LUGARES GEOMÉTRICOS RELACIONADOS CON UN TRIÁNGULO CUYOS VÉRTICES SON PUNTOS DE UNA CURVA PLANA CUALQUIERA

José Martel Moreno

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

Con este trabajo se ha querido poner de manifiesto los lugares geométricos generados por ciertos puntos relacionados con un triángulo, cuyos vértices están situados en una curva plana cualquiera, cuando uno de ellos recorre dicha curva, permaneciendo fijos los otros dos.

Abstract

In this work, we are going to show some geometric loci generated by certain points related with a triangle, whose vertices are situated in an arbitrary plane curve, when one of them goes along this curve and the two remaining ones are still.

FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA III
J. Martel (2001). *Lugares geométricos relacionados con un triángulo cuyos vértices son puntos de una curva plana cualquiera, pp. 139-171*

Introducción

Sabido es que la recta de Euler pasa por el baricentro (G), el ortocentro (H) y el circuncentro (O) de cualquier triángulo ABC, y que, además, la distancia HG es el doble de la GO. Pues bien, vamos a situar los vértices del triángulo sobre una curva plana cualquiera, que llamaremos *curva base*, para, seguidamente, estudiar algunos lugares geométricos generados por ciertos puntos, pertenecientes bien a los lados del triángulo o bien a rectas que en cierto modo están ligadas al mismo, cuando uno de sus vértices recorre dicha curva mientras que los otros dos permanecen fijos.

Regularidades observadas

Hemos elegido, entre otras, una serie de curvas, que agruparemos en seis apartados. Los cinco primeros se refieren a curvas algebraicas, y el sexto y último a curvas que no lo son.

En todas ellas hemos observado, auxiliándonos del Cabri-Géomètre II y del Geometer's Sketchpad, las *regularidades* siguientes:

a) El baricentro del triángulo engendra en todos los casos una curva homotética de la curva base, de razón 1/3 y de centro el punto medio del lado opuesto al vértice que recorre la curva base.

Supondremos, siempre que no se diga lo contrario, que A se mueve sobre la curva base y que B y C permanecen fijos. En el caso de que se mueva B (o C), permaneciendo fijos C y A (o A y B) los resultados serían análogos.

b) El circuncentro genera siempre elementos rectilíneos (segmentos, semirrectas o rectas) que incluso se pueden reducir a un solo punto, como es el caso en que el triángulo ABC esté inscrito en una circunferencia.

c) Los puntos de los lados AB y AC y sus prolongaciones generan curvas que son homotéticas de la curva base y de centros B y C, respectivamente. Los puntos de la recta AG se comportan de igual modo, pero con el centro de homotecia en el punto medio de BC.

d) Los puntos del haz de vértice A, exceptuando los de las rectas AB, AG, AO y AC, engendran curvas iguales a la curva base.

e) Los puntos del haz de vértice G, salvo los de las rectas GA, GB, GC y los de la recta de Euler (que se estudiarán separadamente), generan también curvas iguales a la generada por G.

f) Los puntos del haz de vértice O, salvo los de la recta de Euler y los de OA, generan elementos rectilíneos paralelos al generado por el punto O.

g) Todo punto del haz de vértice C_i de la recta AB (o B_i de AC) genera figuras iguales a la generada por C_i (o B_i). Los puntos de la recta C_iB_i generan un conjunto de figuras homotéticas entre sí y de centro la intersección de C_iB_i con BC.

Cónicas y casos particulares

En este apartado consideraremos como curvas base la elipse, la hipérbola y la parábola, así como la circunferencia, una pareja de rectas que se cortan y dos rectas paralelas no coincidentes como casos particulares de las respectivas cónicas, si bien las dos últimas citadas son, como es sabido, cónicas degeneradas.

- Veamos, en primer lugar, el caso en que los vértices de ABC están situados en una elipse.

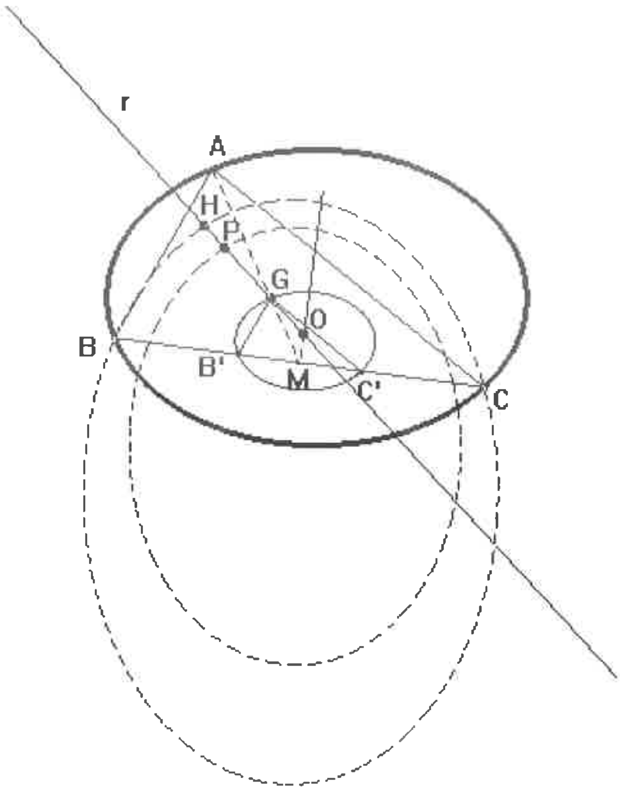

Fig. 1

Teniendo en cuenta la Fig.1 podemos demostrar fácilmente, que la curva generada por el punto G es homotética de la elipse en la que están situados los vértices del triángulo ABC, de centro M, punto medio de BC, y de razón $\frac{MG}{MA}=\frac{1}{3}$. Ello es evidente, pues al ser A un punto móvil de la elipse y B y C puntos fijos de la misma, se verificará en todo momento la relación anterior por la propiedad elemental del baricentro de un triángulo que establece que:

$$GM = \frac{1}{3} AM \text{ y } AG = \frac{2}{3} AM$$

Esta propiedad, por ser inherente al triángulo, se cumplirá siempre, cualquiera que sea la curva base.

El lugar geométrico que genera el punto O, circuncentro del triángulo, es el segmento doble indicado en la figura, que lógicamente ha de estar siempre contenido en la mediatriz de BC.

Un punto cualquiera, P, de la recta de Euler genera siempre una elipse, como se indica en la fig. 1, salvo cuando coincide con O. Es curioso observar, cuando se arrastra el punto P sobre la recta de Euler, las distintas posiciones que ocupa (la elipse) y los cambios de orientación que sufre en su recorrido. Cuando P coincide con H, ortocentro del triángulo, la elipse pasa, además, por B y C.

En la Fig. 2, se pueden observar las distintas maneras de comprobar la razón de homotecia existente entre las dos elipses.

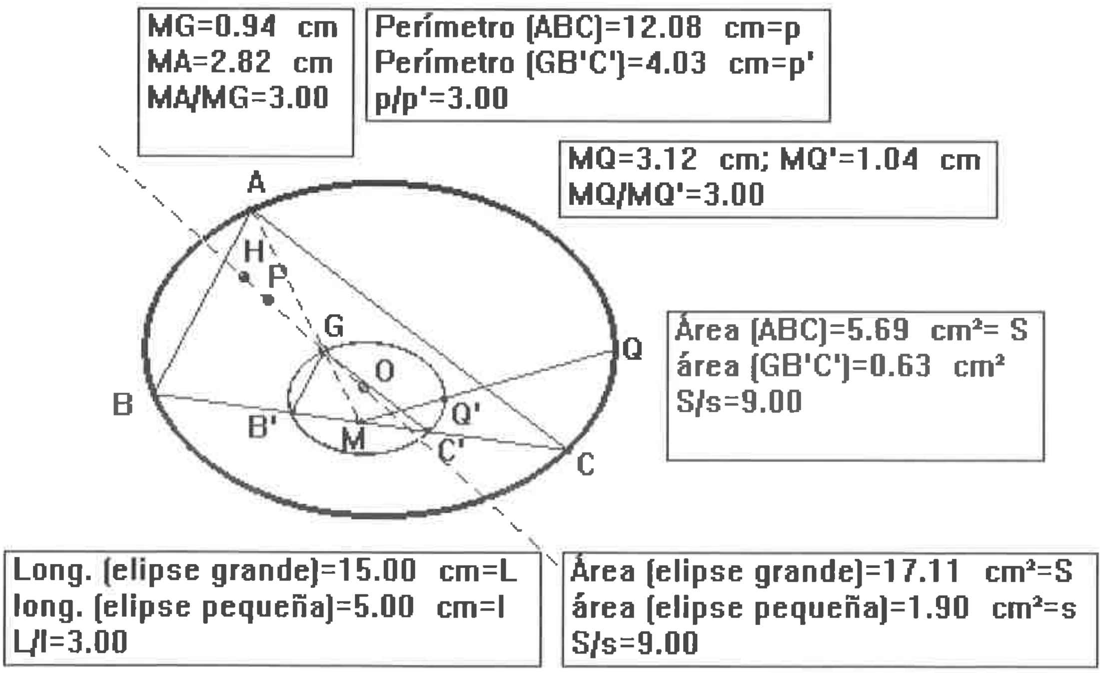

Fig. 2

Curiosamente, el Cabri-Gémètre II, permite determinar, mediante el cuadro de herramientas Medir, la longitud de una elipse cualquiera y el área que ésta limita con sólo hacer click sobre ella.

Ello permite comprobar, casi de inmediato, la conocida propiedad geométrica de las áreas de dos figuras semejantes: "La razón de las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza".

En la Fig. 3, se puede observar el conjunto de homotecias, de centro M, de cada dos elipses generadas por los diversos puntos de la recta AG. Es fácil probar que el conjunto de todas estas homotecias tiene estructura de grupo.

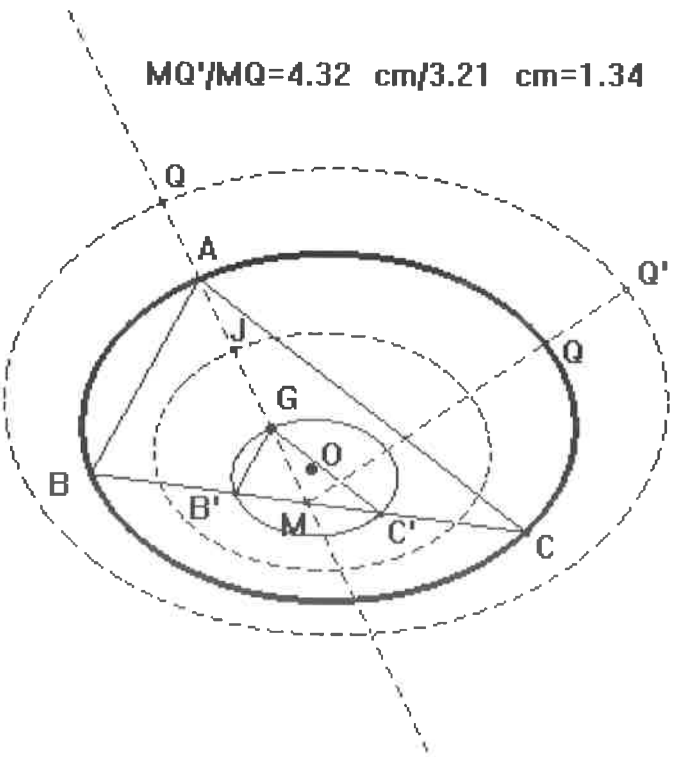

Fig. 3

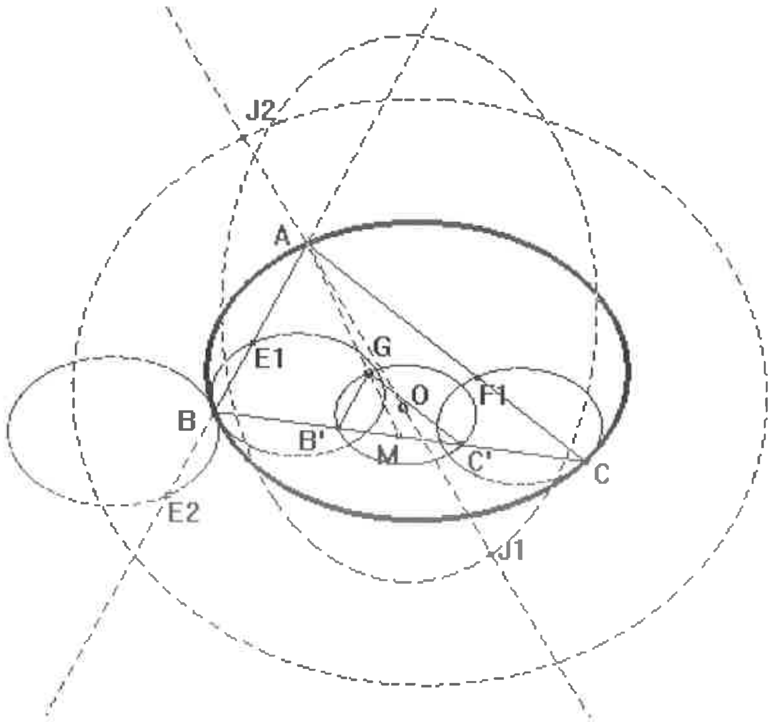

Fig. 4

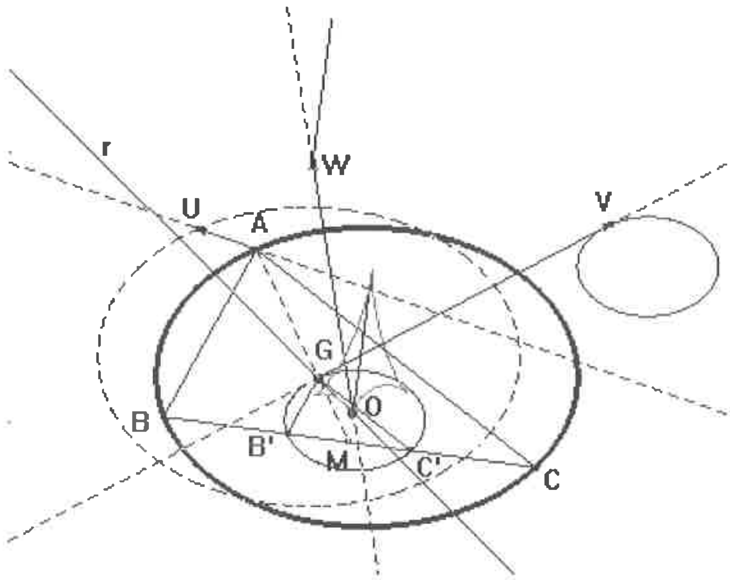

Fig. 5

En la Fig. 4 están dibujados los lugares geométricos de algunos de los puntos de las rectas AB, AO y AC. Las homotecias de cada dos elipses generadas por puntos de las rectas AB y AC tienen por centros respectivos los vértices B y C. Como en el caso anterior, al tener centros fijos, el conjunto de dichas homotecias también tiene estructura de grupo.

Las elipses generadas por los puntos de la recta AO se comportan de otra manera. Al pasar un punto genérico de AO por O, el lugar geométrico se transforma en un segmento para, enseguida, cambiar perpendicularmente la posición de los ejes de la nueva elipse.

En la Fig. 5, se han tenido en cuenta los lugares geométricos generados por puntos del haz de rectas de vértice A, en el que no entran los puntos de las rectas ya estudiadas que pasan por A. Se ha procedido del mismo modo para los puntos de los haces de vértices G y O. Además, se ha dibujado (en color gris) el lugar geométrico generado por la recta de Euler cuando A recorre la curva base.

Veamos, ahora, cómo el Cabri resuelve el siguiente problema: determinar el lugar geométrico generado por un punto U situado en una recta cualquiera perteneciente, por ejemplo, al haz de vértice A. Pues bien, al moverse A sobre la curva base, arrastra al vector AU (traslación); de esta manera todos los lugares geométricos generados por puntos de la recta AU serán curvas iguales a la curva base, elipses en este caso. Del mismo modo, los de la recta GV darán elipses iguales a la generada por G, y, para los de OW, segmentos paralelos al segmento generado por O.

Sin embargo, el Geometer, lo resuelve mediante una homotecia de centro un punto cualquiera perteneciente a una recta arbitraria del correspondiente haz. En

la Fig. 6, X, Y y Z serían los centros de las figuras homotéticas generadas por los respectivos puntos U, V y W . Al fin y al cabo, una traslación no es más que una homotecia cuyo centro está en el infinito y que tiene de razón la unidad; por tanto, ambos programas dan soluciones
similares.

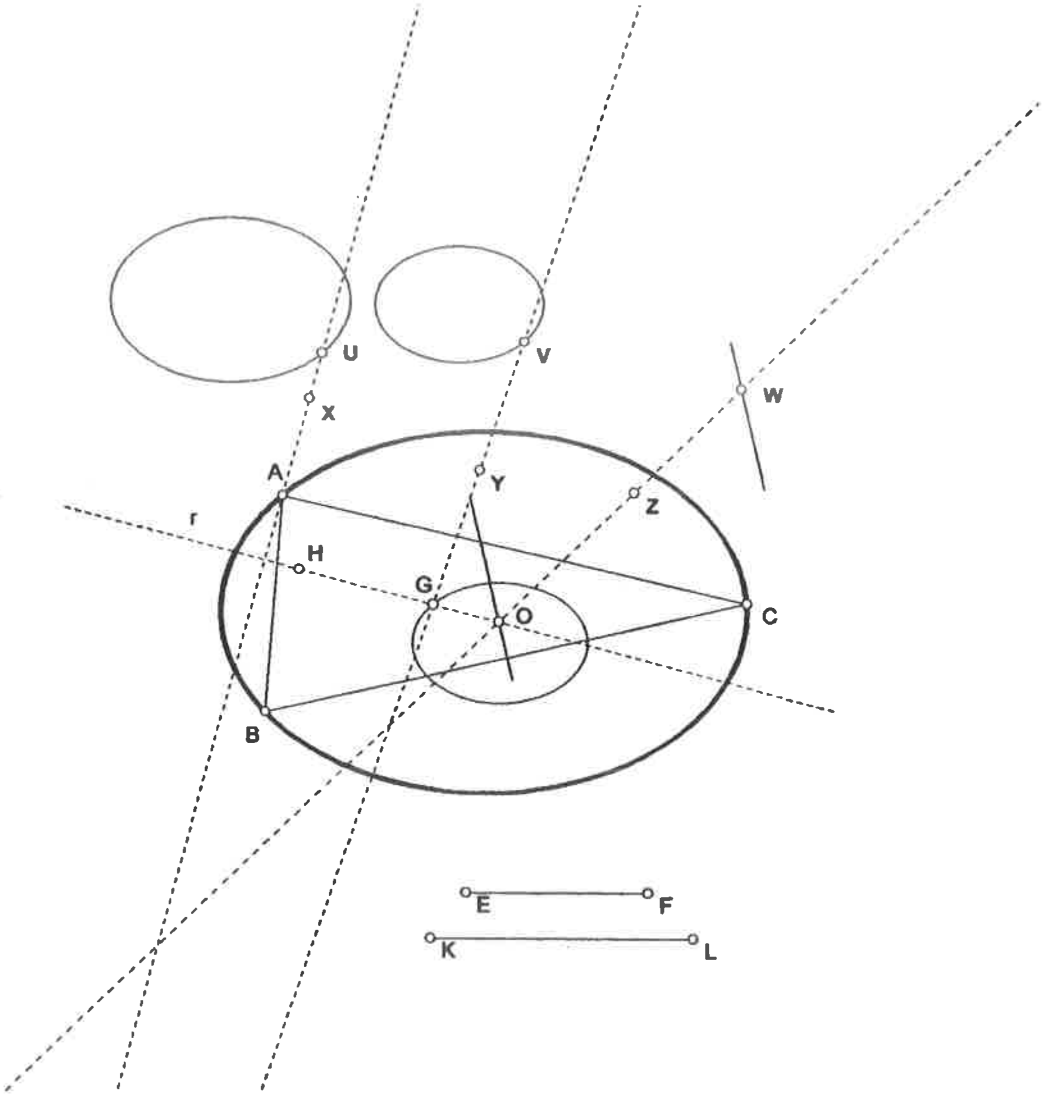

Fig. 6

♦ Para una hipérbola y una parábola, seguiremos los mismos pasos que para la elipse, pero para no alargar demasiado este apartado daremos algunos ejemplos de cada caso. Conviene aclarar que el triángulo ABC no tiene porqué estar inscrito cuando se trata de una hipérbola; basta con que sus vértices pertenezcan a la misma; sin embargo, con la párabola sí que se puede hablar de triángulo inscrito.

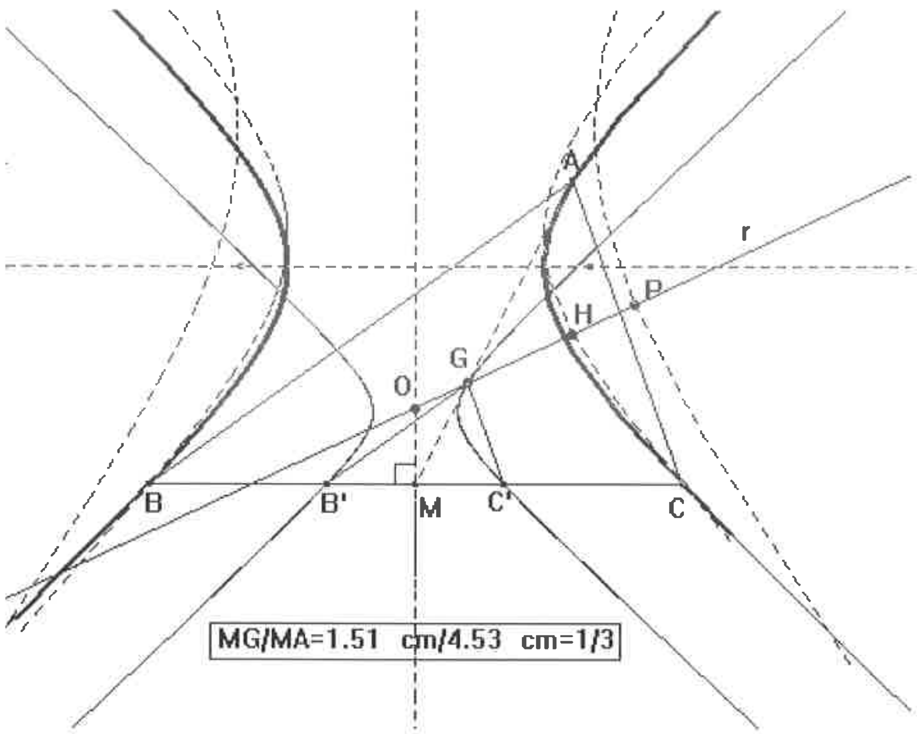

Fig. 7

En la Fig.7 podemos observar los dos triángulos ABC y GB'C', homotéticos según una homotecia de centro M y de razón 1/3. Los vértices de ABC están en la curva base (en grueso) y los de su homotético GB'C' en la hipérbola generada por G cuando A recorre la curva base. P es un punto genérico de la recta de Euler y engendra una hipérbola. Arrastrando este punto con el ratón va generando las distintas hipérbolas, salvo en el punto O, que como ya sabemos, engendra un elemento rectilíneo. La hipérbola engendrada por H pasa por los vértices que permanecen fijos: B y C.

En la Fig. 8, se han tenido en cuenta, los lugares geométricos generados por puntos de los lados AB y AC y de sus prolongaciones. Como ya se ha dicho, los centros de homotecia de cada par de hipérbolas son los respectivos vértices B y C. El conjunto de estas homotecias, al tener un centro fijo, tiene estructura grupo.

Mediante el ratón, podemos hacer que el punto C2 se deslice sobre el lado AB; cuando C2 coincida con B la hipérbola se transforma en un punto, y cuando pase por A se transforma en la curva base.

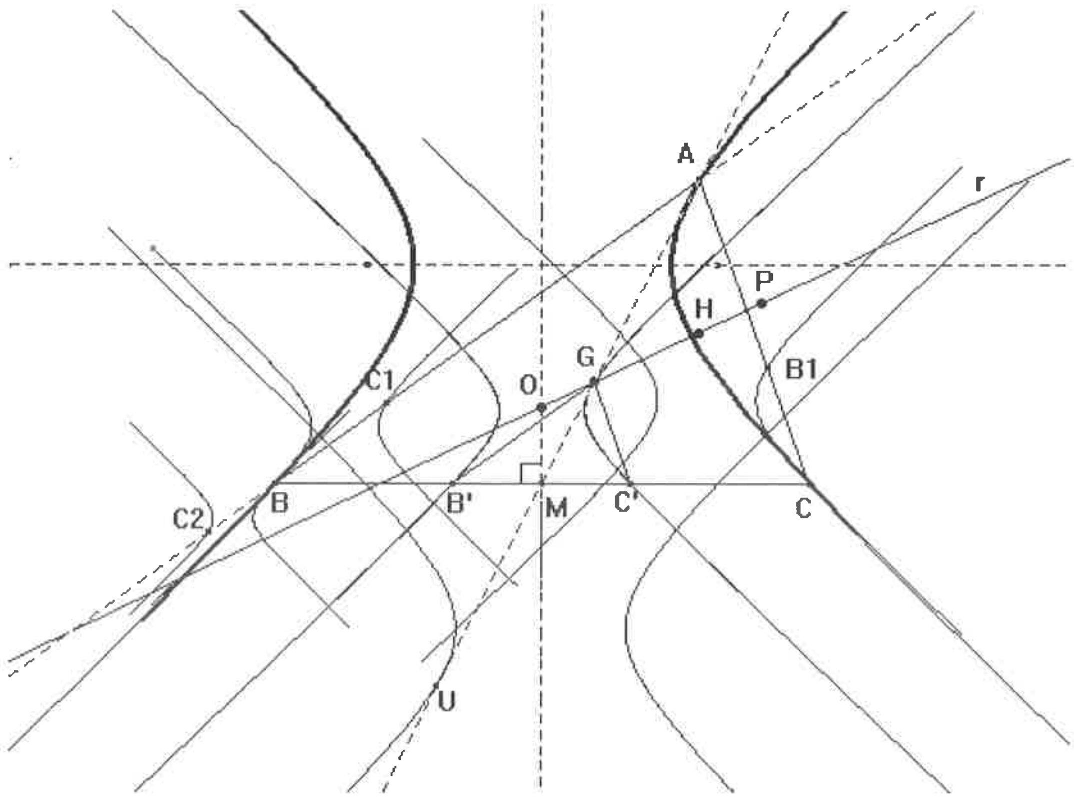

Fig. 8

También el conjunto de todas las homotecias debidas a puntos de la recta AM tiene estructura de grupo. Al arrastrar con el ratón un punto genérico U de dicha recta se llega también a la curva base. Por tanto, cuando A recorre su trayectoria, hay, al menos, tres maneras distintas de alcanzar la curva base (si no se tienen en cuenta las infinitas maneras que tienen los puntos de una recta arbitraria de reproducirla).

En la Fig. 9, se ha dibujado una parábola y los distintos lugares generados por la recta de Euler cuando A recorre la curva base y permanecen fijos B y C. Todo lo dicho para la elipse y la hipérbola es aplicable a la parábola, con una ligerísima diferencia: el punto O genera en este caso una semirrecta, en la hipérbola una recta y en la elipse un segmento, lo que está en consonancia con los puntos reales impropios de las citadas cónicas.

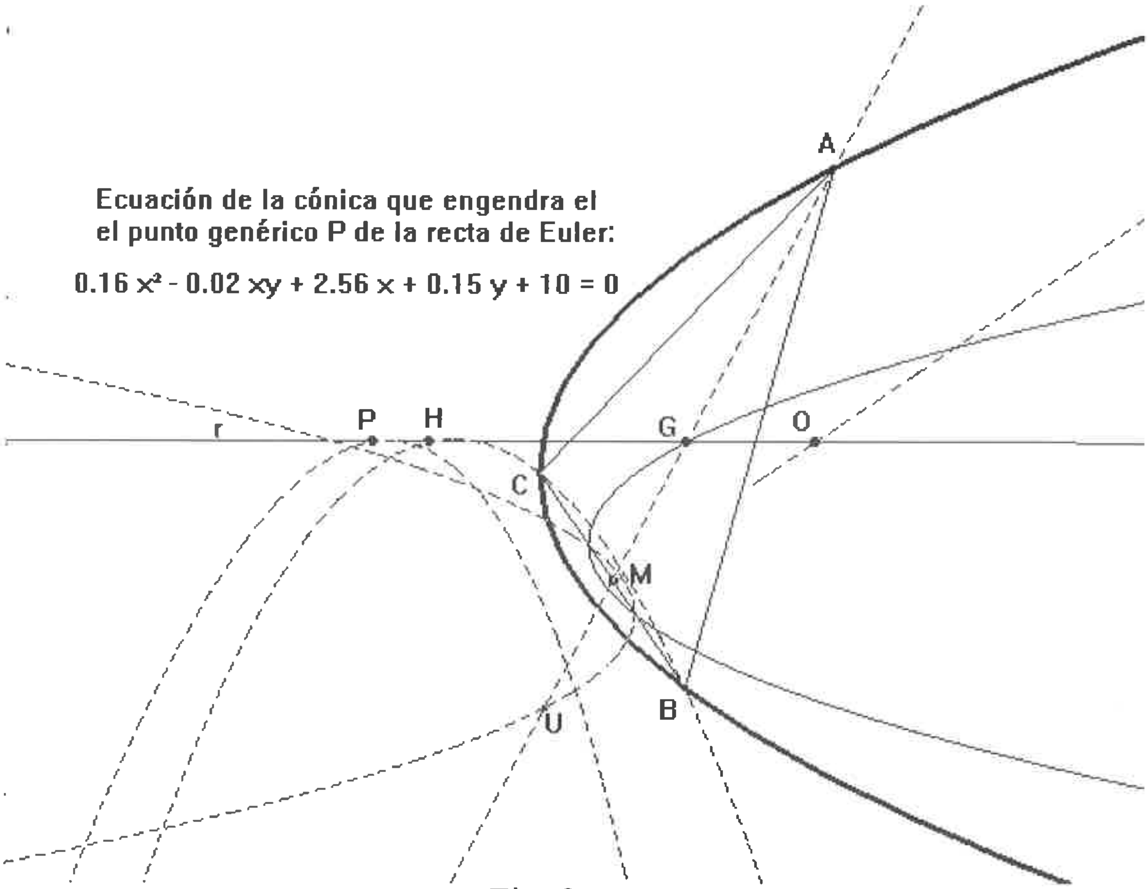

Fig. 9

Todas las parábolas que se forman al arrastrar la generada por un punto genérico U de la recta AM tienen sus ejes paralelos al de la curva base; pero, al pasar por U, y después de reducirse a un punto, cambian de sentido
(en la Fig. 10 las dos parábolas generadas por U y U_1).

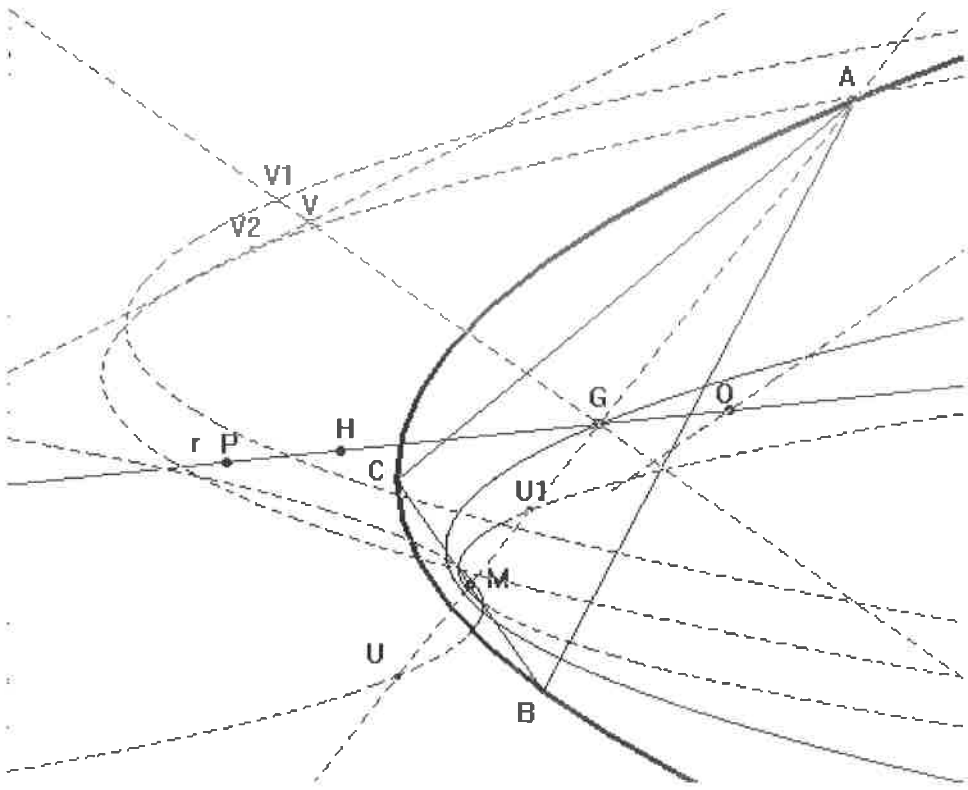

Fig. 10

En la Fig.10 se ha trazado una recta arbitraria por G, con las salvedades establecidas, y los puntos V y V_1 en la misma. Por V se ha trazado otra recta arbitraria y en ella otro punto V_2, y así sucesivamente. Pues bien todas las curvas generadas por los puntos V_1, V_2, ... , son iguales a la generada por G, pues no se ha hecho otra cosa que trasladarla según los vectores GV_1, GV_2, ... Los puntos de las rectas trazadas por A y O, de forma arbitraria y también con las salvedades establecidas, tienen un comportamiento análogo, pero reproduciendo, respectivamente, la curva base y la semirrecta.

- Casos particulares:

a) El triángulo esté inscrito en una circunferencia.

Entonces, tal como se ve en la Fig. 11, todos los lugares resultantes serán circunferencias. El lugar generado por el punto O, tal como habíamos anunciado, se reduce al mismo punto O, que realmente es una

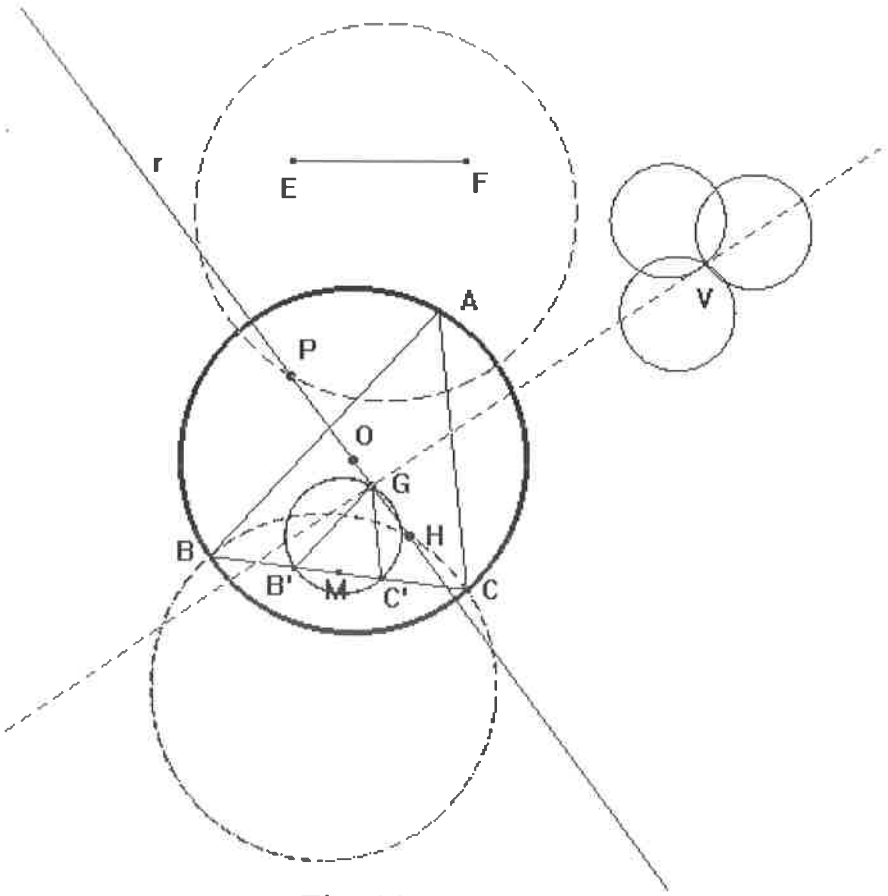

Fig. 11

circunferencia de radio nulo.

Obsérvese que la figura generada por H, ortocentro del triángulo, pasa por los vértices que permanecen fijos. Hemos trazado una recta arbitraria por G y un punto genérico V en la misma. Las tres circunferencias que aparecen se justifican dado que, esta vez, los tres vértices de ABC han recorrido, separadamente, la trayectoria circular.

b) El triángulo tenga sus vértices en dos rectas que se cortan.

Como se trata de una hipérbola degenerada, se tendría que comportar de manera análoga a como se comporta una hipérbola.

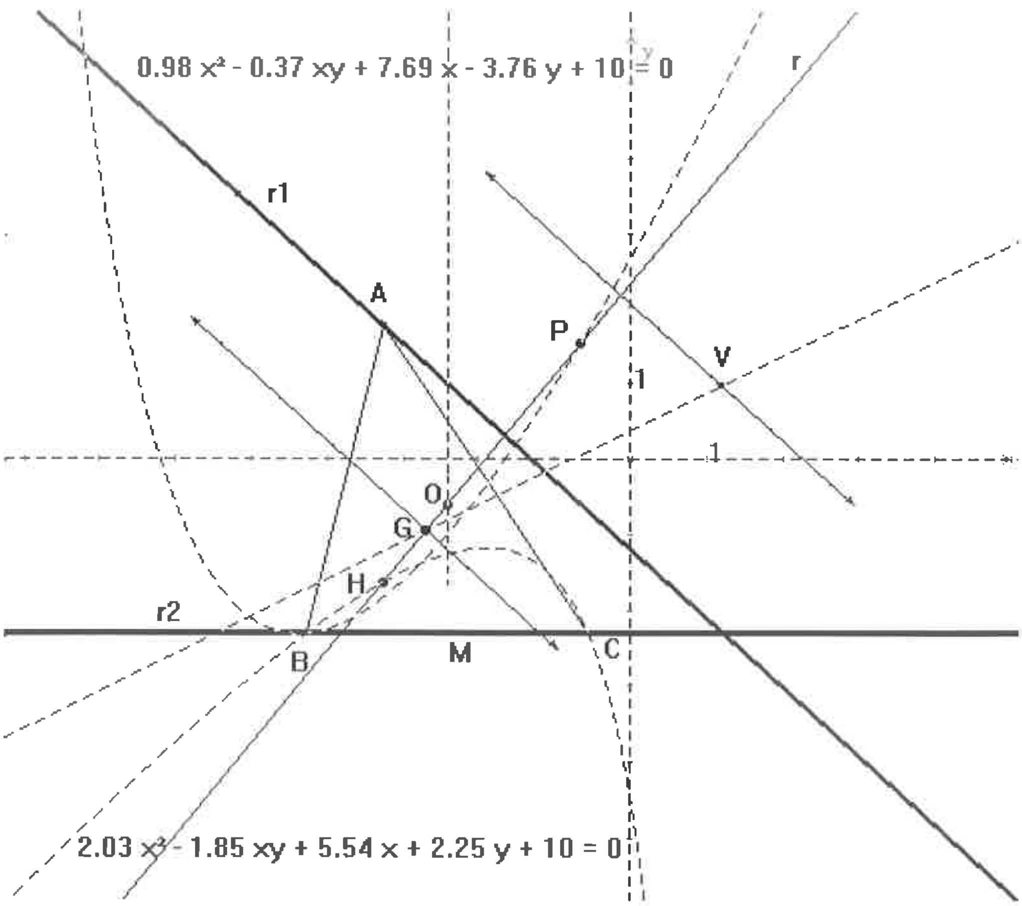

Fig. 12

En la Fig. 12 se observa cómo un punto genérico P de la recta de Euler va generando hipérbolas cuando se mueve a lo largo de dicha recta, pero con dos excepciones: los puntos O y G. El punto O genera una semirrecta perpendicular al lado BC por su punto medio. ¿ Qué sucede con el punto G, que aparentemente tendría que generar dos rectas que, pasando por dicho punto, fuesen paralelas a r_1 y r_2? La respuesta es muy sencilla, tendría que generar lo que efectivamente aparece en la figura; esto es, una recta paralela a r_1, ya que el punto A sólo puede recorrer la recta r_1 (pues si recorriese las dos desaparecería el triángulo), y por tanto, reproduce fielmente su trayectoria. La misma explicación hay que dar para la semirrecta que genera O, en lugar de una recta. Finalmente, por P y H pasan dos hipérbolas (en la figura sólo una rama de cada una de ellas), cuyas ecuaciones analíticas, facilitadas por el Cabri, se adjuntan.

c) El triángulo tenga sus vértices en dos rectas paralelas no coincidentes.

Dos rectas paralelas, coincidentes o no, constituyen una parábola degenerada. Tal como se indica en la Fig. 13, los vértices del triángulo ABC están situados sobre ellas. Las rectas r_1 y r_2 harían de curva base, aunque, como en el caso anterior, A se mueve solamente sobre una de ellas.

Como hasta ahora hemos hecho, el vértice A es el que se mueve, por ejemplo, sobre r_1, mientras que B y C permanecen fijos sobre r_2.

Los puntos de la recta de Euler, salvo G y O, generan parábolas. Como siempre, O genera un elemento rectilíneo (semirrecta en este caso) perteneciente a la mediatriz de BC, y G, la curva base (en este caso la recta r_1, que sería doble si A se pudiese mover, a la vez, sobre las dos rectas).

En color gris, se ha dibujado también el lugar geométrico generado por la recta de Euler, como envolvente de las infinitas rectas que genera el punto A en su trayectoria.

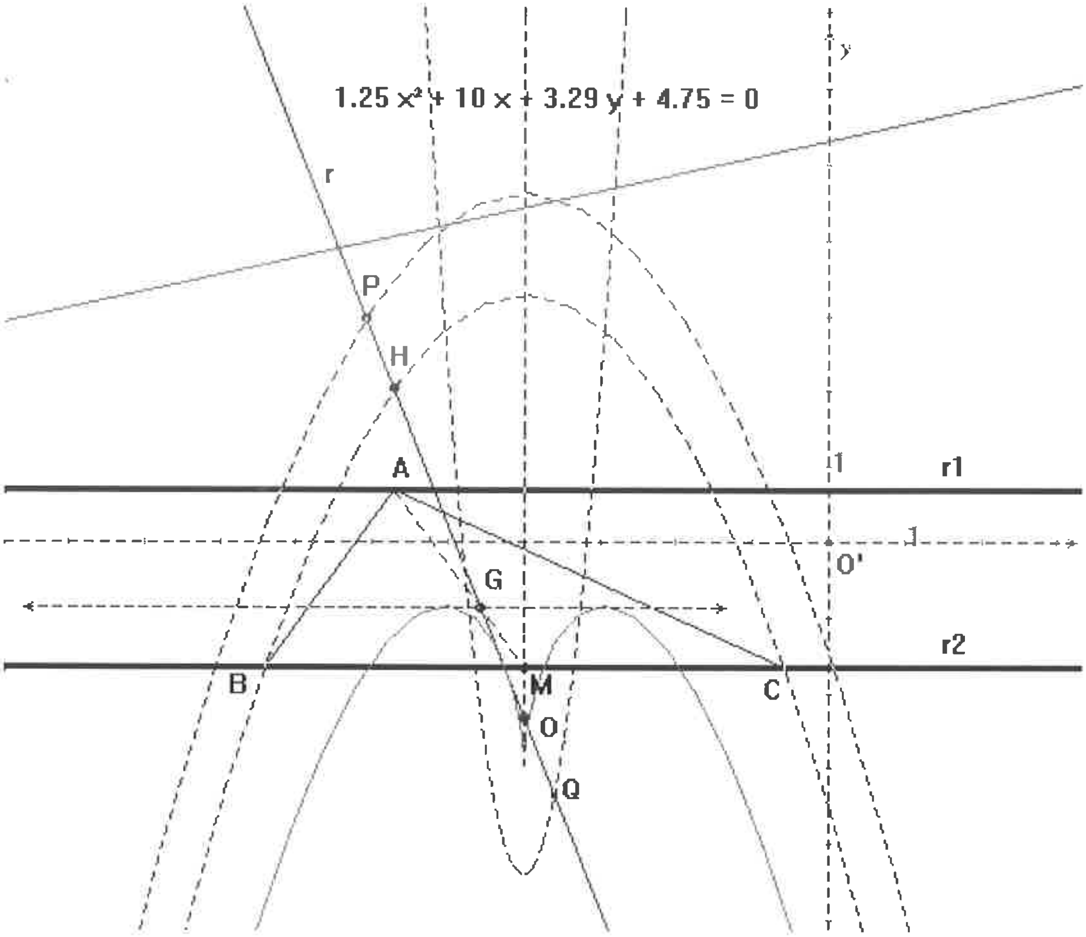

Fig. 13

Al arrastrar con el ratón el punto P van apareciendo diferentes parábolas, de ejes paralelos a la mediatriz de BC, y que cambian de concavidad cuando P rebasa el punto G (véase la generada por Q).

Los puntos de los lados AB y AC y los de sus prolongaciones generan rectas, como era de esperar.

Finalmente, si el que permanece fijo es A en r_1 y se mueve B o C en r_2, las parábolas que generan los puntos de la recta de Euler se transforman en rectas que van cambiando de orientación a medida que se mueve P (esto último no aparece reflejado en la figura).

Triángulo con los vértices en el contorno de un polígono cualquiera

- El triángulo ABC está inscrito en otro triángulo RST:

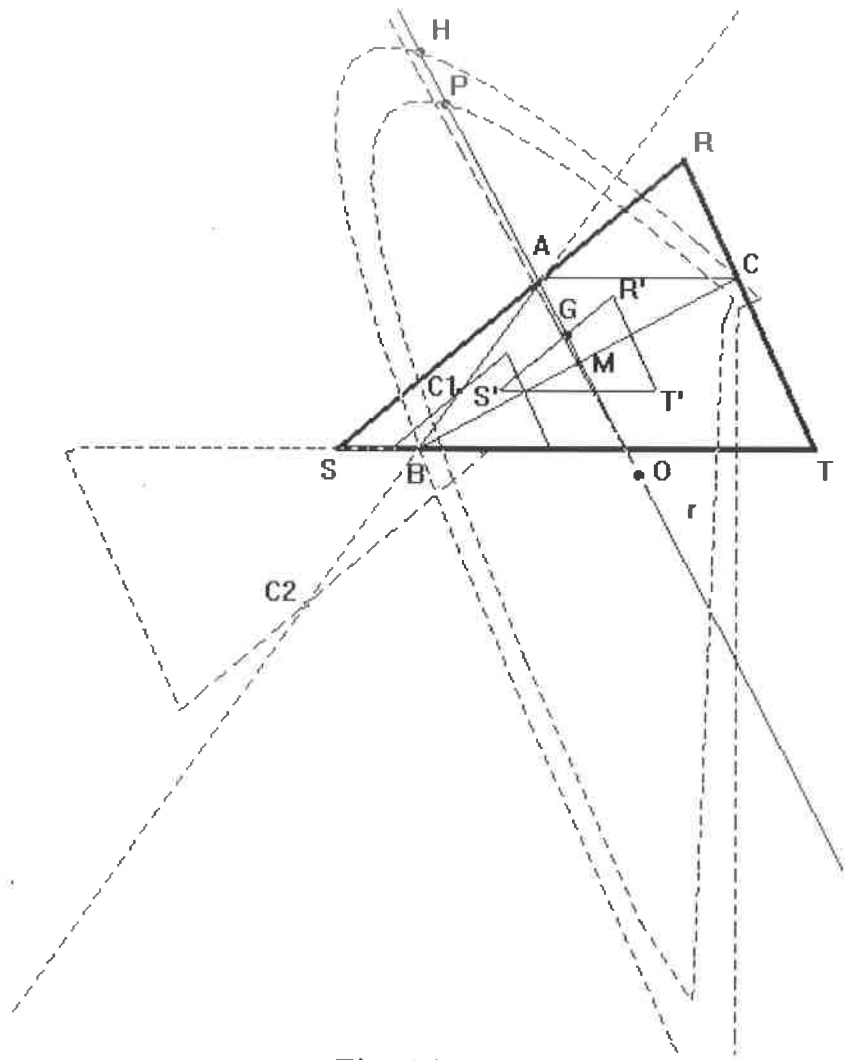

Fig. 14

Todas las regularidades se cumplen perfectamente: O genera un segmento perteneciente a la mediatriz de BC; G origina un triángulo R'S'T', homotético de RST, de centro M y de razón 1/3; los puntos de las rectas AB y AC generan triángulos homotéticos de RST, con centros en B y C, respectivamente, de razón positiva para los puntos pertenecientes a dichos lados (C_1 en AB), y de razón negativa para los de sus prolongaciones (C_2 en su prolongación); etc.; pero los puntos de la recta de Euler, salvo G y O, generan figuras que ya nada tienen que ver con la curva base (ver en la Fig. 14 los generados por P y H).

♦ El triángulo ABC tiene sus vértices en el contorno de un polígono cóncavo:

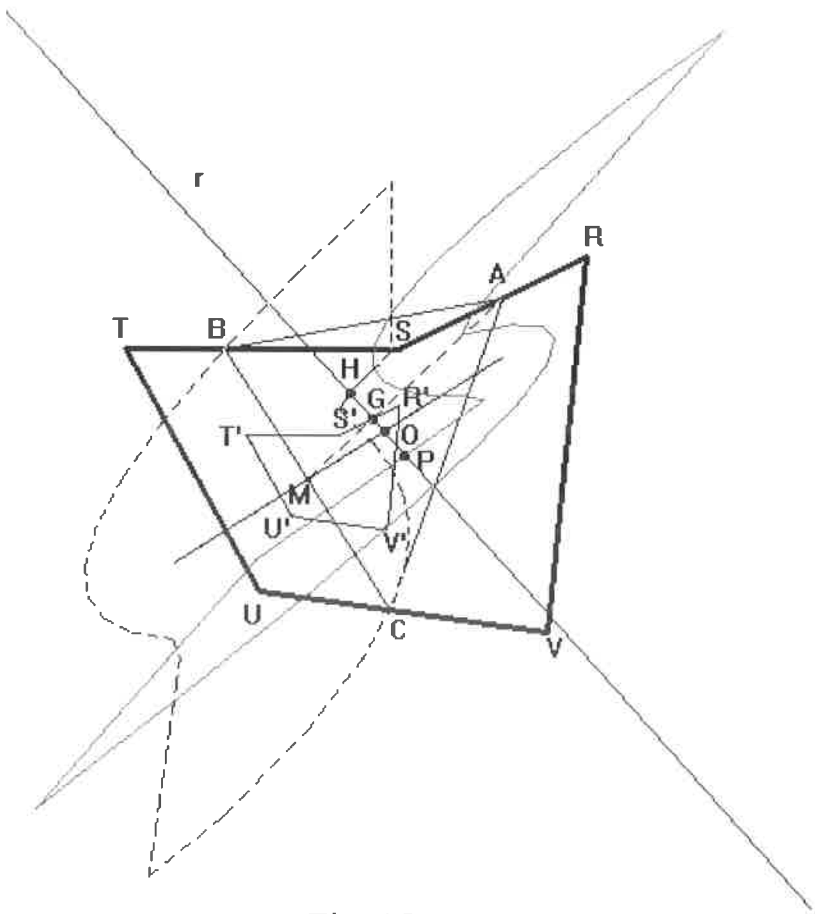

Fig. 15

Lo dicho para el primer caso es de aplicación al polígono de la Fig. 15.

Obsérvese, una vez más, cómo el lugar generado por H pasa por B y C, extremos del lado opuesto al vértice que recorre la curva base (en este caso los lados de un polígono cóncavo). En color gris y en trazo continuo, la figura generada por un punto genérico P de la recta de Euler.

Dos cúbicas: la parábola cúbica y la cisoide

- La parábola cúbica como curva base:

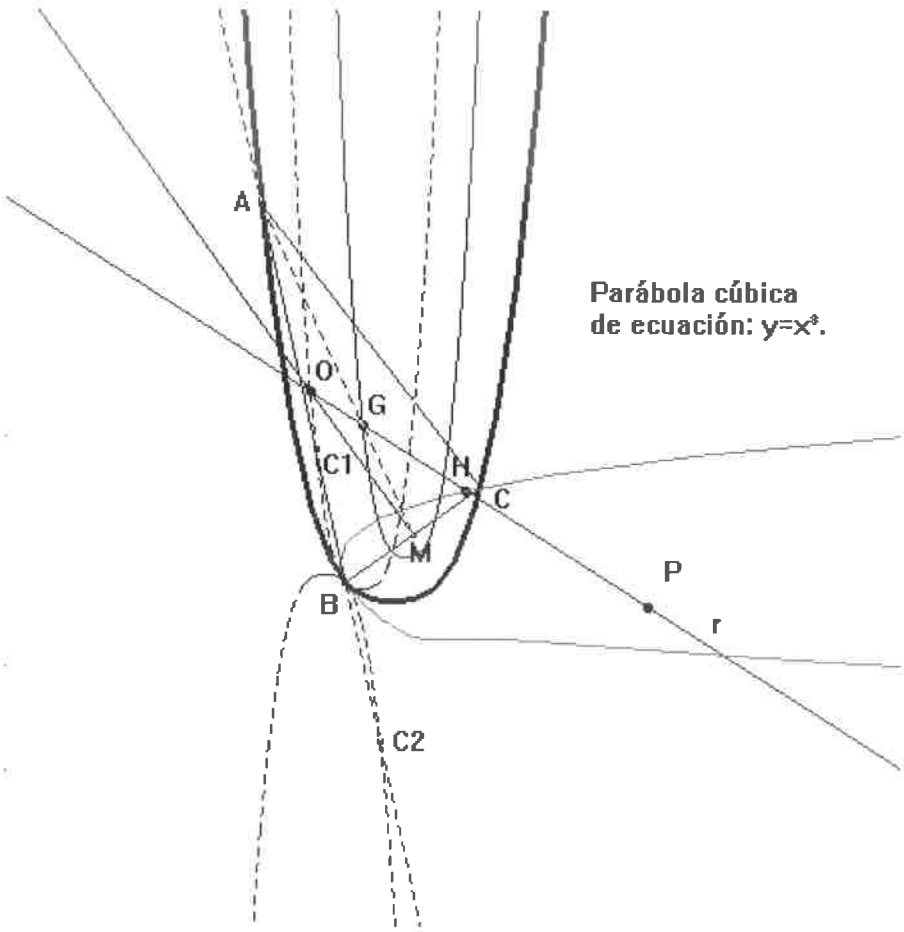

Fig. 16

En la Fig. 16 se observan las regularidades de siempre. El lugar generado por P, que no está en la figura, es muy parecido al generado por H (de trazo continuo y en gris); pero, ninguno de los dos se parece a la cúbica base.

C_1 y C_2, pertenecientes a lado AB y a su prolongación, generan dos cúbicas homotéticas de centro B.

- La cisoide como curva base:

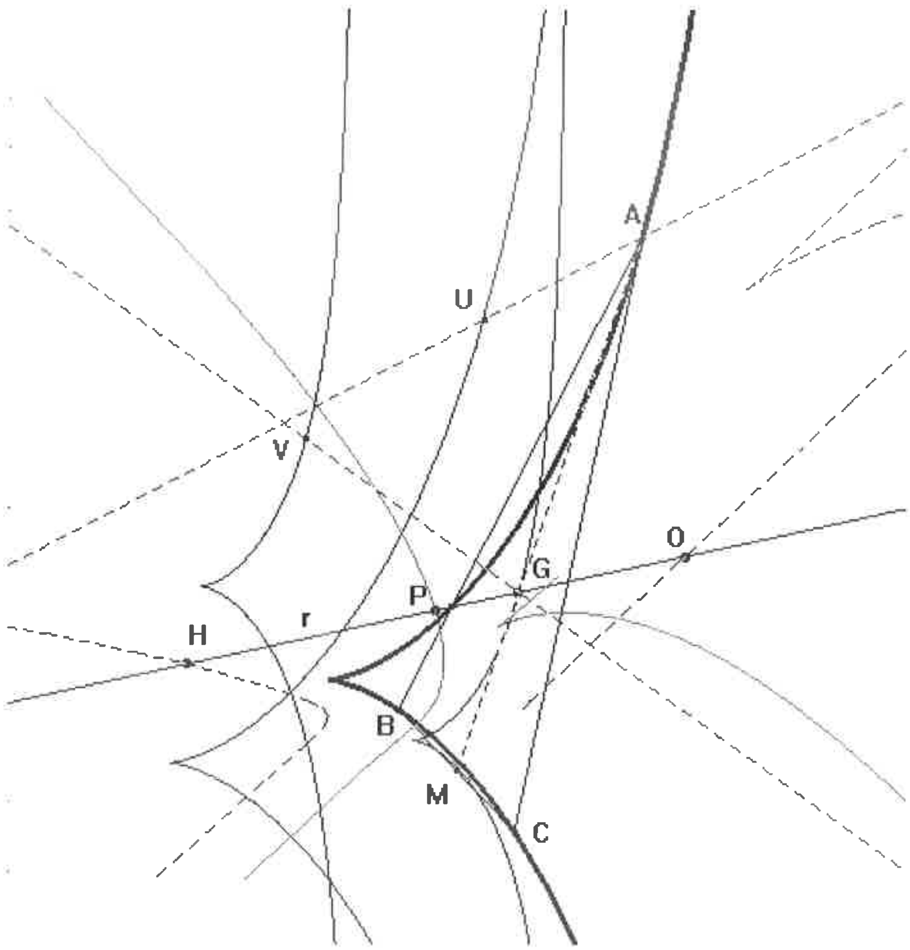

Fig. 17

Además de las regularidades consabidas, se ha dibujado en trazo continuo y en color gris el lugar generado por P, que consta de dos ramas al igual que el generado por H, que esta vez no pasa por B y C; ello se explica fácilmente: al estar B y C fijos, no coinciden en este caso, con ninguno de los ortocentros del triángulo móvil.

Si la cisoide generada por el punto U se lleva al punto A coincidirá con la curva base. Lo mismo sucederá si se arrastra la generada por el punto V que ha de coincidir con la generada por G.

Tres cuárticas: la deltoide, la peonza y la "bala"

- La deltoide o hipocicloide de tres retrocesos como curva base:

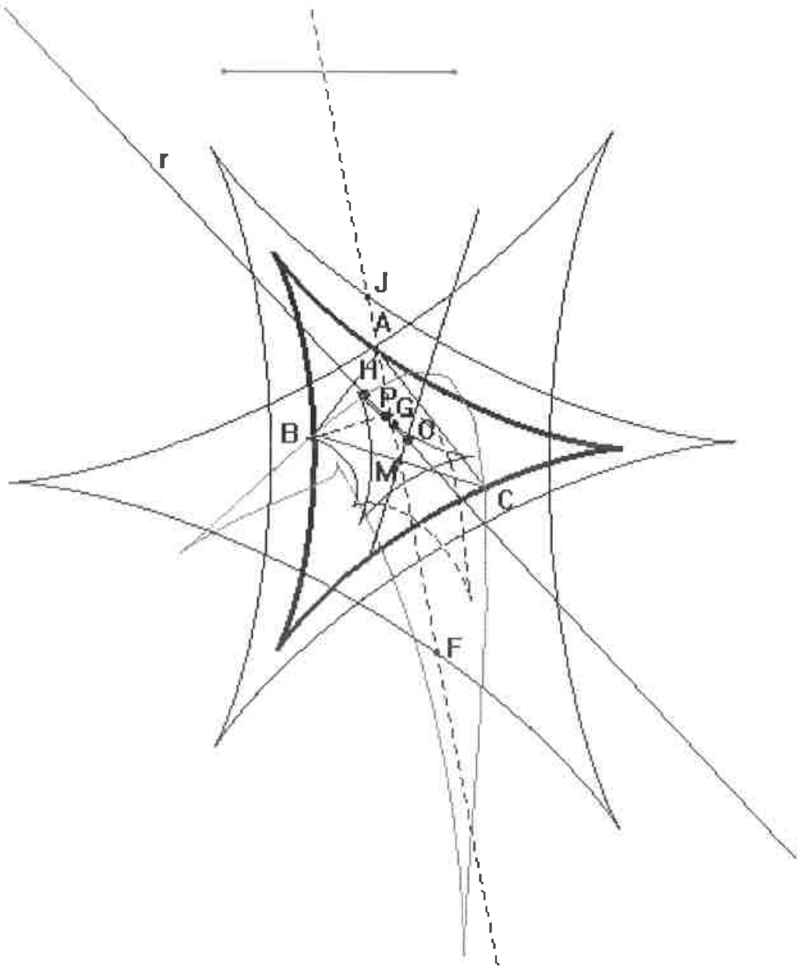

Fig. 18

En esta Fig. 18 aparece el lugar engendrado por H, en color gris y en trazo continuo, y el de P, en trazo discontinuo; ambos conservan los tres puntos de retroceso. También están los generados por dos puntos F y J de AG, con orientaciones diferentes.

Aunque ya se ha dicho en otra ocasión, el Geometer resuelve el lugar geométrico de un punto de una recta arbitraria que pase por A, G u O, con las salvedades correspondientes, mediante una homotecia de centro un punto arbitrario de dicha recta y de razón UQ/UA (en la que pasa por A), VS/VG (en la que pasa por G) y WT/WO (en la que pasa por O). Los demás casos, ya han sido explicados con las curvas bases anteriores.

Todavía, cabe preguntar si la recta de Euler interfiere cuando una recta arbitraria la corta. Pues bien, hasta que no se haga efectiva la intersección no hay problema alguno, pues una vez hecha dicha intersección, la recta arbitraria estará sometida a una nueva ligadura que puede hacer variar los resultados que se esperaban al hallar el lugar geométrico de un punto de dicha recta arbitraria.

- La peonza como curva base:

Los lugares generados por H y P son deformaciones de la peonza. Lo mismo les sucede a los generados por los puntos de la recta AO (el punto J en la fig.19), salvo el punto O. También se ha dicho ya que los puntos de la recta AG originan figuras homotéticas de la curva base y de centro M, formando un conjunto (las homotecias) con estructura de grupo (K es un punto de la recta AG, exterior al segmento AM; la razón de homotecia MK/MA, al ser negativa, cambia el sentido de la peonza).

Lo mismo les ocurre a los puntos de la rectas AB y AC con centros en B y C, respectivamente (sólo se han dibujado los lugares de los puntos B_1 y B_2 de AC).

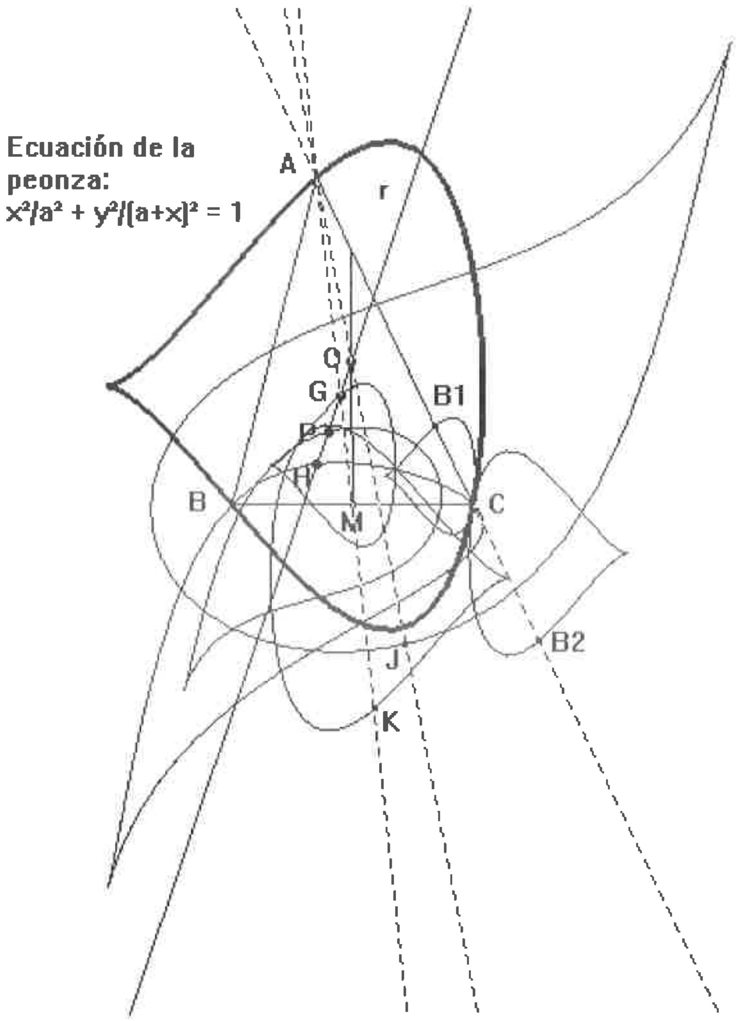

Fig. 19

♦ La "bala" como curva base:

Esta vez no hemos querido recargar demasiado la curva base. Sólo hemos dibujado, con la ayuda del Geometer, lugares generados por puntos de la recta de Euler y un punto arbitrario de AM. Insistimos, una vez más, que el lugar generado por H, ortocentro de ABC, pasa además por B y C cuando A recorre su trayectoria (ver Fig. 20).

El punto S de AM genera una "bala" homotética de la curva base, de razón SM/AM y de centro M, como es evidente. Al ser la razón negativa, la curva generada cambia de sentido.

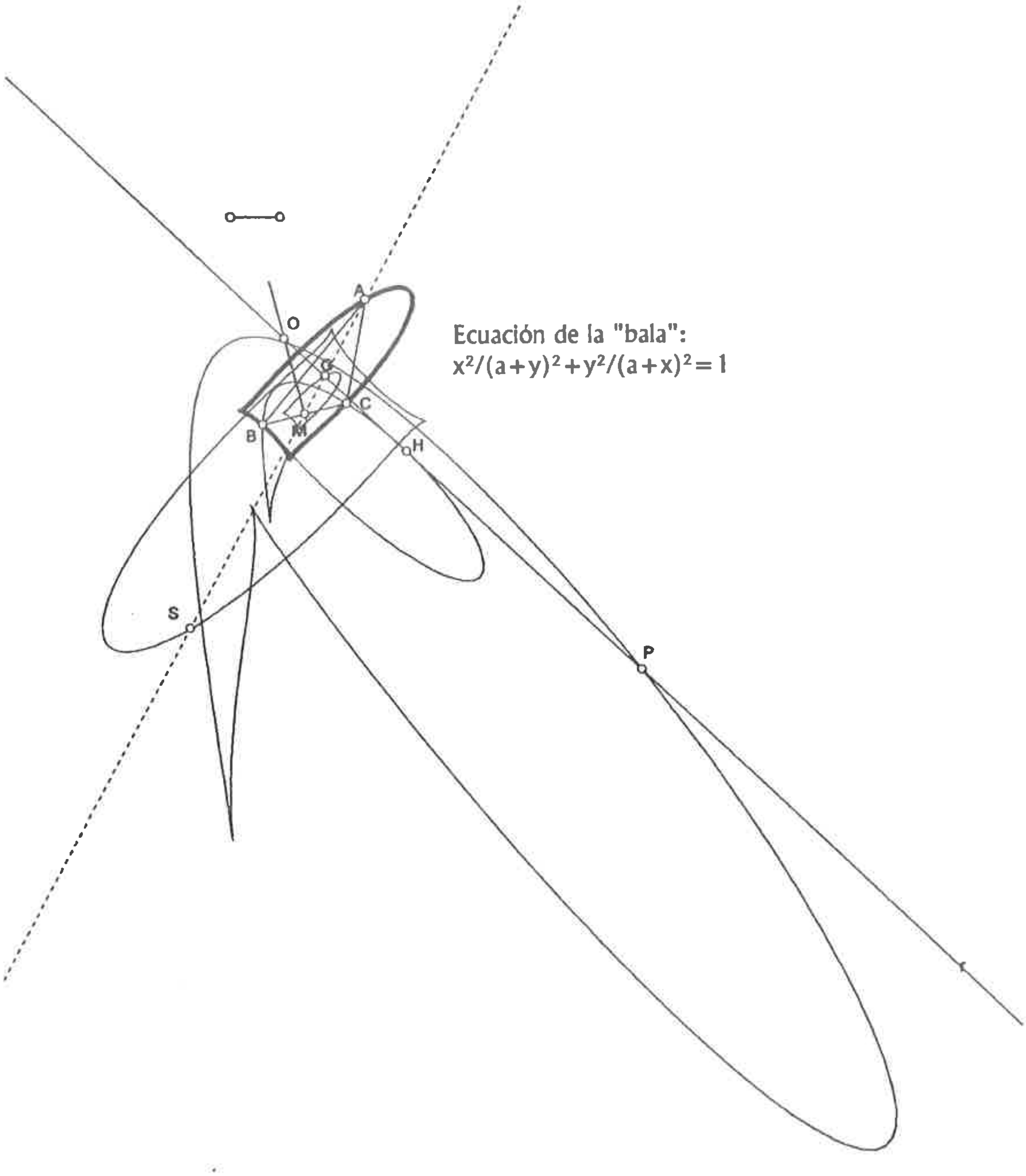

Fig. 20

Dos curvas de 6º grado: nefroide y astroide

♦ La nefroide o epicicloide de dos retrocesos:

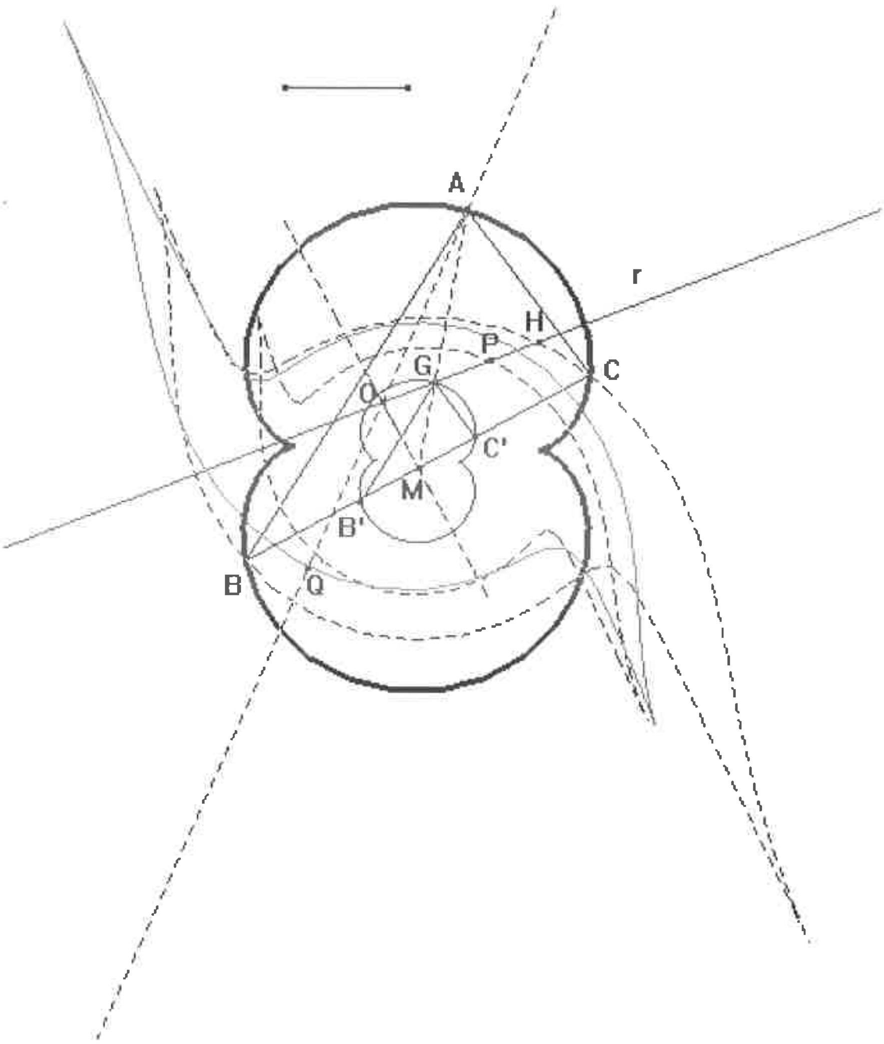

Fig. 21

En esta Fig. 21 aparecen los lugares generados por puntos de la recta r de Euler y el de un punto de la recta AO. Se observa que H, P y Q generan nefroides deformadas que conservan los dos puntos de retroceso. La de Q viene con trazo continuo y en color gris.

♦ Astroide o hipocicloide de cuatro retrocesos:

Aparte de las regularidades de siempre, se puede observar, en trazo continuo y en color gris, el lugar geométrico generado por H, que, aunque conserva los cuatro puntos de retroceso, difiere bastante de la astroide; lo mismo le ocurre al generado por P.

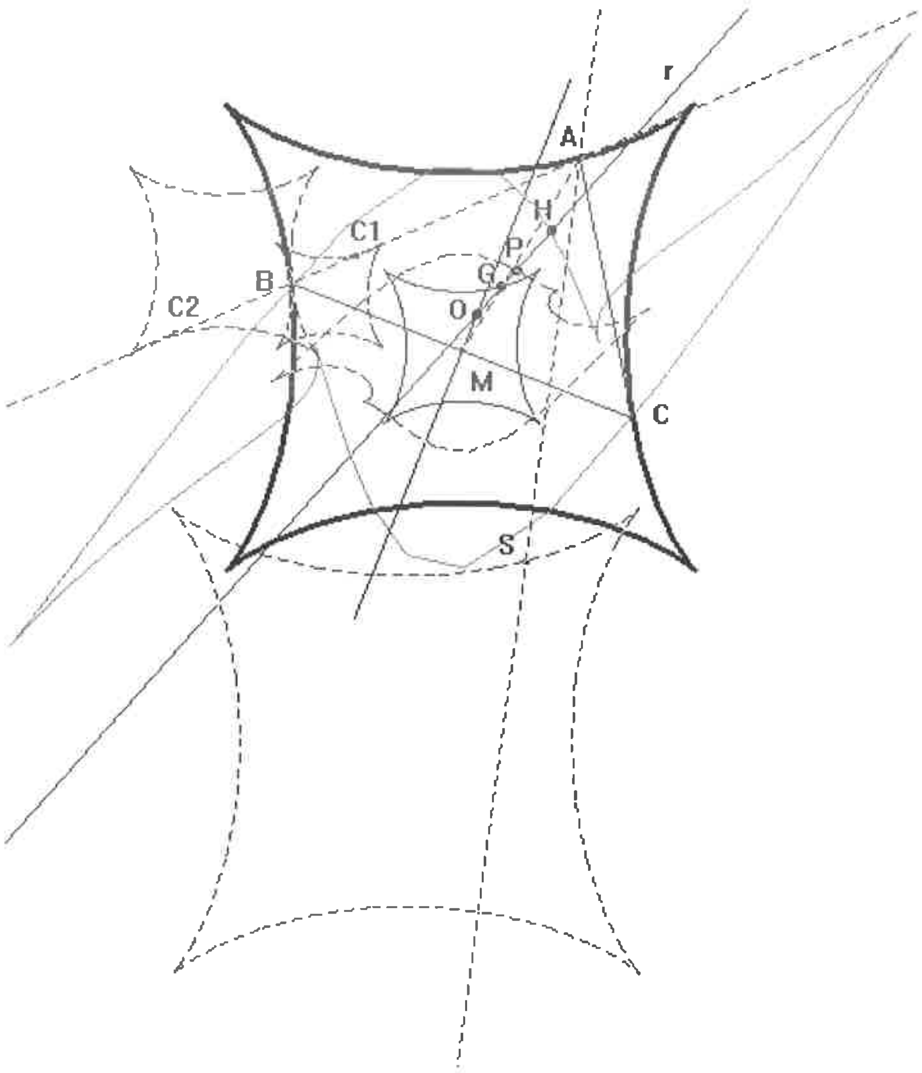

Fig. 22

Tres curvas trascendentes: sinusoide, cicloide y catenaria

- La sinusoide como curva base:

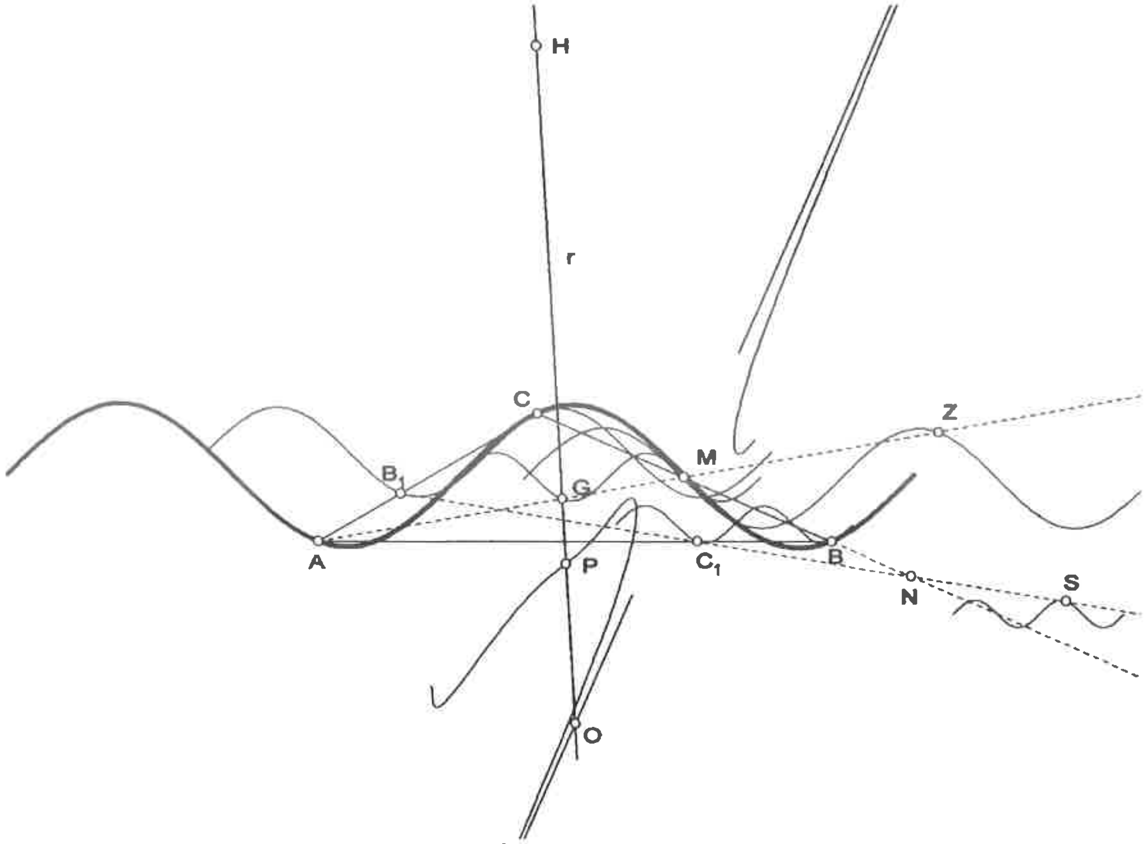

Fig. 23

En esta sinusoide (Fig. 23), se han tenido en cuenta unos cuantos puntos, que van a generar los correspondientes lugares geométricos. Además de los consabidos lugares, generados por G y O, están también los generados por P (que no presenta regularidad alguna), Z, B_1, C_1 y S.

♦ La cicloide como curva base

Los vértices del triángulo están situados en dos arcos consecutivos de cicloide. Tal como indica la Fig. 24, A está en el primer arco y los otros dos vértices en el segundo.

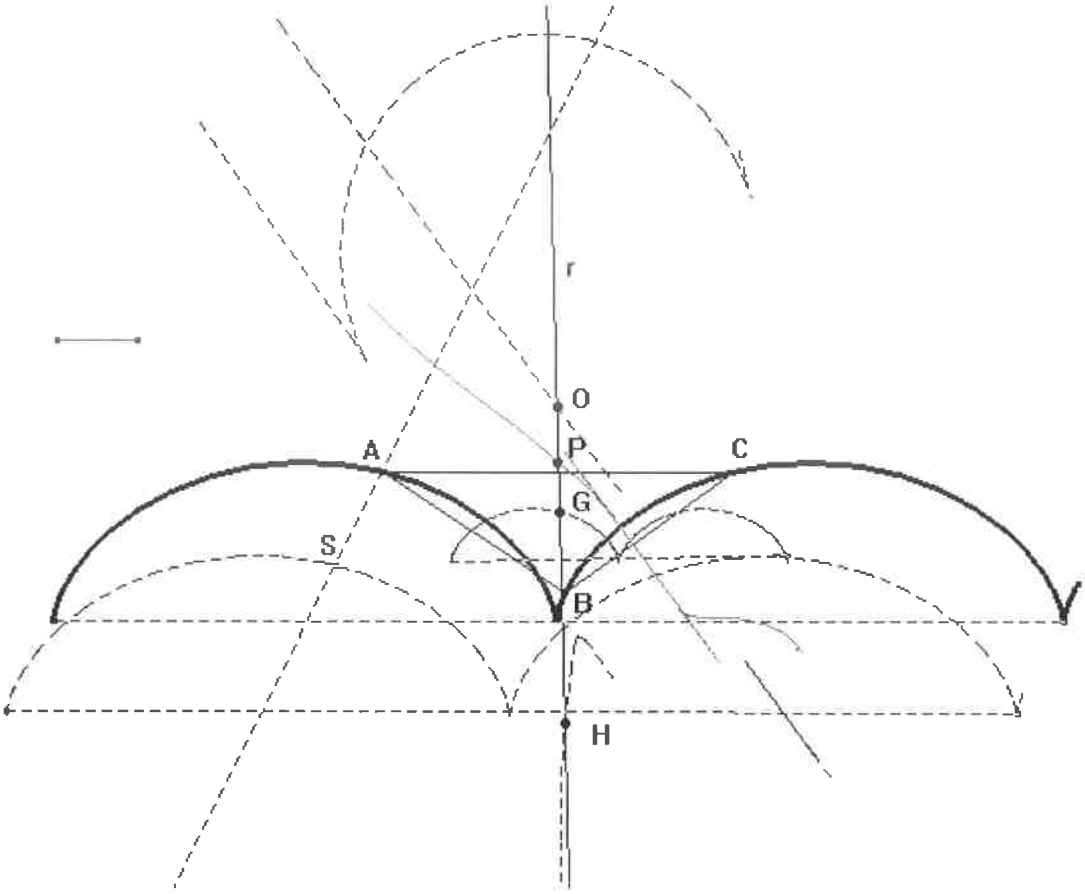

Fig. 24

El lugar generado por H, tampoco pasa esta vez por B y C, lo que indica que, al estar B y C fijos, el segmento AB no es en ningún momento perpendicular a BC (lo mismo se tiene para el segmento AC). Moviendo B o C sobre la cicloide, siempre es posible conseguir el ángulo recto.

Además de las regularidades de siempre (generadas en este caso por G, O y S), el lugar generado por P, punto genérico de la recta de Euler, está en gris y trazo continuo.

- La catenaria como curva base:

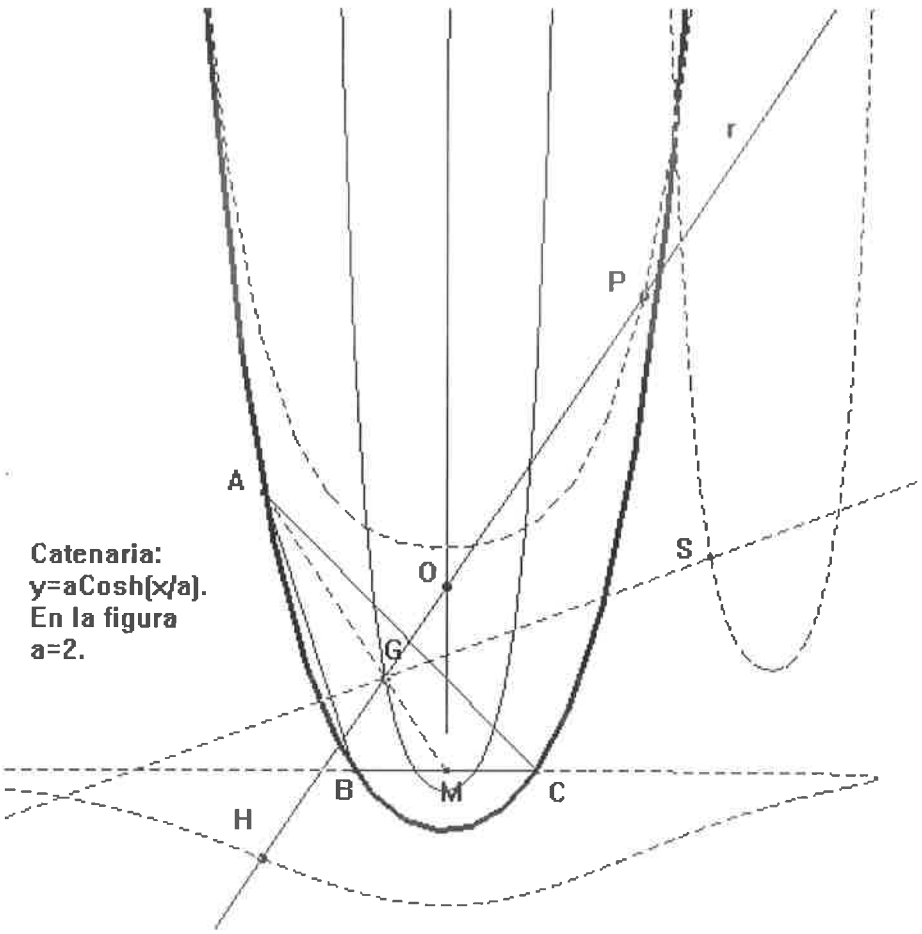

Fig. 25

Los puntos H y P de la recta de Euler no engendran catenarias (ni ninguno otro que no sea G).

Ya hemos dicho que el Cabri determina el lugar geométrico generado por un punto arbitrario S, perteneciente a una recta arbitraria que pasa por G, mediante una traslación de vector GS; en este caso resulta una catenaria igual a la generada por G (un comportamiento análogo se tiene para la que pasa por A).

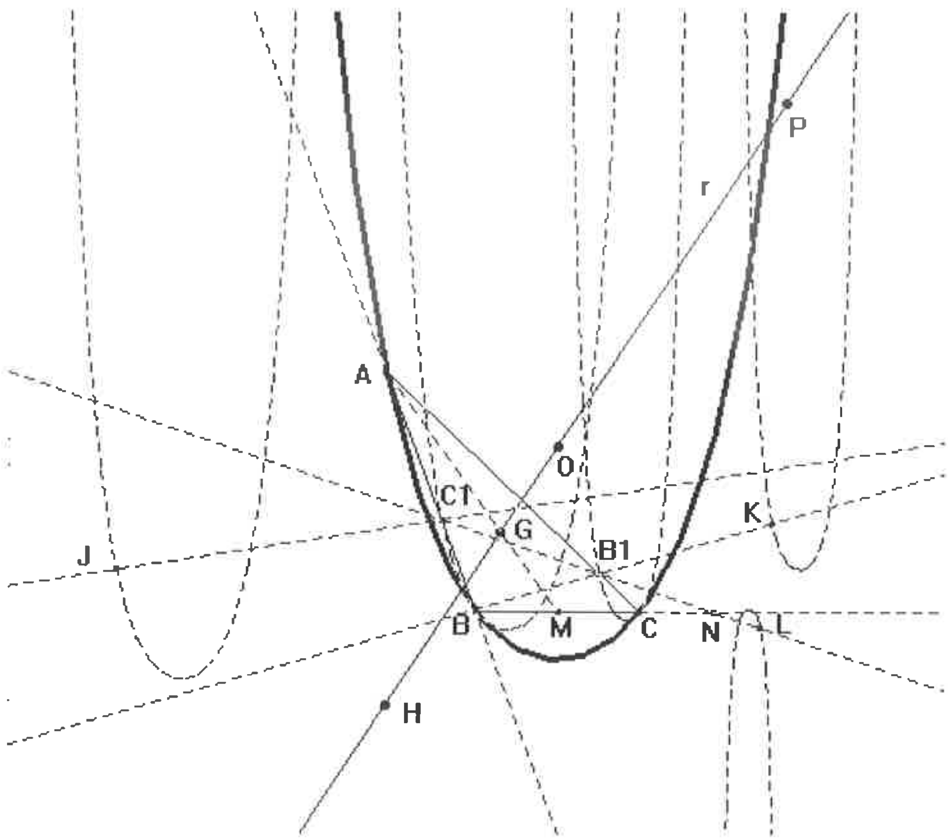

Fig. 25 bis

En la fig. 25 bis se pone de manifiesto lo que sigue:

Todo punto J de una recta que pase por C_1 genera una catenaria igual a la generada por C_1 (traslación de vector C_1J, de acuerdo con el Cabri).

Todo punto K de una recta que pase por B_1 genera también una catenaria que coincide con la generada por B_1 (al igual que J).

Cada punto L de la recta C_1B_1 origina una figura que es homotética de la generada no sólo por C_1, sino también por B_1 y de centro el punto N de intersección de BC con C_1B_1.

Por otro lado, podemos comprobar fácilmente que el producto de dos homotecias de centros diferentes es otra homotecia de centro alineado con los otros dos y de razón el producto de las razones de cada una de ellas. En efecto, siguiendo la Fig. 25 bis, se verifica lo que sigue:

Se pasa de la catenaria generada por C_1 a la curva base mediante una homotecia de razón $k_1 = \frac{BA}{BC_1} = \frac{3,44}{1,35} \cong 2,54$ y de centro B. Del mismo modo, se pasa de la curva base a la generada por B_1 mediante otra homotecia de razón $k_2 = \frac{CB_1}{CA} = \frac{0,37}{4,61} \cong 0.08$ y de centro C. Se pasará, por último, de la catenaria generada por C_1 a la generada por B_1 mediante la homotecia de razón $k_3 = \frac{B_1N}{C_1N} = \frac{0,65}{3,16} \cong 0,20$ (que coincide con $k_1k_2 = 2,54 \times 0,08 \cong 0,20$) y de centro N.

Asimismo, se comprobará que todas las catenarias generadas por puntos de la recta C_1B_1 son homotéticas, dos a dos, con centro en N. Este conjunto de homotecias (al ser fijo el centro) tiene estructura de grupo.

Lógicamente, todo esto se verificará para los distintos puntos de las infinitas rectas C_iB_i, pasando a ser la recta BC el lugar geométrico de los centros de los infinitos conjuntos de homotecias.

Ni que decir tiene, que estas propiedades se cumplirán siempre, cualquiera que sea la curva base.

Consideraciones finales

Hemos utilizado unas cuantas curvas algebraicas de distintos grados y otras no algebraicas, y hemos dado unas explicaciones, las más de las veces reiterativas, para comprobar unas *regularidades* que se justifican, fácilmente, mediante la Geometría elemental. ¿Por qué, entonces, tal despliegue de figuras y para qué tantas aclaraciones?

Pues bien, estimamos que las diferentes curvas utilizadas como trayectorias de los vértices de un triángulo, no sólo sirven para comprobar dichas regularidades, sino que ayudan a pensar, facilitan el trazado de lugares geométricos y posibilitan, además, la aparición de nuevas ideas y el (re)descubrimiento de posibles propiedades geométricas.

Por otro lado, si partimos de la gráfica de una determinada curva y de un triángulo de vértices situados en la misma, es posible llevarla a cualquier punto del plano, bien mediante una traslación o bien mediante una homotecia (en este caso, la curva es similar a la primera), y esto, al menos, en tres posiciones diferentes (una para cada vértice en movimiento). Esto, tampoco, es una novedad, pues desde el punto de vista analítico, cualquier curva se puede hacer pasar por un determinado punto del plano. Así se logra, en definitiva, una conjunción de resultados entre la geometría euclídea y la analítica; esto es, un encuentro de dos geometrías, la de la Grecia clásica y la iniciada en Francia en el siglo XVII.

Finalmente, ¿qué pasaría si sólo uno de los vértices del triángulo recorriese la curva base, y los otros dos estuvieran fuera de la misma? Este problema, que ya fue abordado, parcialmente, con las cónicas degeneradas, podría ser materia para un nuevo artículo; pero, adelantaremos que se seguirán cumpliendo las mismas *regularidades* que han sido ya justificadas en este trabajo; sin embargo, los puntos de la recta de Euler (salvo el circuncentro), que generaban cónicas del mismo género que el de la curva base, generarán, ahora, otras curvas diferentes.