Construcción de cónicas utilizando el principio de dualidad[1]

Construção de cônica usando o princípio da dualidade
Conical construction using the principle of dualit

GRACIELA CARMEN LOMBARDO[2]

Resumen

El objetivo de este artículo es hacer una revisión de conceptos y propiedades que están relacionados a través del principio de dualidad y que derivan en las definiciones de cónica lugar y cónica envolvente. Asimismo mostrar la simplificación de las construcciones en virtud del uso de diversos recursos y comandos que brinda GeoGebra. A tal efecto se definieron: recta puntual, haz de rectas, perspectividad, proyectividad, cónica lugar y cónica envolvente. Del mismo modo, se enunciaron el principio de dualidad y las propiedades relativas a la determinación de la proyectividad.
Palabras clave*: GeoGebra; Geometría Proyectiva; Principio de dualidad; Cónicas*

Resumo

O objetivo deste artigo é rever conceitos e propriedades que estão relacionados através do princípio da dualidade e que levam à definição de cónica lugar e cónica tangencial. Mostrar também a simplificação das construções em virtude do uso de vários recursos e comandos que GeoGebra oferece. Para este efeito, foram definidos: reta, retas que se interceptam em um ponto, perspectividade, projetividade, cônica lugar e tangencial. Da mesma forma, foram definidos o princípio da dualidade e as propriedades relacionadas com a determinação da projetividade
Palavras chave: *GeoGebra; Geometria Projetiva; Principio da dualidade; Cônicas*

Introducción

Existe una diversidad de definiciones de cónicas, tales como:

- La intersección de un cono y un plano que no contiene al vértice (de ahí su nombre).
- El lugar geométrico de los puntos del plano que guardan una determinada relación de distancias.
- La homóloga de una circunferencia acorde (definición sustentada por la Proposición de Desargues).
- etc.

En todos los casos, GeoGebra constituye una poderosa herramienta de construcción y análisis de los gráficos obtenidos.

[1] Instituto GeoGebra Misiones (IGMi) – Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN) – Facultad de Ciencias Económicas (FCE) - Universidad Nacional de Misiones (UNaM)

El propósito del presente es hacer una revisión de conceptos y propiedades relacionados a través del principio de dualidad y que derivan en las definiciones de cónica lugar y cónica envolvente; al tiempo que, mediante la utilización de GeoGebra, mostrar la simplificación de las construcciones por el uso de diversos comandos que brinda el software.

Marco teórico

i. Geometría Proyectiva

Definición: La Geometría Proyectiva es la rama de la Matemática que estudia las propiedades proyectivas de las figuras. (Ruíz, 1999, p. 35).

> La geometría proyectiva es aquella que trata las propiedades que se conservan bajo proyecciones. Tiene aplicaciones en visión artificial, funcionamiento de cámaras, reconstrucción de imágenes bidimensionales en tres dimensiones, etc… Es la geometría asociada al modo en que el ojo humano percibe el mundo (GIRONDO, 2009, p. 139)

En tal sentido, Girondo (2009, p. 139) añade que en la Geometría Proyectiva ya no tienen sentido las nociones de distancia ni paralelismo, solamente las de colinealidad e incidencia.

Su génesis obedece a la necesidad de dar explicación a las leyes de la perspectiva. Ya en el Renacimiento el primer artista teórico, León Battista Alberti, cuestionó qué propiedades se conservaban invariantes a través de la proyección, dado que, ante esta transformación, no sucede lo mismo con las longitudes y amplitudes. (ETAYO GORDEJUELA, 2010, p. 98)

> Se asiste en el Renacimiento a un cambio de paradigma, ya que la **Geometría Proyectiva** tiene sus orígenes en la pintura del Renacimiento. Después del siglo XVII se recobrarán las ideas de los matemáticos griegos, pero son los pintores renacentistas los que dan los pilares a esta rama de las matemáticas al lograr expresar en el plano, los objetos y las figuras tridimensionales, a diferencia de sus predecesores de la Edad Media. (Blanco, 2006, pp. 37-38)

El padre de la Geometría Proyectiva, Gérard Desargues (1593-1662), dio fundamento teórico a los métodos que utilizaron los artistas renacentistas. Fue quien incorporó el concepto de *"punto del infinito"* o *"punto impropio"* o *"punto ideal"*. A pesar del

[2] FCEQyN - FCE – gracielalombardo@gmail.com

importante aporte hecho por Desargues, a través de su estudio de las secciones cónicas (1639), fue Jean-Victor Poncelet (1788-1867), quien impulsó el desarrollo de la Geometría Proyectiva con su *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras*, publicado en 1822. (LOMBARDO, 2013, p. 70)

ii. Principio de dualidad

Al igual que en la Geometría euclídea, en la Geometría Proyectiva vale la proposición "dos puntos cualesquiera determinan una recta" (FIGURA 1). También, en la Geometría Proyectiva, el enunciado "dos rectas cualesquiera determinan un punto" (FIGURA 2), tiene valor de verdad verdadero. La última proposición puede obtenerse a expensas de la primera, con solo cambiar las palabras punto y recta. (BLANCO, 2006, p. 43)

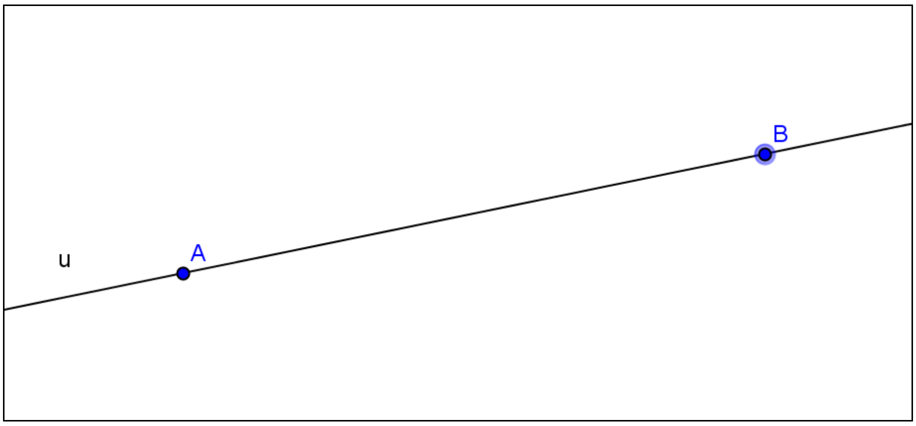

FIGURA 1: Recta u determinada por los puntos A y B
FUENTE: Propia

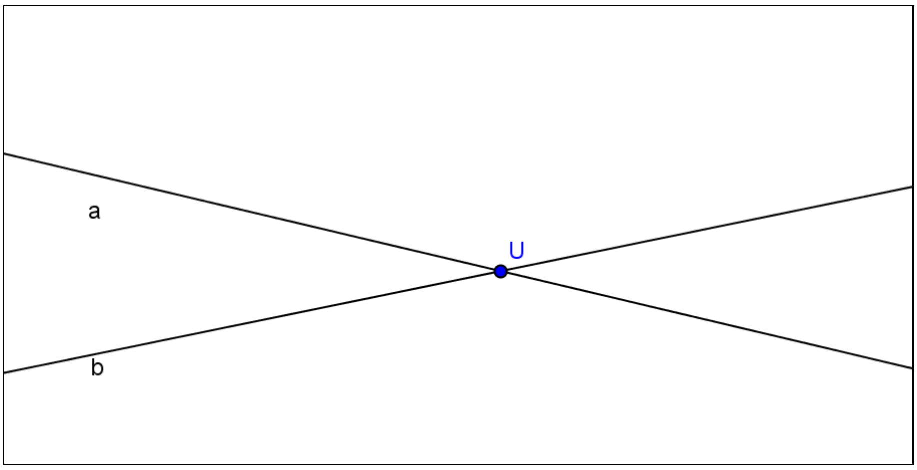

FIGURA 2: Punto U determinado por las rectas a y b
FUENTE: Propia

El siglo anterior vio también el desarrollo axiomático de la geometría

> proyectiva cuyos orígenes se remontan hasta Pappus (350 A.C.) y Desargues (1639). Un parteaguas mayor fue el descubrimiento y demostración independiente del principio de *dualidad* de Poncelet, Plucker y Gergonne en 1826. Dos teoremas o configuraciones son llamadas *duales* si una puede ser obtenida de la otra reemplazando cada concepto y operador por su concepto y operador dual. (DE VILLERS, 2008, p. 2)

A continuación se presentarán una serie de entes, definiciones y propiedades duales:

I. Recta puntual y haz de rectas

En acuerdo con Blanco (2006, pp. 43-44), de la misma forma que se concebirse a un conjunto de puntos de una recta, puede pensarse en un conjunto de rectas que concurren o se cortan en un punto.

Al primer conjunto se lo denomina recta puntual, o simplemente recta (FIGURA 3), mientras que al segundo, haz de rectas, donde el punto común es el centro del haz (FIGURA 4). (SANTALÓ, 1976, p. 19).

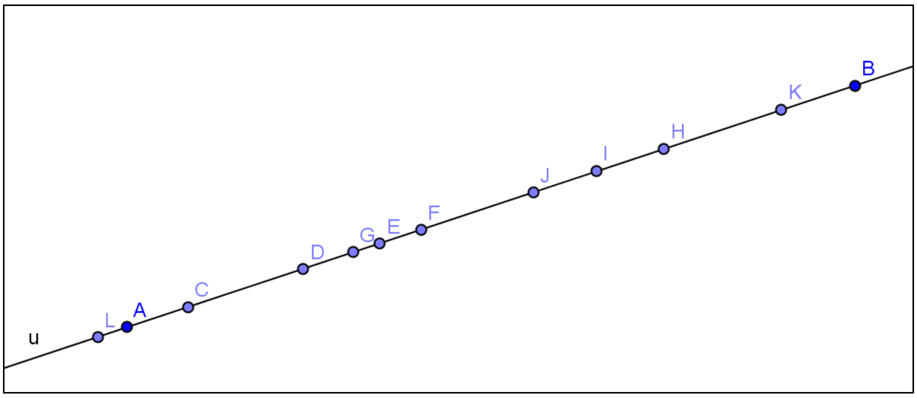

FIGURA 3: Recta puntual u
FUENTE: Propia

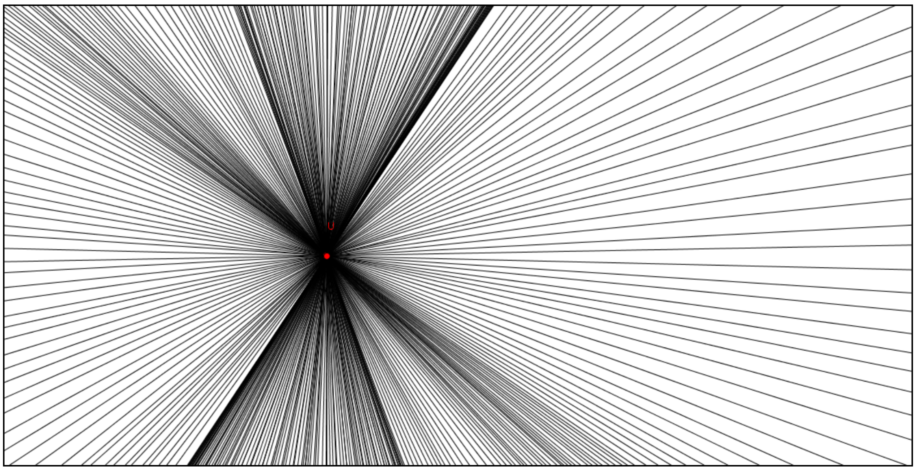

FIGURA 4: Haz de rectas de centro U
FUENTE: Propia

II. Perspectividad

a. Perspectividad entre dos haces de rectas

Definición: Hay una correspondencia uno a uno, entre las dos haces de rectas, si existe una relación que asocia a cada recta del primer haz una y solo una recta del segundo haz, y viceversa.

Cuando existe una correspondencia uno a uno, a cada recta y su asociada se las denomina correspondientes.

Definición: Los haces de rectas U(a,b,c,d,e,...) y U'(a',b',c',d',e',…) son perspectivos desde la recta u, cuando los pares de rectas correspondientes se cortan en puntos que pertenecen a u. (FIGURA 5).

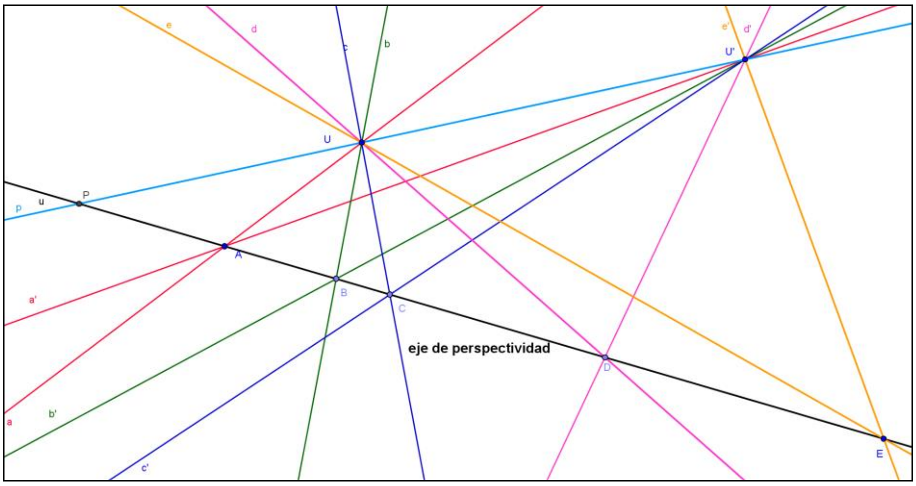

FIGURA 5: Haces de rectas perspectivos
FUENTE: Propia

La recta u recibe el nombre de eje de perspectividad, y la determinada por los centros U y U' (recta p) se auto-corresponde y es denominada recta unida. (AYRES, 1971, pp. 8-11).

b. Perspectividad entre dos rectas

Definición: Hay una correspondencia uno a uno, entre dos rectas, si existe una relación que asocia a cada punto de la primera recta uno y solo un punto de la segunda recta, y viceversa.

Cuando existe una correspondencia uno a uno, a cada punto y su asociado se los denomina correspondientes.

Definición: Las rectas u(A,B,C,D,E,...) y u’(A’,B’,C’,D’,E’,…) son perspectivas desde el punto O, cuando los pares de puntos correspondientes determinan rectas que se cortan en O. (FIGURA 6). El punto O recibe el nombre de centro de perspectividad, y el determinado por la intersección de las rectas u y u’ (punto P) se auto-corresponde y es denominado punto unido. (AYRES, 1971, pp. 8-11).

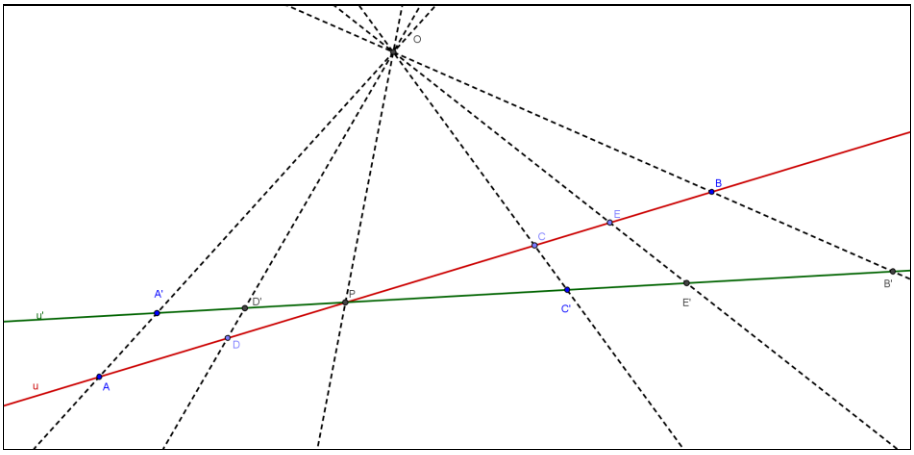

FIGURA 6: Rectas perspectivas
FUENTE: Propia

III. Proyectividad

Puede comprobarse, de manera sencilla, que si se componen una serie de perspectividades (entre pares de rectas o entre pares de haces de rectas), por lo general, el resultado final no será una perspectividad. Esta correspondencia es denominada proyectividad. (LOMBARDO, 2013, pp. 73)

a. Construcción de la proyectividad entre dos haces de rectas

Propiedad 1: La proyectividad entre dos haces de rectas queda determinada por tres pares de rectas correspondientes.

En la FIGURA 7, se aprecian dos ternas de rectas pertenecientes a los haces de centro U y U’, es decir, U(a,b,c,...) y U’(a’,b’,c’,…), en las que se corresponden: a y a’, b y b’, c y c’.

Al cortar la recta a con las tres rectas de U’, quedan determinados los puntos A, B’ y C’; y al hacer lo propio con a’, se obtienen A, B y C.

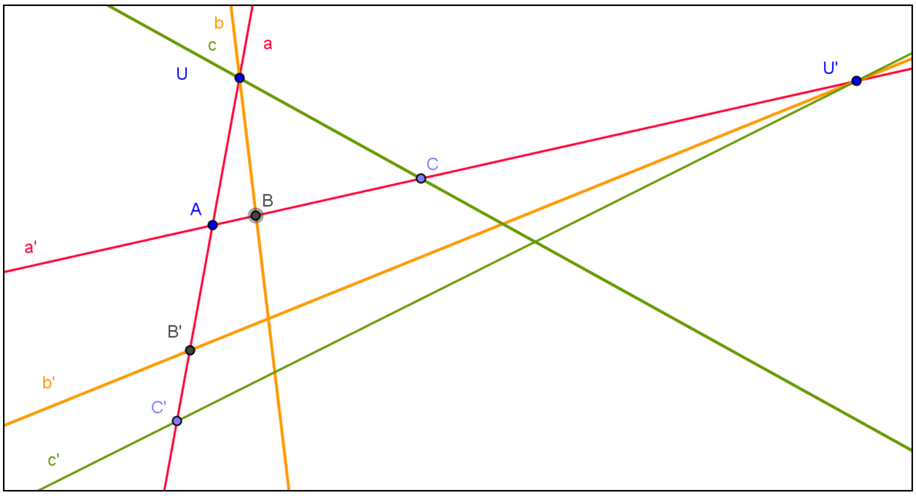

FIGURA 7: Construcción de la proyectividad entre tres pares de rectas de dos haces de rectas (a)
FUENTE: Propia

De estas operaciones, resulta que las rectas a y a' son perspectivas desde un punto, en razón que A se auto-corresponde. A fin de ubicar el centro de perspectividad (O), solo resta trazar las rectas que contienen a los pares de puntos correspondientes (B con B' y C con C'). (FIGURA 8).

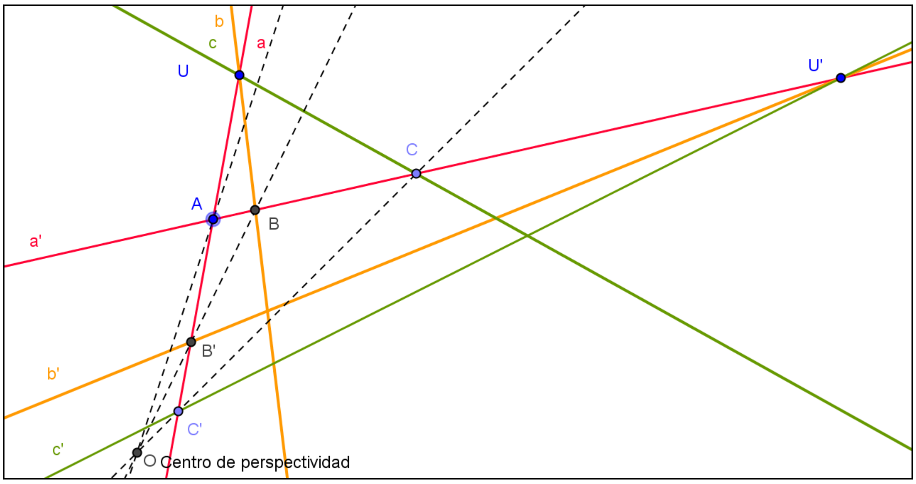

FIGURA 8: Construcción de la proyectividad entre tres pares de rectas de dos haces de rectas (b)
FUENTE: Propia

Si se deseara hallar nuevos pares de correspondientes basta con fijar, por ejemplo una recta d de U, y al cortarla con a' queda determinado el punto D, de modo que al proyectar desde el centro de perspectividad y cortar con a, se fija la posición del punto D', tal que al ser proyectado desde U', se configura la recta d'. (FIGURA 9)

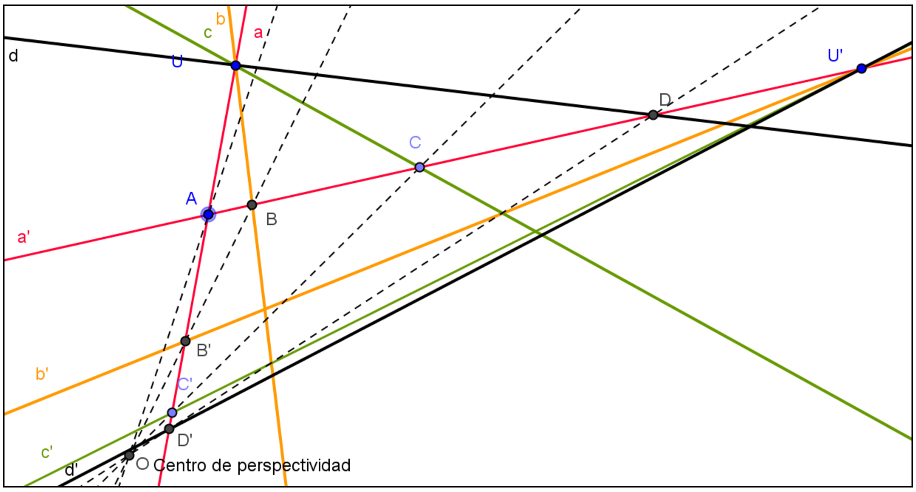

FIGURA 9: Construcción de la proyectividad entre tres pares de rectas de dos haces de rectas (c)
FUENTE: Propia

Se puede proseguir indefinidamente con este método constructivo, no obstante si se anima un punto K, perteneciente a la recta d (se observa en la FIGURA 10 la circunferencia con centro en U y que contiene a K), y se activa el rastro de d, se generará la correspondiente d', la cual tomará las infinitas posiciones conforme a la que le corresponda en cada instante de posición de d.

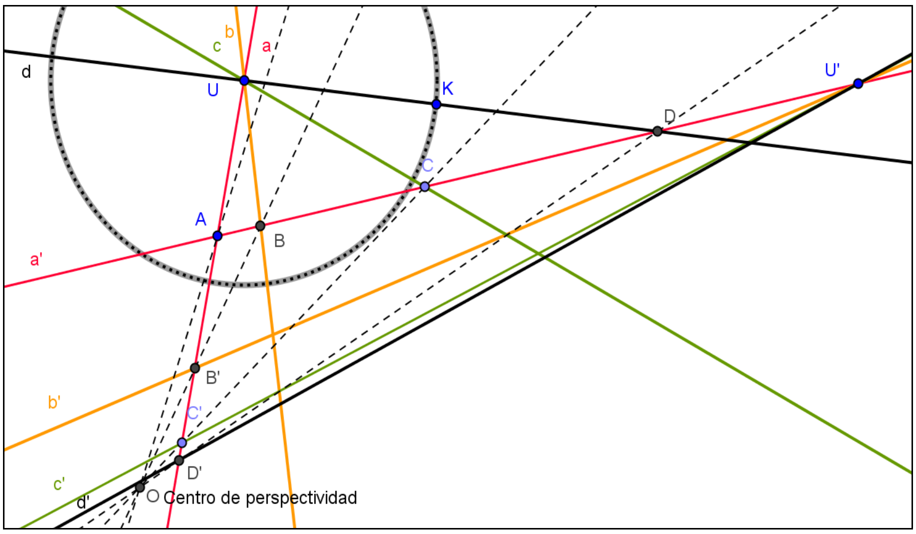

FIGURA 10: Construcción de la proyectividad entre tres pares de rectas de dos haces de rectas (d)
FUENTE: Propia

a. Construcción de la proyectividad entre dos rectas

Propiedad 2: La proyectividad entre dos rectas queda determinada por tres pares de puntos correspondientes.

En la FIGURA 11 se observan tres pares de puntos correspondientes A y A’, B y B’, C y C’, pertenecientes a u y u’, respectivamente.

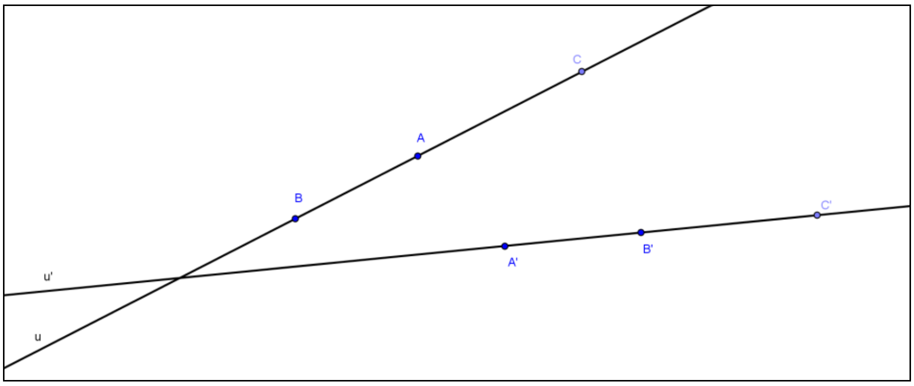

FIGURA 11: Construcción de la proyectividad entre tres pares de puntos de dos puntuales (a)
FUENTE: Propia

Si se proyectan desde el punto A los puntos de u’, y desde A’ los de u’, se obtienen dos haces de rectas de centro A y A’ proyectivos y perspectivos, por poseer una recta unida, la determinada por los puntos A y A’. En esta disposición, el eje de perspectividad queda establecido por los puntos donde se cortan los pares de rectas correspondientes, es decir: las rectas AB’ y A´B determinan B_0, mientras que AC’ y A´C a C_0. (FIGURA 12)

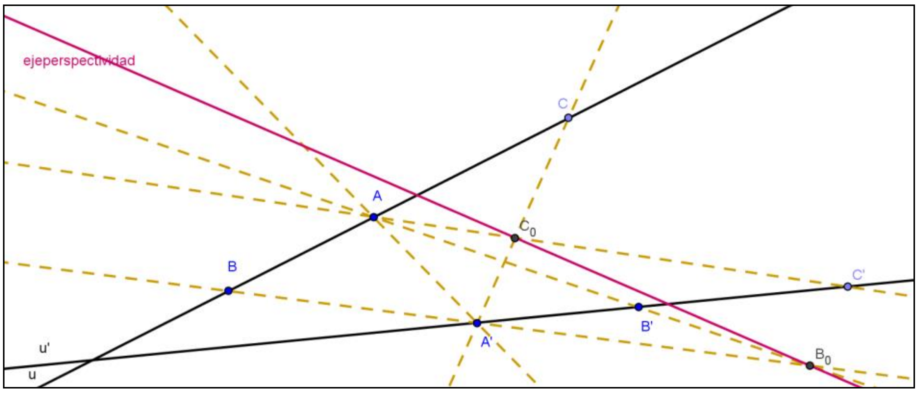

FIGURA 12: Construcción de la proyectividad entre tres pares de puntos de dos puntuales (b)
FUENTE: Propia

Si se deseara hallar nuevos pares de correspondientes basta con fijar, por ejemplo un punto D de u, proyectarlo desde A’, de modo que al cortar al eje de perspectividad se fija la posición del punto D_0, tal que al ser proyectado desde A, se configura la recta D_0A que corta a u’ en D’. Se puede proseguir indefinidamente con este método constructivo, no obstante si se anima al punto D y se activa el rastro a la recta A’D, se generarán los infinitos pares de rectas correspondientes que se intersectan en el eje de perspectividad. (FIGURA 13)

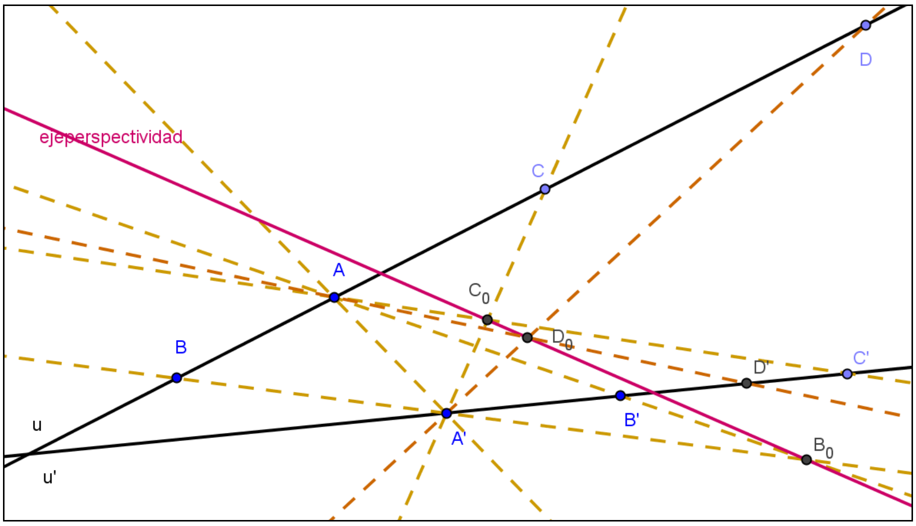

FIGURA 13: Construcción de la proyectividad entre tres pares de puntos de dos puntuales (b)
FUENTE: Propia

IV. Cónicas

a. Cónica lugar

Definición: Cónica lugar (o cónica puntual) es el lugar geométrico de los puntos de corte de los pares de rectas correspondientes de dos haces de rectas proyectivos y no perspectivos, de un mismo plano. Si los haces de rectas son perspectivos, el lugar geométrico degenera en dos rectas: el eje de perspectividad y la recta que une los centros de los haces. (SANTALÓ, 1976, p. 27). (FIGURA 14).

A partir de la definición puede trazarse la cónica lugar mediante el método constructivo descripto en la sección anterior y luego plasmado en la FIGURA 10. Solo basta determinar los puntos de corte de los pares de rectas correspondientes (a-a', b-b', c-c' y d-d'), para luego activar el rastro en el punto determinado por d y d' (FIGURA 15).

Puede observarse que los puntos U y U' cumplen con la condición de pertenecer a la cónica; solo basta con enumerar las operaciones proyectivas utilizadas para comprobarlo. Asimismo, si se imponen condiciones a los haces y a sus rectas se obtienen elipses, parábolas o hipérbolas. Estas construcciones quedan propuestas para otra presentación.

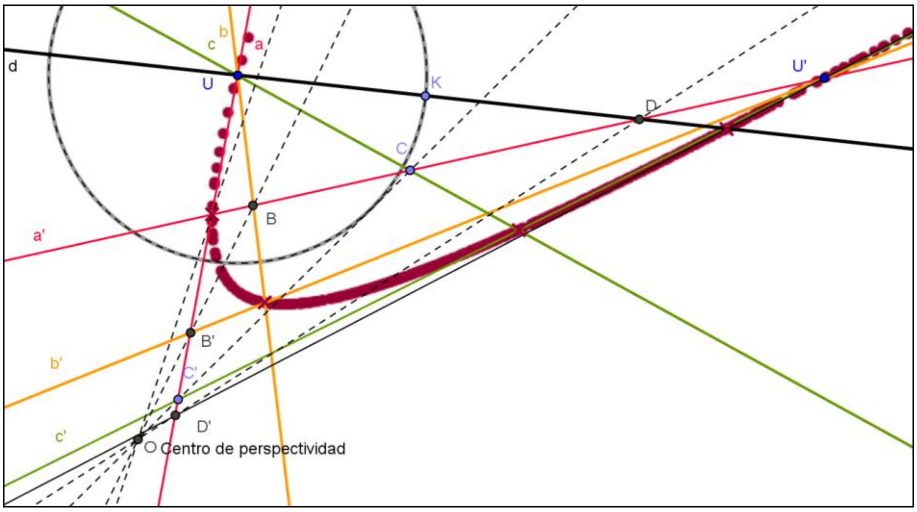

FIGURA 14: Cónica lugar
FUENTE: Propia

b. Cónica envolvente

Considerando el principio de dualidad y la definición de cónica lugar, se enuncia a continuación la respectiva de cónica envolvente (o tangencial):

Definición: Cónica envolvente es el lugar geométrico de las rectas determinadas al proyectar pares de puntos correspondientes de dos puntuales proyectivas y no perspectivas, de un mismo plano. Si las rectas son perspectivas, el lugar geométrico degenera en dos haces, cuyos centros son: el centro de perspectividad y la intersección de las puntuales. (FIGURA 15).

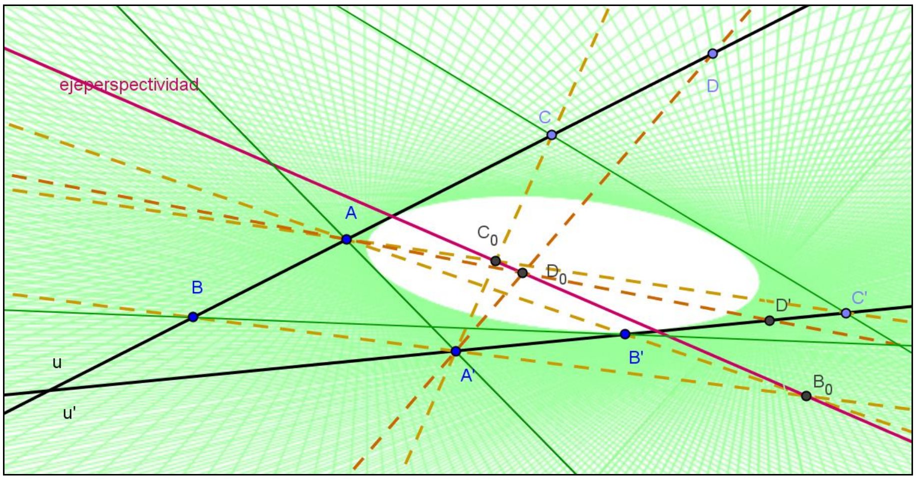

FIGURA 15: Cónica envolvente
FUENTE: Propia

El mencionado ente geométrico puede confeccionarse a partir del método constructivo explicado y plasmado en la FIGURA 13; basta trazar las rectas determinadas por los pares de puntos correspondientes en las puntuales u y u’ (A-A’, B-B’, C-C’ y D-D’), para luego activar el rastro en la recta establecida por D y D’

Como se aprecia en la FIGURA 15, las rectas u y u’ cumplen con la condición de pertenecer a la cónica; solo basta con reconocer la serie de operaciones proyectivas empleadas en el método constructivo. Así también, si se asignan condiciones a los tres pares de puntos que generan la proyectividad se logran elipses, parábolas o hipérbolas.

Aporte al proceso de enseñanza y aprendizaje

Mientras que en la Geometría Euclidiana el entre elemental es el punto, en la Geometría Proyectiva existe una diversidad de entes elementales (Eo o espacio de dimensión cero), entre los que fueron considerados para este trabajo (punto, recta). De esta forma, en este campo de la Matemática, permite que emerjan nuevos espacios geométricos de dimensión mayor (E1, E2, etc.)

“Como en nuestro espacio intuitivo el ente elemental es el *punto euclídeo* nos será mucho más fácil trabajar con él y las verdades que retiremos de la investigación serán válidas cuando se considere que el Eo es recta, plano, etc.” (PASCALI, 1952, p. 22)

Existe un paralelismo entre las definiciones y propiedades de los diversos espacios de dimensión mayor, producido por la posibilidad de considerar a los diversos Eo. De hecho que, la mayor interpretabilidad la poseen las relacionadas con el espacio intuitivo, el que es familiar desde las primeras etapas de la escolaridad, pero mediante el Principio de Dualidad, se logra inferir los enunciados y teoremas correspondientes. (PASCALI, 1952, p. 22)

Por ejemplo, para la determinación de las rectas de tangencia, en la cónica lugar, solo basta considerar dos puntos infinitamente próximos, los cuales la configuran; en tanto que para ubicar el punto de tangencia en la cónica envolvente, resulta muy útil aplicar el Principio de Dualidad, “imaginando” dos rectas infinitamente próximas que se cortan en dicho punto.

En tal sentido, si la variedad que pretende obtenerse fuese la parábola, habrá que considerar un punto impropio y la recta tangente de la misma condición. Para que esto suceda es condición suficiente que tanto el centro de perspectividad como el centro de uno de los haes sean impropios. Es así que el objeto dual se obtiene, considerando dos puntos correspondientes impropios, determinando una recta de igual característica.

El uso de las computadoras en el ámbito escolar produce un cambio que influye en el proceso de adquisición del conocimiento matemático. En acuerdo con Fioriti (en FERRAGINA, 2012, p. 15), la existencia de computadoras en el aula establece riesgos y oportunidades:

> Entre los riesgos está limitar la enseñanza a mostrar lo que se ve en pantalla, los dibujos geométricos, las representaciones gráficas de funciones, etc. La oportunidad está en proponer situaciones como las construcciones imposibles que ayudan a generar argumentos para la prueba.
> El riesgo está en que se vacíe de contenido la enseñanza; el software resuelve las técnicas cuya aplicación es una actividad muy frecuente en las aulas.

El tipo de construcciones que se efectúan en esta área de conocimiento, ya sean realizadas a lápiz y papel o a través de GeoGebra, requieren de un gran número de pasos y, por cierto, de la aplicación de propiedades, para lograr un producto acabado. Ahora bien, si se buscan las herramientas y recursos adecuados que ofrece el software, no solamente es factible reducir significativamente el proceso de construcción, sino que también pueden obtenerse variedades con solo modificar la posición de ciertos objetos. Por ejemplo, a partir de una elipse, obtener una parábola o hipérbola con dotar de condiciones adecuadas a determinados elementos.

Asimismo, si se provee de una o varias propiedades a objetos precisos y posteriormente se da animación a al ente que éstos generan, se engendrarán un sinnúmeros de entes homólogos que configurarán la figura deseada, acciones imposibles de ser realizadas con papel y lápiz.

Consideraciones finales

Tal como fue manifestado en el presente trabajo, el sistema axiomático de la Geometría Proyectiva permitió una visión más amplia de las relaciones entre los entes generadores de los distintos espacios proyectivos. Más aún, un punto de inflexión lo constituye el principio de dualidad que permite vincular dos configuraciones duales, tales que una es obtenida a expensas de la otra, tan solo con el reemplazo de cada concepto u operador por su respectivo dual.

Se han recuperado y revisado una serie de conceptos, definiciones y propiedades de la Geometría Proyectivas, las que a diferencia de lo que ocurre con las propias de la Geometría Euclidiana, permitieron relacionarse y derivar en otras en virtud del principio de dualidad.

Asimismo, se evidenció una simplificación en las construcciones realizadas por el uso de comandos que brinda GeoGebra, que de otra forma no se lograría.

Referencias

AYRES, F. (1971). **Geometría Proyectiva**. México: McGraw-Hill.

BLANCO, H. (2006). Un cambio en el paradigma de la Geometría. En **Revista Premisa (SOAREM)**, Año 8, Número 26, pp. 37-47.

DE VILLIERS, M. (2008). El futuro de la Geometría en la escuela secundaria. En **Didáctica de la Matemática**. Año 2008, pp. 1-29. Recuperado de http://imerl.fing.edu.uy/didactica_matematica/

ETAYO GORDEJUELA, F. (2010). Matemáticas y realidad. Geometrías no euclídeas y universo. ***En Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*** (Esp.) Vol. 104, N° 1, pp. 97-105.

FERRAGINA, R. (Comp.). (2012). **GeoGebra entra al aula de Matemática**. Buenos Aires: Miño y Dávila.

GIRONDO, E. (2009). **Geometría Proyectiva**. Recuperado de https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/egirondo/.

LOMBARDO, G. (2013). Marco teórico que subyace en la propiedad que dio origen al logotipo de GeoGebra. **En Revista do Instituto GeoGebra Sao Paulo**. Vol. 2, N° 2, pp. 69-80.

PASCALI, J. (1952). **Geometría Proyectiva**. Buenos Aires: Centro Estudiantes de Ingeniería de Buenos Aires.

RUIZ, A. (1999). **Geometrías no euclidianas. Breve historia de una gran revolución intelectual.** San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

SANTALÓ, L. (1976). **Geometrías no euclidianas.** Buenos Aires: EUDEBA.