BREVE COMENTARIO SOBRE EL *CABRI-GÉOMÈTRE II* Y EL *GEOMETER'S SKETCHPAD*. VENTAJAS E INCONVENIENTES DE UNO Y OTRO

José Martel Moreno

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

En este artículo se hace un breve comentario sobre las ventajas y los inconvenientes de dos paquetes de software, el Cabri-Géomètre II (CG) y el Geometer's Sketchpad (GS).

Está divido en tres apartados. En el primero, se indican algunas de las ventajas del GS; y en el segundo, las del CG. También se incluye en este segundo apartado un pequeño estudio sobre la falsa *lemniscata* y la manera de distinguirla de la verdadera, y un dibujo del triángulo de Sierpinski, construido mediante el cuadro de herramientas Macro.

En el tercero, se informa sobre una nueva versión del GS.

Abstract

This paper is concerned with the advantages and the inconveniences of two software packages, the Cabri-Géomètre II (CG) and the Geometer's Sketchpad (GS).

It is divided in three sections. In the first, we show some advantages of the GS, and in the second, those of the CG. We also include in this second section a short study about the false *lemniscate*, and a drawing of the Sierpinski's gasket, constructed with a Macro.

In the third section, we will inform you about a new version of the GS.

FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA III

J. Martel (2001). *Breve comentario sobre el Cabri-Géomètre II y el Geometer's Sketchpad. Ventajas e inconvenientes de uno y otro, pp. 127-138*

Breve comentario

Expondremos, a continuación, algunas de las ventajas y algunos de los inconvenientes, observados en las versiones 1 del *Cabri-Géomètre II* (CG) y 3 del *Geometer's Sketchpad* (GS), ambas para Windows.

Ventajas del GS

♦ La resolución gráfica del GS es, sin duda alguna, superior a la del CG, como se puede comprobar mediante las figuras 1 y 2.

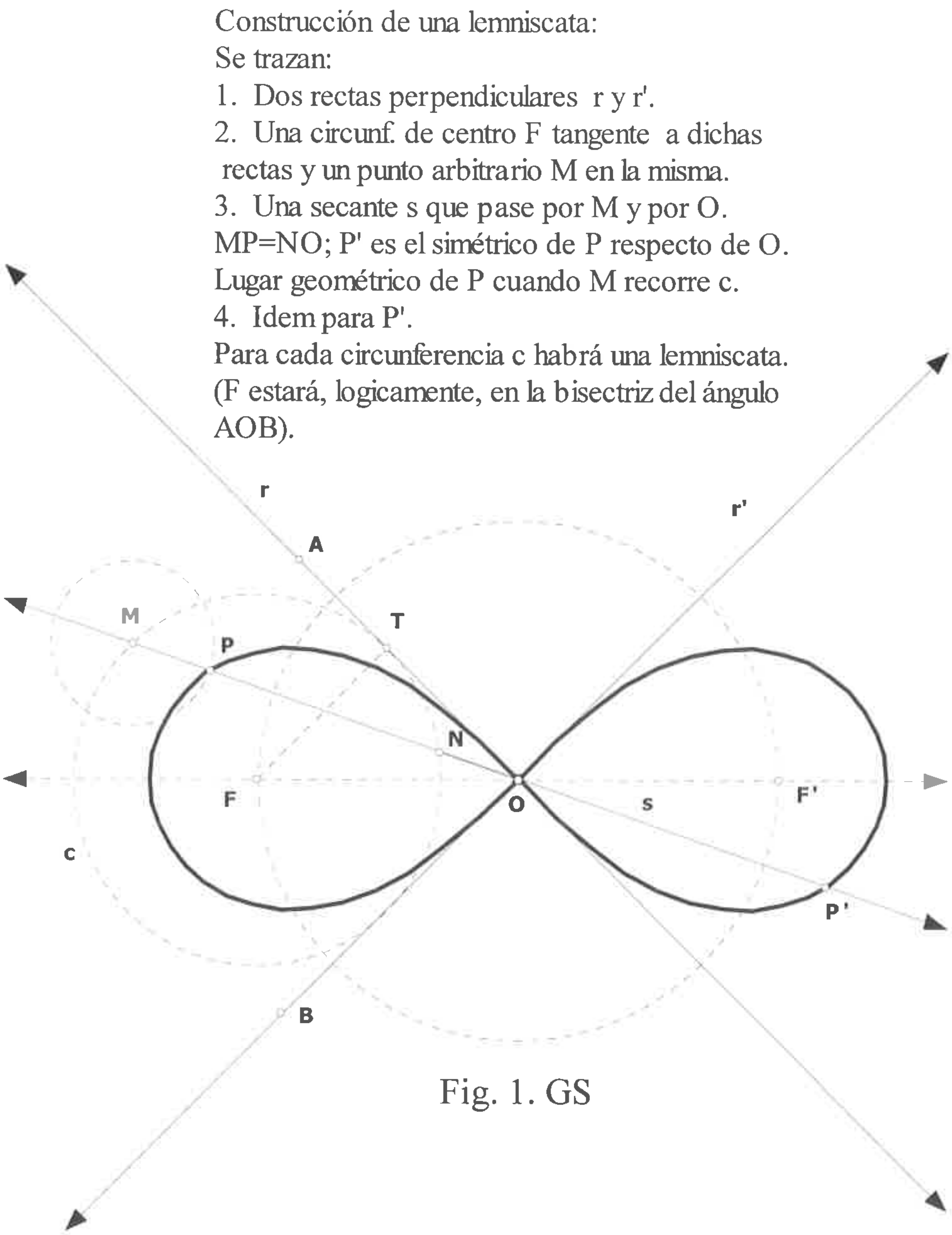

Fig. 1. GS

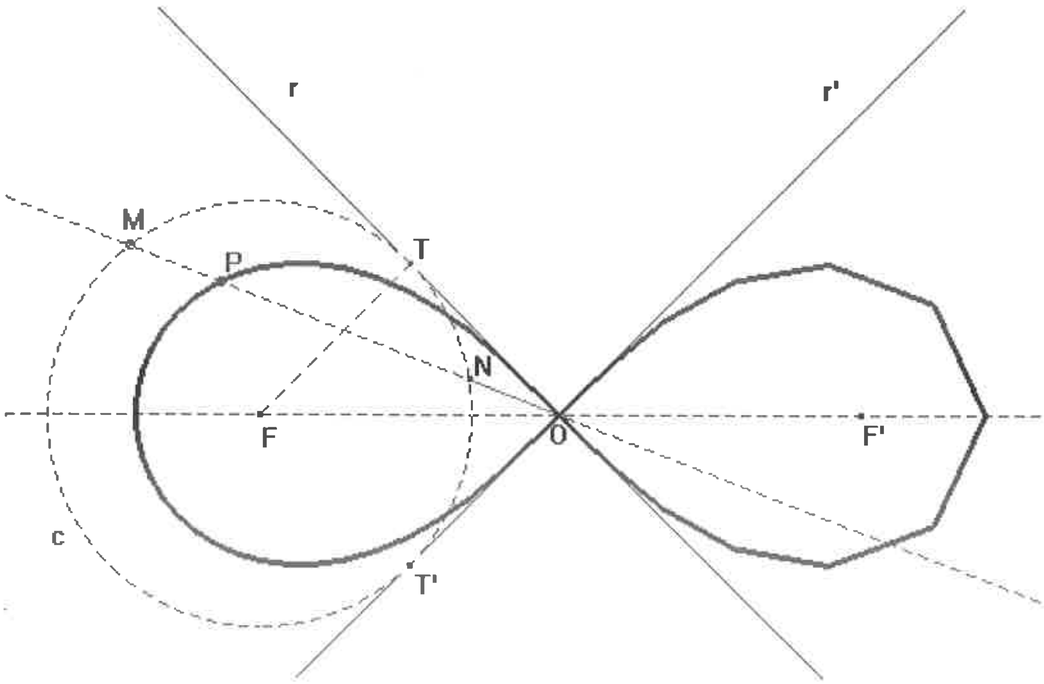

Fig. 2. CG

♦ A las letras del GS se les puede poner subíndices, mientras que ello, todavía, no es posible con la versión 1 del CG.

♦ En el caso de que se quiera hacer una copia de una misma figura en la ventana del CG o del GS, es posible arrastrar en este último, mediante el ratón, dicha copia por entero (claro es, siempre y cuando estén seleccionados todos los elementos que integran la figura). Sin embargo, con el CG, sólo se puede arrastrar la copia por bloques independientes; esto es, si se ha construido, por ejemplo, un polígono (mediante el comando Polígono del cuadro de herramientas Rectas, y no segmento a segmento), se puede también arrastrar la copia totalmente; pero, si dentro de dicho polígono se ha construido otra figura, que no está ligada al mismo, entonces, hay que arrastrar cada una por separado para completar dicha copia.

♦ También, cuando aparece en la pantalla la *traza* que describe cualquier elemento geométrico en movimiento, es posible imprimirla con el GS, pero no con el CG. (En la figura 3 se muestran las trazas de tres elementos geométricos).

Fig. 3. GS

♦ Asimismo, hemos comprobado que, al pasar a Word una figura, es posible poner algún texto dentro del marco de dicha figura sin tener que acudir al "cuadro de texto".

♦ También es posible pasar una figura de Word a GS, pero sin que se la pueda modificar. Toda modificación deberá hacerse en Word, la cual pasará automáticamente a GS si la figura se ha pegado mediante el comando Pegar Vínculo del menú Edición.

Ventajas del CG

Estimamos que, salvo en los casos anteriormente citados, el CG aventaja al GS. Ilustraremos este apartado con algunos ejemplos:

♦ En el cuadro de herramientas Rectas del CG, el comando Polígono regular, permite construir polígonos regulares (desde 3 a 30 lados, ambos inclusive), ya sean convexos o cóncavos, sin más que seleccionarlo y hacer girar el ratón sobre la circunferencia (que aparece de puntos) a la derecha o a la izquierda, respectivamente.

Con el GS, mediante el directorio *Samples,* se pueden construir, muy fácilmente, y con sólo dar dos puntos, los polígonos regulares convexos de 3-4-5-6-8-17 lados, además del rombo y el rectángulo. Para los demás polígonos de (9,7,11,13, ... lados) habrá que determinar, previamente, un segmento (lado del polígono que se desea construir), marcar el centro de giro en uno de sus extremos, calcular el ángulo de giro, y finalmente, hacer un giro de amplitud el ángulo calculado, y, así, para los lados sucesivos (aunque es más rápido, una vez que se tienen dos lados, calcular el centro del polígono y trazar la circunferencia circunscrita). Como ya se ha dicho, el GS proporciona algunos polígonos, que son construibles con regla y compás, aunque se echa de menos el decágono y el pentadecágono, que se pueden construir con regla y compás, ya que $\frac{1}{15}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{2}{3}-\frac{3}{5}$.

Sin duda alguna, con un poquito más de trabajo, se podría construir el resto de los polígonos regulares convexos no disponibles en el GS.

♦ En el cuadro de herramientas Curvas, el comando Cónica del CG, permite construir una cónica cualquiera mediante cinco puntos.

Es verdad que, con el directorio *Samples* del GS se facilita su construcción; pero lo que no puede hacer este último es proporcionar, como lo hace el CG, la ecuación cartesiana de cualquier cónica mediante el comando Coordenadas y ecuaciones del cuadro de herramientas Medir (ver la figura 4). No obstante, hay que tener en cuenta que, si la cónica se ha generado como un lugar geométrico, es necesario hacer pasar, previamente, por cinco puntos de la misma, otra cónica (que coincidirá, por supuesto, con la anterior) mediante el uso del comando Cónica del cuadro de herramientas Curvas.

♦ El cuadro de herramientas Macro del CG facilita, notablemente, la construcción de una variada gama de diseños, teselados, fractales, etc.

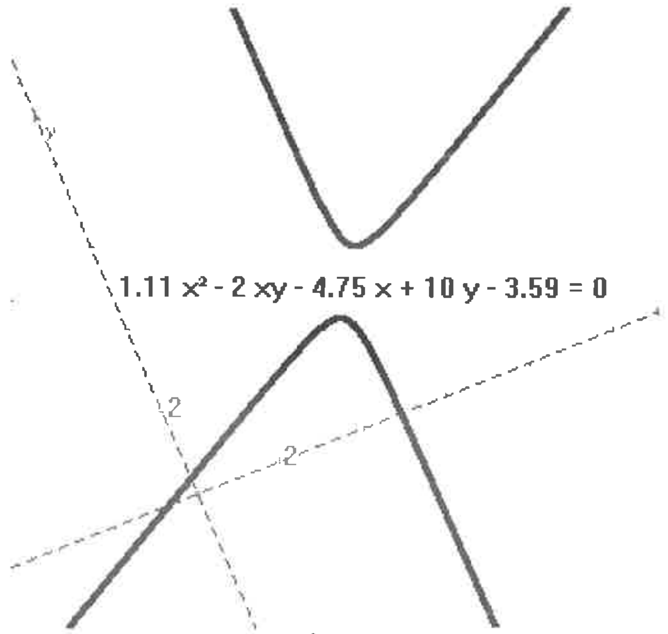

Fig. 4. CG

♦ El cuadro de herramientas Construir tiene el CG, entre otros, dos comandos: Punto medio y Mediatriz, que determinan, automáticamente, el punto medio y la mediatriz de un segmento, con sólo hacer click con el ratón en sus extremos, incluso cuando no se haya trazado dicho segmento.

Con el GS, para trazar la mediatriz de un segmento, por ejemplo, habría que hallar su punto medio y, a continuación, la perpendicular por dicho punto medio. No cabe duda, que hay que verificar más pasos, a no ser que se incluya esa construcción en el cuadro de herramientas Construir.

♦ En el cuadro de herramientas Transformar tiene el CG, entre otros comandos, Simetría (con respecto a un punto) e Inversión. Para el primero, basta hacer click con el ratón en dos puntos A y B para que dé el simétrico de A respecto de B. En cuanto a la inversión, basta con picar con el ratón en un punto P de una figura y en la circunferencia de inversión para hallar el inverso P' de P.

La figura inversa se determina mediante el comando Lugar geométrico del cuadro de herramientas Construir (en la figura 5 aparece la *lemniscata de Bernoulli* como inversa de una hipérbola equilátera). Pero, para el GS, la simetría con respecto a un punto, se resolvería efectuando todos los pasos requeridos para un giro, que en este caso sería el correspondiente a un ángulo de 180°, y para la inversión, el homólogo P' de un punto P se hallaría mediante el cálculo de OP'=r²/OP, siendo r el radio de la circunferencia de inversión de centro O. Conocido ya OP', habría que efectuar una transferencia de medidas sobre la semirrecta que pasa por O y P, para lo cual hay que ir al cuadro de herramientas "Graficar" (traducción de *Graph menu*) y buscar "Graficar medidas" (traducción de *Plot measure*) y seguir las intrucciones al respecto.

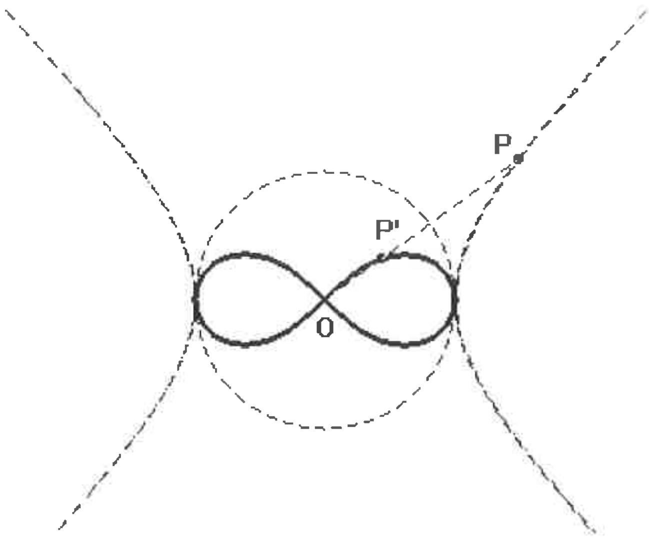

Fig. 5 CG

♦ También resulta oneroso con el GS el cálculo de las simetrías sucesivas de una figura, por ejemplo de un polígono, respecto a un eje cambiante. Mediante el CG, basta con seleccionar el comando Simetría axial, dar dos toques sucesivos con el ratón en el lado, que se vaya eligiendo como eje, para obtener así un conjunto de figuras simétricas (de gran interés cuando, por ejemplo, se quiere hacer un teselamiento del plano, el desarrollo de las caras de un poliedro regular o una ristra de figuras simétricas no necesariamente regulares).

♦ A la hora de imprimir con el GS es recomendable ir siempre al menú Archivo y picar con el ratón en Presentación preliminar, pues, en caso contrario, se puede uno encontrar con la sorpresa, de que imprima un buen número de páginas para una simple figura. El CG, tiene la ventaja, cuando se va a imprimir (o se quiere pasar a Word), de disponer de una ventanita que permite seleccionar, solamente, la parte que interese del dibujo.

Por otro lado, mientras se está haciendo una figura con el GS, aparece una serie de letras no deseadas, que hay que ocultar o rotular de nuevo con el fin de ponerlas a gusto del usuario.

♦ El comando Distancia y longitud del cuadro de herramientas Medir proporciona, además del perímetro de un polígono o la longitud de una circunferencia, la longitud de una elipse. El comando Área del mismo cuadro de herramientas determina, además del área de un polígono o la de un círculo, la limitada por una elipse.

Pero, independientemente, de las ventajas de uno u otro de estos programas, no hay duda alguna de que ambos son de gran interés, no sólo para un estudio rápido y dinámico de la Geometría, sino también para descubrir propiedades insospechadas de los entes geométricos.

En otro orden de cosas, es muy recomendable, cuando se haya hecho algún "descubrimiento", tratar de contrastarlo analíticamente, para estar seguro del mismo, ya que si bien a los ojos del Análisis nada escapa, no podemos decir lo mismo con los del cuerpo que podrían inducirnos a error, pues, como bien dice el proverbio: "las apariencias engañan".

Para ilustrar el hallazgo de un lugar geométrico, que aparenta ser una curva conocida, y, sin embargo, no lo es, basta con lo que sigue:

En la figura 6 se ha representado una curva, muy parecida a una lemniscata, engendrada por el punto P cuando M recorre la circunferencia de centro O. Se demuestra que no es una lemniscata por dos vías:

a) Vía gráfica: la inversa de una lemniscata ha de ser una hipérbola equilátera. Claramente, se observa, mediante la figura, que no lo es.

b) Vía analítica: la ecuación cartesiana de esta falsa lemniscata, determinada mediante un sencillo cálculo, es $(y^2)^2 = a^2(y^2-x^2)$. Fue estudiada por Gregory St. Vincent (1584-1667) en su *Opus geometricum,* dentro de un grupo de cuárticas que se conocen como parábolas virtuales de St. Vincent. Como es sabido, la verdadera es una curva cassínica de ecuación $(x^2+y^2)^2 = a^2(y^2-x^2)$, en la que a=OM.

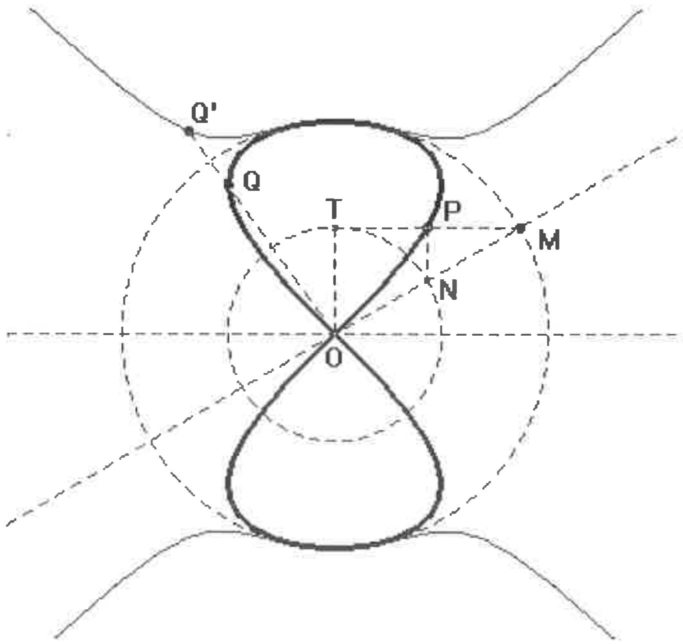

Fig. 6 CG

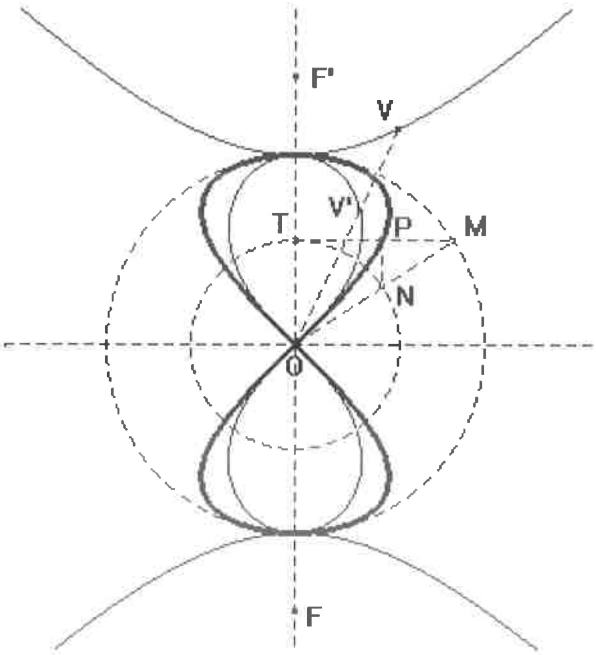

Fig. 7 CG

En la figura 7, se ha trazado la verdadera lemniscata (con trazo fino) como la curva inversa de una hipérbola equilátera (V' es el inverso de V respecto a la circunferencia de inversión de radio OM). Con trazo grueso, la falsa

En la figura 8, se muestra que la inversa de una hipérbola (no equilátera)

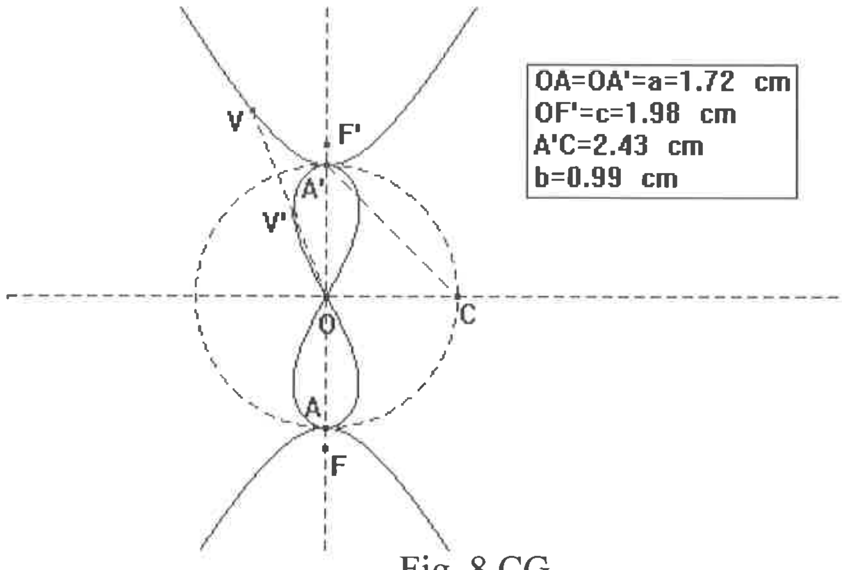

Fig. 8 CG

respecto de la circunferencia de radio OC, tampoco es una lemniscata, pero sí una cuártica bicircular de ecuación $(y^2+x^2)^2-a^2[(a/b)^2y^2-x^2]=0$.

♦ Finalmente, presentamos, con la figura 9, un triángulo de Sierpinski, construido mediante el cuadro de herramientas Macro del CG. El directorio Samples del GS proporciona también un triángulo de Sierpinski con sólo dar tres puntos, pero con menos "huecos".

La dimensión de este fractal es $\dfrac{\log(3)}{\log(2)} \cong 1.5849625$.

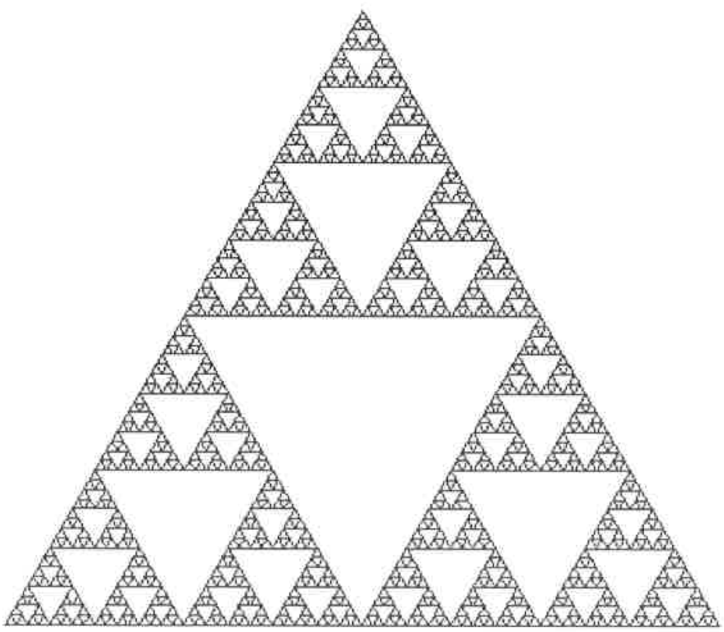

Fig. 9 CG

3. Novedades

Y ya, para terminar, diremos que según *Key Curriculum Press*, innovadores en Educación Matemática, este verano del 2001 estará disponible la versión 4 del GS. ¡Esperemos, pues, algunas mejoras en esta próxima versión!

De momento no hay nada previsto sobre una nueva versión del CG. No obstante, en el próximo Congreso Internacional sobre Cabri-Géomètre, que tendrá lugar en la Universidad de Quebec (Canadá) del 14-17 de junio del 2001, puede que se decida algo sobre futuras versiones.

Referencias bibliográficas

CAJORI, Florian (1985): *A History of Mathematics,* 4th edition, Chelsea Publishing Company, New York.

REY PASTOR, J.; SANTALÓ, L. A.; BALANZAT, M. (1957): *Geometría Analítica*, 2ª reimpresión, Kapelusz, Buenos Aires.

Este artículo fue redactado en Las Palmas G. C., en el mes de abril de 2001.