Esta estrategia se tomó como una oportunidad para explorar en el conocimiento de María, por lo que se le preguntó en la entrevista:

Investigador: ¿La estrategia que emplea en el diseño, en el desarrollo de su clase, tiene en cuenta las dificultades de los estudiantes al momento de localizar puntos en el plano?

María: Traté de ver cuáles eran las posibles dificultades a las que me pudiera yo enfrentar precisamente para [elaborar] el diseño. Ellos pasan de una cuadrícula al plano cartesiano: de una combinación de letra número pasan a dos números

que llevan un orden, por eso puse las preguntas [...] ya vienen [estudiando] en un plano en el primer cuadrante y les ponen unas coordenadas ya numéricas y de repente dicen, el alumno tiene que descubrir, pero si pensé, no todos van a llegar a eso, tienes que guiarlos, entonces sí lo tomé en cuenta. (María, Extracto de entrevista, 29 de abril de 2021)

Aquí la profesora evidencia, por un lado, tener conciencia de las dificultades que pueden presentar los estudiantes al localizar puntos en el plano (fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, KFLM) y, por otro lado, el uso de cuestionamientos como estrategia de enseñanza (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, KMT), como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Categorías y descriptores de los subdominios KFLM y KMT

Subdominio	KFLM	KMT
Categoría	Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
Descriptor	Conoce las dificultades de pasar de una cuadrícula al plano cartesiano	Conoce la estrategia de cuestionamientos para la enseñanza del plano cartesiano

Además, teniendo en cuenta lo planteado por la profesora en este fragmento de entrevista, se puede evidenciar una relación direccional KFLM→KMT, donde la profesora —con el hecho de conocer que entre las posibles dificultades a las que se pudieran enfrentar los estudiantes al pasar de una cuadrícula al plano cartesiano está el paso de la combinación letra-número a la de número-número la cual incorpora la noción de pareja ordenada— es condicionada a usar la estrategia de una serie de cuestionamientos organizados para lograr que los estudiantes identifiquen dos datos de interés que son la distancia horizontal y la distancia vertical.

Durante la entrevista surgió una oportunidad para indagar sobre el conocimiento de María sobre qué aspectos o definiciones pueden identificar los estudiantes al momento de localizar un punto en el plano cartesiano. Por lo que en la entrevista se le preguntó lo siguiente:

Investigador: ¿Qué aspectos cree usted o definiciones puede identificar el estudiante al momento de localizar un punto en el plano cartesiano? Digamos esas características, esos elementos que se hacen necesarios para la localización en el plano cartesiano

María: ¿Qué pueden implicar?

Investigador: ¿Qué puede identificar el estudiante con esta planeación de clase?

María: Pueden darse cuenta de que una cuadrícula no es lo mismo que un plano, puede darse cuenta de que ubicarse en un plano tiene que ver de dónde estoy y a dónde quiero llegar o dónde está el punto. Es decir que debe de haber una distancia, entonces estoy hablando de medida y cuando ubico un punto en el plano, eso tiene que ver con una ubicación espacial. (María, Extracto de entrevista, 29 de abril de 2021)

En este fragmento de entrevista se observa el conocimiento de María sobre lo que es un plano cartesiano (Definiciones, propiedades y fundamentos, KoT), así como la evidencia de conexiones auxiliares entre el plano cartesiano, medida y distancia (Conexiones auxiliares, KSM), como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3. Categorías y descriptores de los subdominios KoT y KSM

Subdominio	KoT	KSM
Categoría	Definiciones, propiedades y fundamentos	Conexiones auxiliares
Descriptor	Conoce las definiciones, significados y propiedades de la LPC	Conoce los conceptos de medida y distancia como conexiones auxiliares para comprensión de la LPC

Además, se evidencia la relación de direccionalidad KoT→KSM, donde el conocimiento de la ubicación en el plano cartesiano “que tiene que ver con dónde estoy y hacia dónde quiero llegar” y no como la identificación de un elemento puntual en el plano, moviliza su conocimiento sobre la medida y distancia como herramientas que permiten identificar tal interpretación del plano aunque, asumimos, se siga refiriendo a las distancias horizontales y verticales y no a la separación euclidiana entre dos puntos del plano.

Otra oportunidad para profundizar en el conocimiento de María fue identificada en el diseño de planeación en la sección de “aspectos curriculares”, donde la parte “situaciones problemáticas” es tomada como un indicio de estrategia de enseñanza centrada en el interés del estudiante con el propósito de desarrollar en ellos la reflexión y diferentes formas de resolver un problema, como se muestra en la Figura 4.

Figura 4. Porción de los “aspectos curriculares” del diseño de planeación

Utilizar situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados. Al mismo tiempo, las situaciones planteadas deberán implicar los conocimientos y habilidades que se quieren desarrollar. Se pretende lograr un equilibrio en el cual interactúe docente, alumno y saberes. El conocimiento matemático adquiere sentido, para el sujeto, en función de los problemas que le permiten resolver.

Este indicio se tomó como una oportunidad para profundizar en el conocimiento de María, por lo que se le preguntó lo siguiente:

Investigador: ¿Para la localización de puntos en el plano, usted siempre utiliza situaciones problemáticas?

María: Sí, me enfoco más a eso

Investigador: ¿Por qué?

María: No soy tan teórica, yo he visto que los alumnos se aburren demasiado, ya están bostezando, es tan abstracto que ya no la entienden y la pregunta clásica

“¿y eso para qué me sirve?, ¿dónde lo voy a aplicar?” , entonces siempre lo utilizo

Investigador: ¿Qué tanto le aportan estas situaciones problemáticas a la enseñanza de la localización en el plano?

María: ¿A mí?

Investigador: Tanto para usted como para su enseñanza, como también en el proceso de aprendizaje para los estudiantes

María: En cuanto a mí, sí me aportó porque, aunque yo estoy trabajando desde secundaria, se supone que debemos saber tanto lo que el docente de primaria y de preescolar tiene que enseñar. No nada más porque yo estoy en secundaria solo debo saber lo de secundaria, necesito un antecedente de qué hay atrás para que yo pueda enseñarlo como corresponde. Entonces esa actividad [Batalla Naval] a mí me permitió adentrarme, por decir, al enfoque, a los propósitos, a los aprendizajes de primaria y eso me ayuda [...] Y entonces, tengo que buscar la manera de que al avanzar haya sido, no sé si sea la palabra correcta, sea ilustrativo, de tal manera que [los estudiantes] lo comprendan. (María, Extracto de entrevista, 29 de abril de 2021)

En este fragmento de entrevista, María evidencia conocimiento de lo que el estudiante debe o puede aprender en secundaria basándose en los conocimientos previos de grados anteriores cursados por los estudiantes. Es decir, María tiene en cuenta la importancia de los antecedentes de cómo se desarrolló el tema de localización de puntos en el plano en primaria para utilizarlo en grados posteriores (expectativas de aprendizaje de un contenido matemático, KMLS). Asimismo, María resalta que utiliza las situaciones problemáticas como estrategia de enseñanza con el propósito de que los estudiantes no vean la matemática como algo abstracto y para evitar los cuestionamientos que surgen en los estudiantes alrededor del tema enseñado (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, KMT), como se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4. Categorías y descriptores de los subdominios KMLS y KMT

Subdominio	KMLS	KMT
Categoría	Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
Descriptor	Conoce lo que el estudiante debe o puede lograr en un nivel particular, y los aprendizajes matemáticos previos relacionados con la LPC	Conoce estrategias de enseñanza a través de situaciones problemáticas para la enseñanza de la LPC

Asimismo, se evidencia la relación direccional KMLS→KMT, donde el conocer que los estudiantes han trabajado el tema de LPC en grados anteriores —y que esto pueda llevarles al aburrimiento al interpretar cierta repetición o un excesivo desarrollo teórico del tema, proveniente de lo que ella sabe que en secundaria son las expectativas de desarrollo que complementan lo que el estudiante ya podría saber— le motiva a diseñar y utilizar situaciones problemáticas como estrategia de enseñanza en relación a la LPC.

5. CONCLUSIONES

Los resultados precedentes dan muestra de los conocimientos involucrados del profesor en la enseñanza de la LPC, donde se evidenciaron oportunidades o indicios de conocimiento mediante la planeación de clase que posteriormente se convirtieron en evidencias de conocimientos y relaciones direccionales mediante la entrevista semiestructurada y los descriptores previamente definidos. El diseño de la planeación de clase fue un escenario propicio para estudiar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En ese sentido, como Pacheco-Muñoz et al. (2022) manifiestan, la preparación de la clase es una de las facetas del quehacer docente, donde se puede estudiar, analizar y caracterizar el conocimiento que se pone en juego.

Asimismo, en este estudio se lograron identificar relaciones direccionales entre los subdominios $KFLM \rightarrow KMT$; $KoT \rightarrow KSM$ y $KMLS \rightarrow KMT$. Se consideran evidencia de relaciones direccionales, en concordancia con Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020), y se discuten en términos de los descriptores de conocimiento involucrados en tal relación. Este tipo de discusión permite, por un lado, clarificar que tal relación existe y, por otro lado, dar garantías de la dirección en la que se efectúa. Con esto queremos llamar la atención a la conveniencia de denominar condicionador y movilizado a los descriptores y no a los subdominios.

Estas relaciones direccionales son de la forma intra-dominio, es decir se relacionaron subdominios de un mismo dominio. Estos resultados están de acuerdo con el estudio de Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2021), en tanto que es posible identificar relaciones entre conocimientos de un mismo subdominio, al interior de un subdominio o entre diferentes subdominios. Cabe resaltar en este estudio la presencia del subdominio $KMLS$ con su categoría expectativa de aprendizaje de un contenido matemático y del KSM , con la de conexión auxiliar, que se identificaron en las relaciones establecidas, en contraste con anteriores investigaciones (e. g., Padilla-Escorcía y Acevedo-Rincón, 2021, 2022; Paternina-Borja et al., 2021), donde estas categorías no se evidenciaron. En ese sentido, Padilla-Escorcía y Acevedo-Rincón (2021) resaltan la versatilidad del modelo $MTSK$, el cual permite caracterizar relaciones entre subdominios del conocimiento matemático como del didáctico, con el objetivo de profundizar en el conocimiento especializado del profesor.

Asimismo, la planeación de clase ha demostrado en este trabajo ser un escenario adecuado para analizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Otros ejemplos de este tipo de escenarios son la propuesta de resolver un problema matemático con un profesor de secundaria en un curso o el hecho de analizar las grabaciones de un curso (Escudero, 2015; Pacheco-Muñoz et al., 2022; Pascual et al., 2019).

Finalmente, el estudio de las relaciones de direccionalidad entre elementos de conocimiento especializado nos permite hipotetizar sobre aquellos aspectos que movilizan más conocimientos, lo cual tendría implicaciones en la selección de los puntos de partida en el diseño de tareas formativas. En este trabajo se obtuvieron dichas relaciones sin intervenir en su aparición. Futuras investigaciones podrían

propiciar la aparición intencionada de relaciones direccionales, explorando, por ejemplo, las condiciones para invertir el sentido y determinando los condicionadores y sentidos con mayor riqueza de movilización para el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas.

REFERENCIAS

- Acuña, C. (2001). Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(3), 203-217.
- Alpízar, M., Fernández, H., Morales, J. & Quesada, S. (2018). Dificultades y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje de la función lineal. *Revista de Investigación y Divulgación en Matemática Educativa*, 9, 6-19.
- Aravena, A. y Morales, A. (2018). El Plano Cartesiano en estudiantes de Quinto Básico: su Resignificación en una Situación Específica. *Bolema*, 32(62), 825-846. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a04>
- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática, la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós Ibérica.
- Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., Montes, M., & Climent, N. (2022). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*. Dykinson.
- Chamorro, M. (2003). *Didáctica de la Matemática Primaria*. Pearson Educación.
- Delgado-Rebolledo, R. & Espinoza-Vásquez, G. (2021). ¿Cómo se relacionan los subdominios del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas? En J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congresso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 288-295). Congresseme.
- Delgado-Rebolledo, R. & Zakaryan, D. (2020). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(3), 567-587. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0>
- Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral sin publicar, Universidad de Huelva, España.
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, M., Aguilar, A. & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemática, el MTSK. En J. Carrillo, L. C. Contreras-González, N. Climent, D. Escudero-Avila, E. Flores-Medrano & M. A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemática* (pp. 70-92). Universidad de Huelva Publicaciones.
- Flores-Medrano, E., Gómez-Arroyo, D., Aguilar-González, Á., & Muñoz-Rodríguez, L. (2022). What Knowledge Do Teachers Need to Predict the Mathematical

- Behavior of Students? *Mathematics*, 10(16), 2933.
<https://doi.org/10.3390/math10162933>
- Hernández, F., Lizarde, E. & Zúñiga, J. (2015). *El Conocimiento Especializado de los Profesores de Matemáticas en la Educación Primaria. Predictores Principales desde el MTSK en la Formación Docente Inicial* [ponencia]. XIII Congreso Nacional de Investigación Educativa. Chihuahua, México.
- Moriel-Junior, J. G. & Carrillo, J. (2014). Explorando indicios de conocimiento especializado para enseñar matemática con el modelo MTSK. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). SEIEM.
- Muñoz-Catalán, M. C. (2021). Reflexiones para una fundamentación del estudio de caso como diseño metodológico en Educación Matemática. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 65-80). SEIEM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Autor.
- Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruiz, E. & Flores-Medrano. (2022). Conocimiento Didáctico del Contenido en la Enseñanza de la localización en el plano cartesiano. *Investigación e innovación en Matemática Educativa*. 7,1-20.
<https://doi.org/10.46618/iime.143>
- Padilla-Escorcía, I. A. & Acevedo-Rincón, J. P. (2021). Conocimiento especializado del profesor que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno: Mediaciones con TIC. *Eco Matemático*, 12(1), 93-106. <https://doi.org/10.22463/17948231.3072>
- Padilla-Escorcía, I. A. & Acevedo-Rincón, J. P. (2022). Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas en la Enseñanza de la Modelación de la Elipse a Través de Recursos Tecnológicos. *Revista Lasallista de Investigación*, 19(1), 67-83.
<https://doi.org/10.22507/rli.v19n1a4>
- Pascual, M. I., Montes, M. & Contreras, L. C. (2019). Un acercamiento al conocimiento del formador de profesores de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 473-482). SEIEM.
- Paternina-Borja, O., Juárez-Ruiz, E. & Zakaryan, D. (2021, noviembre). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: caracterización de relaciones en tema de simetrías[conferencia], (pp. 296-303). *V Congreso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Brasil
- Pinto, H. D. (2016). *El plano cartesiano: una idea sencilla cuyo desarrollo llevó dos milenios*. Tesis de Licenciatura sin publicar, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.
- Salazar, V. & Lima, I. (2019). ¿Qué conocimiento debe tener el profesor de matemáticas para enseñar geometría y aportar a la construcción del tejido social? En C. Samper & L. Camargo (Eds.), *24 Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 205-212). Universidad Pedagógica Nacional.
- Secretaría de Educación Pública (SEP). (2017). *Aprendizajes clave para la educación Integral*. Autor.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), 4-14.
<https://doi.org/10.2307/1175860>

- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
<https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- Valdespino, E. (2017). *El conocimiento especializado de maestros mexicanos de primaria sobre el plano cartesiano*. Tesis de maestría sin publicar, Universidad Internacional de Andalucía, España.
- Zakaryan, D., Estrella, M. S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E. & Carrillo Yañez, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(2), 105-123. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260>
- Zakaryan, D., & Ribeiro, M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké*, 24(3), 301-321.

∞

Ever Pacheco-Muñoz

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
everjpacheco0905@gmail.com | <https://orcid.org/0000-0001-5234-5287>

Estela Juárez-Ruiz

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
estela.juarez2000@gmail.com | <https://orcid.org/0000-0002-2857-0772>




Eric Flores-Medrano

Universidad Complutense de Madrid (España)
erflores@ucm.es | <https://orcid.org/0000-0002-6134-729X>

Recibido: 25 de marzo de 2022

Aceptado: 3 de junio de 2023

Intra-domain directional relationships of mathematics teacher's specialized knowledge about location in the plane

Ever Pacheco-Muñoz @ ¹, Estela Juárez-Ruiz @ ¹,
Eric Flores-Medrano @ ²

¹ Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

² Universidad Complutense de Madrid (España)

The present research aims to establish directional relationships between subdomains of the mathematics teacher's specialized knowledge model (MTSK) involved in teaching of location on the Cartesian plane. The study was conducted under a qualitative methodology through an instrumental case study, which in this type of study the case turns out to be an instrument to understand a specific phenomenon. In our case, it is about studying the specialized knowledge mobilized by a Mexican teacher in the teaching of location in the Cartesian plane. The informant is a teacher who has 25 years of experience working at the primary school level with students ranging in age from 10 to 12 years old. The data collection was based on the design of a lesson plan and a semi-structured interview. For the design of the lesson plan, the teacher considered the background, the diagnosis, the strengths, and weaknesses of the students in the national tests (PLANEA) as well as in the internal tests, due to the situation of the confinement due to the Covid-19 pandemic. It also considers the curricular aspects, including the level, grade, field of education, thematic axis, purposes, expected learning, class objective, competencies to be developed, learning approach, and methodology. Likewise, it included the moments of beginning, development, and closure. For the semi-structured interview, the evidence and indications of knowledge evidenced in the planning design were considered and it was conducted through the Google Meet platform; due to the confinement due to the pandemic generated by Covid-19, it was recorded and transcribed immediately. In the results, directional relationships were found where the category difficulties in learning mathematics belonging to the subdomain of knowledge of the features of learning mathematics, conditioned emergence of the category strategies, techniques, tasks, and examples belonging to the subdomain of knowledge of mathematics teaching. Likewise, the category definitions, properties, and foundations of the knowledge of the topics, conditioned the emergence of the category auxiliary connections belonging to the knowledge of the structure of mathematics. Finally, the category of learning expectations of a mathematical content of the knowledge of mathematics learning standards conditioned the emergence of the category strategies, techniques, tasks, and examples of knowledge of mathematics teaching. All relationships found were intra-domain.