ISBN: 84-931584-2-9

UNA REPRESENTACIÓN PARA DIFERENTES PROBLEMAS

María Candelaria Espinel Febles

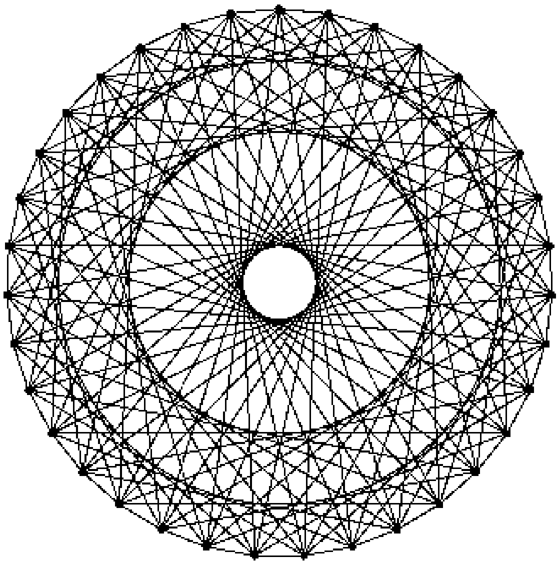
Universidad de La Laguna

Resumen

Con este trabajo queremos llamar la atención sobre una rica representación que, por un lado, se puede encontrar con fines decorativos en el mundo que nos rodea, muchas veces dando significado y funcionalidad a diversos objetos o entes y por otro, constituye un modelo peculiar que permite mostrar determinadas características en dos ambientes matemáticos bien distintos: geometría euclídea y teoría de grafos.

Abstract

With this work we want to call the attention to a rich representation which, on the one hand, it can be found with decorative objectives in the world that surrounds us, many times giving meaning and functionality to various objects or entities; and additionally, it constitutes a peculiar model that permits us to show certain characteristics in two well different mathematical environments: Euclidean geometry and theory of graphs.



FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA II
Mª Candelaria Espinel (2000). *Una representación para diferentes problemas, pp. 109-119*

Introducción

Dos nombres y terminologías distintas - polígonos estrellados y grafos circulantes - dan lugar a una representación gráfica análoga, aunque en un caso se destaca la forma geométrica y en el otro importan más sus relaciones o conexiones.

Supongamos dividida la circunferencia en n partes, y unamos los puntos de la división de dos en dos, de tres en tres, etc. Al cerrarse la poligonal para volver al punto de partida se ha recorrido la circunferencia un número entero de veces obteniéndose un polígono, a veces, en forma de estrella, al que la geometría euclídea llama “polígono estrellado”.

El diseño de redes locales de ordenadores considera varias estaciones colocadas a corta distancia que deben intercambiar información con muy alta rapidez. Las redes de interconexión se modelizan mediante grafos que tienen determinadas propiedades, tales como regularidad, simetría o conectividad. Para este tipo de interconexión se ha propuesto un tipo de grafo especial llamado “red doble anillo” o “grafo circulante” y con ello se consigue, entre otras cuestiones, mejorar la fiabilidad del sistema y disminuir la distancia entre los procesadores. Recientemente, los grafos circulantes y en particular las redes doble anillo están siendo estudiadas de forma muy intensa en la búsqueda de relaciones como un determinado número cromático o redes con el menor diámetro.

En general, la Matemática educativa trata de incorporar al curriculum, las representaciones que fomentan el conocimiento matemático y que pueden ayudar a clarificar y resolver determinados problemas. Una representación de polígonos estrellados o grafos circulantes, a muchas personas les sugiere diversas situaciones de su vida cotidiana. Ante una figura como la que se muestra al principio del artículo manifiestan que ven: una rueda, un ojo o un diafragma de cámara de fotos, una estrella de una constelación, una tela de araña, un ovillo de lana, un diamante, una copa de cristal, final de las películas de 007, ... Seguramente cada persona ha asociado la representación con una vivencia personal. Esta fenomenología social puede ser el camino que el profesor toma para mostrar diversos conceptos matemáticos implicados. Creemos que el modelo sobre el que aquí reflexionamos es adecuado a estas características curriculares. Además, muestra unas peculiaridades de orden y belleza de las que el estudiante puede disfrutar y permite unas sucesivas ampliaciones de su campo de acción profundizando en el quehacer matemático.

En los tres apartados siguientes presentamos una recopilación del modelo – polígono estrellado o grafo circulante – en tres contextos: social y cultural, matemático y curriculum (Primaria y Secundaria Obligatoria).

Contexto social y cultural del modelo

Si miramos a nuestro alrededor nos encontramos con diversos objetos que por sí mismos tienen forma de estrella. Así, la naturaleza nos ofrece flores, estrellas de mar, ... Las simetrías que presentan las formas estrelladas se prestan a diversos fines decorativos. Sin llegar a ser exhaustivos, apuntamos algunos ámbitos con los respectivos objetos o situaciones en los que aparece el modelo. Encontramos modelos artísticos de polígonos estrellados en los rosetones de las catedrales, especialmente en las de estilo gótico; en las celosías; diseños de cristal de Bohemia, artesanía tradicional de Praga; diseños de escenarios y platos de T.V.; marquesinas; plegados de papel; ... Los radios de las ruedas de bicicleta, norias, ruletas, ... también recuerdan polígonos estrellados. Hay insignias de cuerpos de policía con estrellas de cinco, seis o siete puntas. Las primeras insignias de los sheriffs eran estrellas de cinco puntas, que luego se convirtieron en estrellas de seis puntas, posiblemente por su trazado más sencillo. La estrella de seis puntas se basa en un hexágono regular que se traza fácilmente con regla y compás.

La estrella de cinco puntas se basa en un pentágono regular y aunque se dibuja también con regla y compás, su trazado es más complejo que el del hexágono.

Las estrellas de cinco, seis, siete, ... puntas han sido símbolo para varias culturas. La estrella de cinco puntas formada por diagonales era el símbolo de los pitagóricos en Grecia. El emblema del pentagrama y su relación con el número áureo ha fascinado a griegos, renacentistas y se mantiene en nuestros días. La estrella de cinco puntas está en la bandera de USA y en la del Parlamento Europeo. Por cierto que las doce estrellas colocadas en círculo simbolizan la perfección independientemente del número de países que formen la Comunidad Europea. Seis puntas, dos triángulos, nos dan la estrella de David. El mándala circular o diagrama sagrado es una imagen familiar a través de toda la historia del arte, así un circulo puede simbolizar la rueda del tiempo para los europeos o un calendario para los aztecas; otros, como los mándalas hindúes muestran dos cuadrados que dan lugar a ocho puntas ...

Polígonos estrellados podemos encontrar, por tanto, en ambientes muy variados, permitiendo la interpretación de fenómenos físicos, sociales o matemáticos. Así, motivos cotidianos como las tapacubos y llantas de las ruedas de algunas marcas de coches muestran un diseño en forma de polígono estrellado. El diseño de las llantas tiene como fin disipar mejor el calor de los frenos.

Para los marinos la rosa de los vientos o rosa náutica es una figura en forma de estrella cuyas puntas señalan las treinta y dos direcciones que marcan el horizonte, 4, 8, 16, 32. Queremos indicar que una rosa de los vientos es la base del diseño de la ciudad de La Laguna, uno de los motivos por los que la Ciudad ha sido declarada Patrimonio de la Humanidad.

Entre las muchas conexiones de la Música y las Matemáticas citamos el reloj musical que se construye colocando las doce notas, siete blancas y cinco negras, sobre una circunferencia que simulan una rueda de acordes; al rotar se obtienen de una forma visual las notas que componen cada acorde.

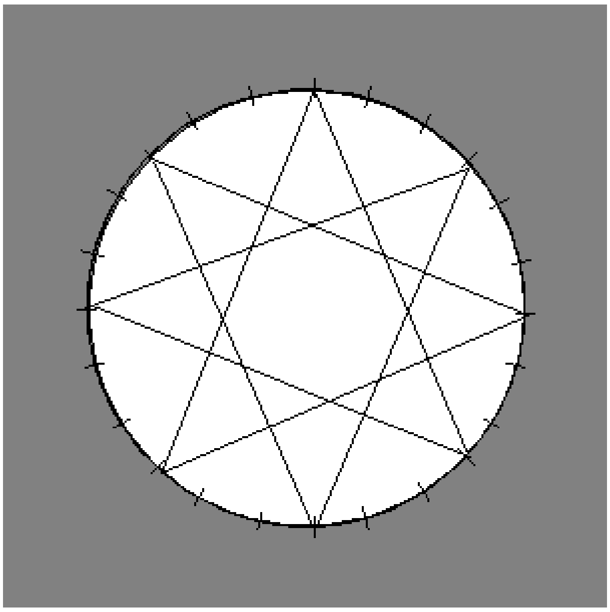
En ambientes industriales se usan para algunas redes de interconexión de ordenadores donde son importantes la fiabilidad y eficacia. La conectividad es una medida ampliamente utilizada para la capacidad de tolerancia mientras que el diámetro determina el camino más eficaz. En la práctica interesan redes con alta conectividad y pequeño diámetro.

Hemos señalado cómo la misma representación está presente con un fin artístico, cultural o histórico y además se presta a diversos fines prácticos. El modelo externo de representación sirve de apoyo en una alta medida a varios sistemas culturales convencionales en los que se muestra la información. Las dimensiones cultural e histórica, muchas veces, señalan el momento en que el conocimiento público tuvo un desarrollo especial por su conexión con las Matemáticas o bien, porque debido a su apreciación estética se convierte en icono. El recorrido epistemológico supone un instrumento cognitivo para organizar y estructurar un determinado contenido matemático.

Contexto matemático

En este apartado recogemos dos terminologías y notaciones matemáticas distintas que dan lugar en muchos casos a una misma representación.

Los polígonos estrellados datan del 540 a. C. y han sido estudiados por varios matemáticos entre ellos Kepler. Se utiliza el símbolo {n/d} para representar un polígono estrellado, donde n es el número de puntos sobre la circunferencia y d, el número de partes alícuotas entre dos puntos, es la densidad del polígono. Se llama género, g, al número de cuerdas para volver al punto de partida. El {n/d} es un polígono estrellado con n vértices si y sólo si n y d son primos entre sí, es decir, m.c.d.(n,d) = 1. Ocurre que {n/d} = {n/n-d}, pero recorridos en sentidos contrarios.



En la figura se muestra el octógono regular estrellado {8/3}. Uniendo las divisiones de 3 en 3 se obtiene el único polígono estrellado de 8 puntas, ya que {8/3} = {8/5}.

Cuando n y d tienen algún factor común, m.c.d.(n,d) = k, ocurre que el género, g=n:k. Así, el polígono {24/9} es el mismo que {8/3}, ya que 24 y 9 no son primos entre sí. El m.c.d. (24,9) = 3, por tanto, el género o número de cuerdas para volver al punto de partida es 8 = 24:3.

Si d es factor de n, resulta un polígono de n:d lados. Así, {24/6} da un cuadrado.

Las matemáticas implicadas en los polígonos estrellados son las propias de la geometría euclídea, en especial, vértices, ángulos interiores, ángulos exteriores. También determinar el número de polígonos distintos de n lados, propiedades de los polígonos, podemos establecer conexiones con la teoría de números, esto es, divisibilidad, m.c.d., restos módulo. El lenguaje de programación LOGO permite trabajar con procedimientos muy sencillos el teorema de la vuelta completa, estudiando de forma experimental el cierre de la línea poligonal. El tema se presta a conexiones con otros campos, por ejemplo, aprovechar la rosa de los vientos para conocer la brújula y el radar al mismo tiempo que se trabaja el tema de los ángulos.

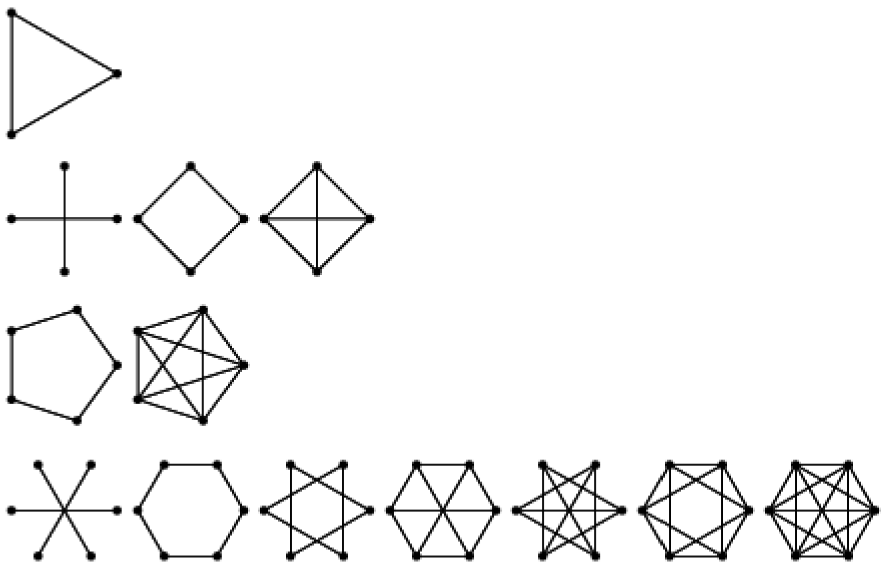
Como temas de Matemática avanzada donde aparecen los polígonos estrellados señalamos la Función de Euler, $\phi(n)$, y los Polinomios de Chebychev.

En otro orden de cosas, desde la Informática, las redes de interconexión se pueden modelizar mediante un grafo G = (V, A), donde los procesadores idénticos están localizados en los vértices V del grafo y se comunican a través de las aristas A del grafo. Interesa construir redes con ciertas limitaciones como que el número de procesadores vecinos sea constante, es decir que el grado de cada vértice sea el mismo (grafos regulares), alta fiabilidad para el sistema (grafos hamiltonianos) y disminuir la distancia entre los procesadores (grafos con diámetro pequeño).

Uno de los modelos matemáticos que mejor se adapta a estos intereses es el grafo o red doble bucle o bien los grafos circulantes especialmente por sus propiedades de regularidad, simetría, conectividad y además dado un número de vértices n es posible encontrar una red con el diámetro más pequeño. El diámetro en un grafo es la distancia máxima entre dos vértices.

Una red doble bucle C (a,b) es un grafo de n vértices donde cada vértice i está unido a cuatro vértices $i \pm a$, $i \pm b$ (mód n) siendo a, b, n tres enteros con $0 < a \neq b < n/2$. El grafo doble bucle C (1, b) es un ciclo C con cuerdas de salto b. Así, la figura formada por el ciclo 0,1,2,3,4,5,6,7 y otro ciclo que coincide con el polígono estrellado {8/3} corresponde al grafo circulante C (1,3). Los dos ciclos que forman el grafo doble bucle son dos ciclos hamiltonianos, esto es recorren todos los vértices del grafo. Tal propiedad es interesante porque los recorridos hamiltonianos permiten que en caso de que una arista falle siempre se puede encontrar un recorrido alternativo.

Un grafo circulante C (s_1 , s_2 , ..., s_k) es un grafo con n vértices donde cada vértice i está unido a todo vértice i ± s_j (mod n), siendo $s_1 < s_2 < ... < s_k < (n+1)/2$. A los valores s se les llama tamaño de los saltos. El circulante C (1, 2, 3, ..., n/2) es un grafo completo. Un grafo completo tiene n vértices y todas las n(n-1)/2 aristas posibles.



La figura muestra los grafos circulantes con 3, 4, 5 y 6 vértices.

Los grafos circulantes son regulares, pero pueden no ser conexos. Un grafo circulante es conexo si m.c.d. (s_1, s_2, ... s_k, n) = 1. Si se impone s_1 = 1, tenemos que m.c.d. (1, s_i) = 1 para cada vértice i, por lo que el grafo es conexo. Por ello en la práctica se eligen las redes con un grafo doble bucle C (1, b) o un grafo circulante C (1, s_2, ... s_k).

Podríamos decir que con un polígono estrellado se garantiza un recorrido hamiltoniano, un grafo doble bucle nos aporta dos recorridos hamiltonianos y el grafo circulante nos puede dar varios recorridos hamiltonianos dependiendo de n y del tamaño, s, de los saltos elegidos.

Los grafos circulantes tienen amplias aplicaciones en diseños de redes de telecomunicaciones, diseños V.L.S.I. y programación en paralelo. Pero también tienen otras utilidades. Así, los grafos doble bucle están también relacionados con el diseño de teselaciones en el plano. A todo grafo circulante se le puede asociar una matriz de adyacencia de vértices que es una matriz circulante. Otros temas relacionados son también la Teoría de Ramsey, las Funciones de Grundy o los Grupos Cíclicos.

Típico de la Teoría de Ramsey es utilizar un grafo circulante completo de n vértices y representar y formular el problema de la reunión, ¿a cuántas personas hay que invitar para que se forme un grupo de determinado tamaño que se conocen dos a dos, o un grupo del mismo tamaño que no se conocen mutuamente? Una buena presentación de la Teoría de Ramsey se puede encontrar en Fernández – Fernández, 1999.

Contexto curricular - matemático

La riqueza de la representación polígono o grafo es evidente y no acabe duda que su uso puede fomentar distintos conocimientos matemáticos. Sin embargo, la terminología matemática no está al alcance de los escolares. En un recorrido somero por libros y materiales de Primaria y Secundaria Obligatoria lo encontramos como recurso didáctico en la Geometría Euclidea, especialmente para relacionar la Geometría con el Álgebra y la Aritmética. Destacamos el uso del geoplano circular con varias propuestas de trabajo para el aula. Sobre polígonos estrellados merece destacar la propuesta de María Antonia Canals (1982).

Para Secundaria merecen señalarse las Carpetas para Taller de Matemáticas en actividades sobre Resolución de Problemas (Bozal, 1994) y el Libro del Grupo Cero de Cataluña para la reforma de la Secundaria. *Matemáticas 12-16*.

Un enfoque novedoso se formula en la investigación “Visibilidad de las paredes” de Martín Kindt (1993). Con un tratamiento distinto cabe señalar la propuesta “Curvas envolventes” de Brian Bolt (1985).

En todas estas propuestas de trabajo está presente la Geometría Euclídea. Menos frecuentes son los grafos, aunque cabe señalar la propuesta “Entretenimientos” donde aparecen los grafos eulerianos también de Brian Bolt (1998).

Los símbolos y las representaciones matemáticas son algunos de los aciertos más significativos de la raza humana. Los programas más recientes de Matemática educativa enfatizan las representaciones matemáticas para fomentar el conocimiento de Matemáticas de forma que todos los estudiantes usen representaciones gráficas para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas; desarrollen un repertorio de representaciones matemáticas que puedan ser utilizadas sin propósito fijo, con flexibilidad, y apropiadamente; usen representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales, y matemáticos.

Cuando hablamos de representación, tendemos a pensar primordialmente en gráficas de funciones o en gráficas estadísticas. Se ha presentado una representación que se utiliza para modelizar diferentes problemas, analizándola desde el punto de vista fenomenológico, epistemológico (social, cultural) y matemático; así mismo se muestra como está presente en distintos materiales curriculares.

Referencias bibliográficas

ABELSON, H.; DISESSA, A. (1986). *El ordenador como medio de exploración de las Matemáticas*. Madrid. Anaya Multimedia.

BOLT, B. (1985). *Más actividades matemáticas*. Barcelona. Labor.

BOLT, B. (1998). *Divertimentos matemáticos*. Barcelona. Labor.

BOZAL, J.L. y otros (1994). *Taller de matemáticas*. Madrid. MEC y narcea.

BUCKLEY, F.; HARARY, F. (1990). *Distance in Graphs.* Addison Wesley.

CANALS, M.A. (1982). *Veinticinco. Cuarto curso de Matemáticas. Ciclo medio de E.G.B.* Colección La Llave de "Rosa Sensat". Barcelona. Onda.

COXETER, H.S.M. (1971). *Fundamentos de geometría.* Limusa – Wiley. México.

ESPINEL, M.C. (1992). "Grafos a través de juegos". *Suma*, 11 y 12, 86-94.

ESPINEL, M.C. (1993). "La plaza: un modelo ante el que investigar". *Aula*, 20, 72-74.

ESPINEL, M.C. (1998). "Grafos: algunas estructuras regulares". *Educación Matemática*, 10, 1, 89-98.

FERNÁNDEZ, P.; FERNÁNDEZ, J. L. (1999). "El desorden absoluto es imposible": la Teoría de Ramsey*". La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española.* 2, 2, 263-289.

FIOL, M. A.; YEDRA, J.L.; FIOL, M. L. (1983). "Grafos y Teselaciones del plano". *Actas II Jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas*. Zaragoza: ICE.

HILTON, P.; HALTON, D.; PEDERSON, J. (1997). *Mathematical Reflections.* Springer.

KINDT, M. (1993). Enfoque realista de la educación matemática. Salar, A. y otros (Eds). *Aspectos didácticos de Matemáticas*. ICE Universidad de Zaragoza.

ORTEGA Y SALA, M. (1957). *Geometría*. Madrid. Librería y editorial Hermano S.A.

SERRA, M. (1993). *Discovering Geometry. An Inductive Approach*. Key Curriculum Press. California.

NCTM (1998). *Principles and Standards for School Mathematics for 2000*.