¿Dónde está la "linealidad" en una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$?

Where is the "linear" in an $\mathbb{R}^2$ linear transformation?

JUAN GABRIEL MOLINA ZAVALETA[1]
ALEJANDRO ROSAS MENDOZA[2]
HÉCTOR HERNÁNDEZ GUZMÁN[3]

Resumen

En este artículo se describe una secuencia didáctica que introduce al estudio de las transformaciones lineales considerándolas como una forma especial de transformar en la que se utilizan representaciones geométricas. La secuencia didáctica se fundamenta en los modelos tácitos de Fischbein. Al inicio del trabajo se muestran algunos modelos intuitivos que tienen jóvenes egresados de una universidad pública que durante sus estudios tomaron al menos un curso de álgebra lineal. Posteriormente se muestra la secuencia didáctica y una breve discusión de sus elementos entre los que se cuenta un software de geometría dinámica; adicionalmente se incluyen comentarios sobre el rol del profesor a lo largo de la actividad. Al final se presentan respuestas de los jóvenes y algunas consideraciones finales.
Palabras clave*: Transformación lineal; intuición; secuencia didáctica.*

Abstract

This article introduces a didactic sequence considering the study of linear transformations as a special way to transform in which geometric representations are used. The teaching sequence is based on Fishbein's tacit models. At the beginning we can see some intuitive models from young graduates of a public university, during their studies they took at least one course in linear algebra. Subsequently the didactic sequence and a brief discussion of its elements including a dynamic geometry software are shown; further comments on the role of the teacher over the activity are included. At the end some students' responses and some concluding remarks are presented.
Keywords*: Linear transformation; intuition; didactic activity.*

Resumo

Este artigo descreve uma sequência de ensino que introduz o estudo de transformações lineares, considerando-as como uma forma especial de transformação que utiliza representações geométricas. A sequência didática é baseada em modelos tácitos de Fischbein. No início do trabalho são alguns modelos intuitivos que têm jovens licenciados de uma universidade pública que teve pelo menos um curso de álgebra linear durante seus estudos. Mais tarde mostrou a sequência didática e uma breve discussão dos elementos que incluem um software de geometria dinâmica; Além disso incluiu comentários sobre o papel do professor durante a atividade. Respostas dos jovens e algumas considerações finais são apresentadas no final.
Palavras-chave*: transformação linear; intuição; sequência de ensino.*

[1] Instituto Politécnico Nacional de Mexico- jmolinaz@ipn.mx
[2] Instituto Politécnico Nacional de Mexico- alerosas@ipn.mx
[3] Universidad Autónoma de México- hector_h.g@hotmail.com

Introducción

Esta lección está pensada para implementarse en un curso de álgebra lineal como introducción al estudio de las transformaciones lineales. La propuesta trata sobre la linealidad en una transformación, pretende proporcionar a los estudiantes una idea intuitiva de lo que puede entenderse por linealidad de una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$. Por el carácter intuitivo que se eligió utilizar en este diseño didáctico no se discuten las propiedades formales que definen como lineal a una transformación. ¿Por qué este interés en construir una secuencia didáctica para el estudio de la linealidad? La inquietud se inició por los resultados arrojados en un estudio previo en el que se identificaron modelos intuitivos que un grupo de estudiantes tenían respecto a las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$. Los modelos intuitivos se consideraron como los describe Fischbein (1989). Según Fischbein la intuición influye implícitamente en cómo los estudiantes entienden los conceptos en ciencias y en matemáticas, y esto ocurre por medio de los modelos intuitivos. Fischbein (1987) señala que el término intuición no tiene una única definición y lo que debemos entender por intuición se refiere a aquellas ideas que son aceptadas como ciertas por ser evidentes por sí mismas, no requieren argumentación para ser aceptadas. Los modelos intuitivos son representaciones que hacemos (consciente o inconscientemente) de conceptos o de ideas. Fischbein ejemplifica cómo estos modelos tácitos pueden manipular, sin que seamos conscientes de ello, el significado, el uso y las propiedades de conceptos formalmente establecidos. Por ejemplo, algunos estudiantes piensan en el concepto de conjunto como una colección de objetos. Este modelo podría complicarle a un estudiante aceptar la idea de conjunto vacío pues ellos podrían preguntarse ¿cómo puede haber un conjunto sin elementos y ser conjunto?

1. Algunos modelos intuitivos sobre la transformación lineal y la linealidad

Utilizando entrevistas, en forma individual y aislada, se le preguntó a 4 estudiantes sobre la existencia de ciertas transformaciones lineales. Antes de la aplicación de la entrevista se les informó que trataría sobre transformaciones lineales y no se les dio más detalles. Estos estudiantes recién habían terminado sus estudios de licenciatura en Enseñanza de la Matemática en la Universidad Autónoma de Yucatán, en México; sus sobrenombres son: Fabiola, Gris, Hermes, Nayely; su edad oscilaba entre 23 y 26 años. Cada uno de los entrevistados, en sus estudios de licenciatura, acreditó por lo menos un curso de álgebra lineal. En la entrevista las preguntas tenían el formato del ejemplo I.

Ejemplo I: Pregunta sobre la posible existencia de una transformación lineal en una situación geométrica con vectores.

Fuente: Molina y Ocktaç (2007).

¿Podría existir una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumente por qué.

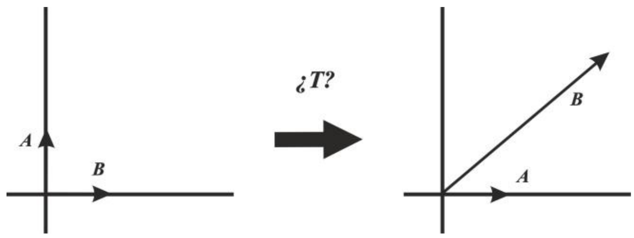


Figura 1 Figura 2

A los estudiantes se les planteaban distintas situaciones con vectores y ellos respondían. Se encontró que los estudiantes contaban con un conjunto de modelos intuitivos respecto a las transformaciones lineales y con base en ellos decidían si la relación geométrica que se les mostraba podía corresponder con una transformación lineal. Tales modelos corresponden con transformaciones como expansiones, contracciones, rotaciones o combinaciones de ellas. El problema se manifestó cuando se les presentaba una relación geométrica que no estaba en su conjunto de modelos (o que no las podían explicar en términos de ellos) y eso les impedía reconocer ciertas transformaciones lineales. Se pueden consultar los detalles del trabajo en Molina (2004) y Molina y Ocktaç (2007). Ante el ejemplo que se mostró, uno de los estudiantes que venía contestando correctamente respondió:

> H: No, esta no, porque está dejando fijo a B y este, está transformando a, A (señala la figura 2), y pues no.
>
> El razonamiento que pudo haber conducido a Hermes a esta conclusión es que él podría pensar a la transformación lineal como una función que tiene el mismo efecto geométricamente en todos los vectores del plano. (Molina, 2004, p. 193)

Hermes fue el estudiante que mejor argumentó en el transcurso de la entrevista, él mostró un buen manejo geométrico y algebraico de las propiedades que definen a una transformación lineal sin embargo en este caso que ejemplificamos, falló. En el citado estudio de Molina (2004) a los estudiantes también se les preguntó qué significaba para ellos el adjetivo *lineal* en una transformación lineal y algunas de sus respuestas fueron:

El caso de Grisel, ella escribe la expresión: $v_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3\\x+y\end{pmatrix}$, cuando el entrevistador le pregunta por qué es lineal, ella responde:

> G8: Bueno, aquí en primera instancia, pues podría decirte que tengo ecuaciones lineales, operaciones lineales, podría ser, o sea, más o menos, no me acuerdo muy bien de cómo se define que sí es lineal, pero me podría imaginar porque se tratan de, este, ecuaciones lineales. (Molina, 2004, p. 70)

Esta estudiante piensa en lo lineal asociado al grado de las ecuaciones involucradas. En una clase de matemáticas se suele decir que una expresión algebraica es lineal si tiene grado uno pues su representación gráfica es una línea recta. El ejemplo que Grisel da no cumple las propiedades de una transformación lineal por su idea de lo que es lineal y la lleva a una respuesta matemática incorrecta, se podría decir que un modelo intuitivo influye su razonamiento.

El caso de Fabiola:

> F48: Lineal […], lineal, creo que se referiría, a vectores y transformación serían las operaciones que yo le aplico a esos vectores ¿no?, o algo así. (Molina, 2004, p. 99)

Esta estudiante lo relaciona con vectores pues los considera como líneas, esto lo declara más adelante en la entrevista. En efecto las representaciones de vectores incluyen líneas. Los dibujos de vectores que utilizamos cotidianamente en una clase de matemáticas son modelos explícitos que fueron diseñados conscientemente para representar tal concepto, sin embargo estas representaciones aportan información adicional a los estudiantes que afectan cómo lo entienden. En el caso de Fabiola las líneas rectas que forman el dibujo de los vectores lo asocia a la linealidad.

El caso de Nayely. Se le había pedido un ejemplo de una transformación no lineal y no pudo proporcionarlo en ese momento.

> N32(Fragmento):… Mjm, sí es lineal también. Mmm, una que no sea lineal […] no recuerdo. (Molina, 2004, p. 123)

A continuación se le preguntó por el significado del adjetivo *lineal*, respondió así:

> N34: Sí, ya, ya tengo una que no es lineal, la cuadrática, ya pensando en lineal como línea recta, la cuadrática no, no, no separa sumas. (Molina, 2004, p. 124)

Nayely pudo argumentar formalmente que sus ejemplos sí cumplían las dos propiedades de la transformación lineal. Sin embargo Nayely, al igual que Fabiola, también asocia la linealidad con una línea recta pero en este caso su modelo intuitivo no le causó dificultades al verificar las propiedades de la transformación lineal.

El caso de Sara:

> S32: Yo eso de lineal, lo comprendo de recta ¿no?, ¿lineal? Yo lo entiendo así como de recta. Entonces acá a lo que me refería cuando te dije lo de segmentos de recta era esto ¿no?, o sea, un vector pues yo lo veo como un segmento de recta acá. (Molina, 2004, p. 148)

El caso de Hermes:

> H20: ¡Ah! porque […] no, no sé, sería como cuando, tal vez porque cuando transformas, le aplicas la transformación a todos los puntos de una línea, vuelve a ser una línea. Podría ser por eso, pero, específicamente, por qué, no. (Molina, 2004, p. 175)

Esta afirmación de Hermes "tal vez porque cuando transformas, le aplicas la transformación a todos los puntos de una línea, vuelve a ser una línea" parece ser una de esas reglas intuitivas (o modelos) que asocia al concepto de transformación lineal. Relación que no siempre es verdad. En el trabajo de Molina (2004) se demuestra que existe la transformación lineal que mapea a los vectores (x, y) (tales que están definidos por $y = mx + z$, con $z \neq 0$) al vector $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ y está determinada por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{z}\begin{bmatrix} -p_1 m & p_1 \\ -p_2 m & p_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Donde x, y, p_1 y p_2 son escalares. Ver Molina (2004, p. 55)

Estas respuestas de los estudiantes que evidencian una idea limitada acerca de la linealidad en una transformación lineal llevó a considerar que una discusión interesante en una clase de matemáticas respecto a las transformaciones lineales podría ser sobre la linealidad y cómo se podría manifestar en $\mathbb{R}^2$.

2. Acerca de lo intuitivo en la secuencia didáctica

Esta propuesta ofrece una aproximación intuitiva al estudio de la linealidad en transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$, la idea es mostrarla como una forma especial de transformar objetos representados en el plano a través de realizar movimientos de los ejes del plano: esto se explica en la sección Institucionalización de la secuencia. Fischbein menciona que "se piensa mejor con lo perceptible, con lo prácticamente manipulable, con lo familiar, con lo que se le puede controlar su comportamiento, con la validez implícita, que con lo abstracto, lo que no se puede representar, lo incierto, lo infinito" (Fischbein, 1987, p. 122). Por lo anterior la secuencia utiliza representaciones factibles de ser manipuladas geométricamente en lugar de representaciones algebraicas abstractas y para esto el GeoGebra resulta de utilidad pues permite observar el movimiento de los ejes. "Gracias a los gráficos, captamos las matemáticas con nuestros ojos y con los ojos de la mente. Las funciones son formas (lineal, plano, empinado, cruce, suave). Y operarlos es garabatear en imágenes mentales (rotando, extrapolando, rellenando, trazando)". (Pinker, 1997, p.359)

3. La secuencia didáctica

A continuación se muestra la secuencia y una discusión de sus elementos que la forman. La secuencia está organizada en dos etapas, la primera contempla que sea trabajada solo con lápiz y papel; el GeoGebra se utiliza en la segunda etapa.

Tarea 1. Observen el triángulo de la figura 1 en el plano xy:

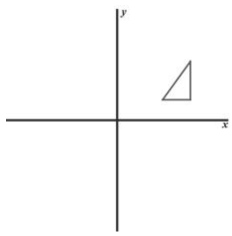


Figura 1

Respondan:

Si se mueven el eje **x** y el eje **y** como en la figura 2, ¿cómo queda dibujado el triángulo de la figura 1?

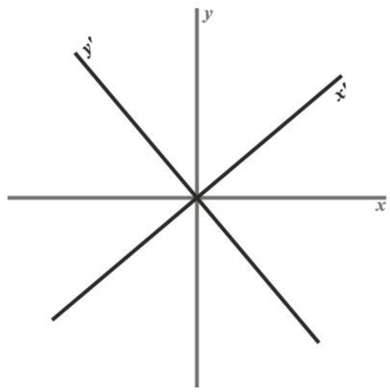


Figura 2

Nota: El sistema de ejes xy en gris representa la posición original (la mostrada en la figura 1) y el sistema de ejes $x'y'$ representan la nueva posición del plano xy al moverse y es allí donde se debe mostrar cómo queda dibujado el triángulo.

El rol del profesor ante la tarea 1

El profesor deberá decidir si la tarea 1 será resuelta por los estudiantes en forma individual o por equipos. Posteriormente deberá asegurarse que los estudiantes comprendan la tarea que han de realizar. Si hubiera preguntas de cómo resolverla el profesor deberá de comentar a los estudiantes que imaginen cómo debe ser resuelta y que la hagan. También deberá dar tiempo a los estudiantes para que la resuelvan, cinco minutos suelen ser suficientes. Una vez transcurrido el tiempo otorgado a los estudiantes para que resuelvan la tarea el profesor deberá solicitarles que comenten su solución y deberá escuchar las respuestas sin juzgarlas como correctas o incorrectas. Finalmente, el profesor les dirá a los estudiantes que antes de discutir las respuestas a la tarea 1 pasaran a la tarea 2 para posteriormente comentar ambas soluciones.

Tarea 2. Si se mueven el eje x y el eje y como en la figura 3, ¿cómo queda dibujado el triángulo de la figura 1?

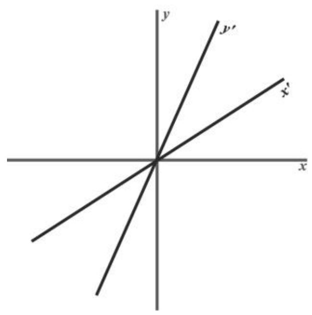


Figura 3

El rol del profesor ante la tarea 2

El profesor deberá asegurarse que los estudiantes comprendan la tarea y deberá darles tiempo para que la resuelvan (diez minutos suelen ser suficientes). Cuando haya concluido el tiempo asignado para resolver la tarea 2, el profesor deberá solicitar a los estudiantes que comenten su solución y escuchará las respuestas sin juzgarlas como correctas o incorrectas. Si hubieran respuestas diferentes, el profesor deberá iniciar una discusión con los estudiantes sobre ¿cuál es la respuesta correcta?, si todos los estudiantes dieran una respuesta semejante podría preguntar: ¿Es correcta la respuesta?¿Por qué? El profesor también podría solicitar a los estudiantes que expliquen cómo se transformaría otra figura, un círculo en lugar del triángulo por ejemplo. Finalmente el profesor deberá explicar cuál es el propósito de las tareas, esto se explica en la sección institucionalización.

4. Institucionalización

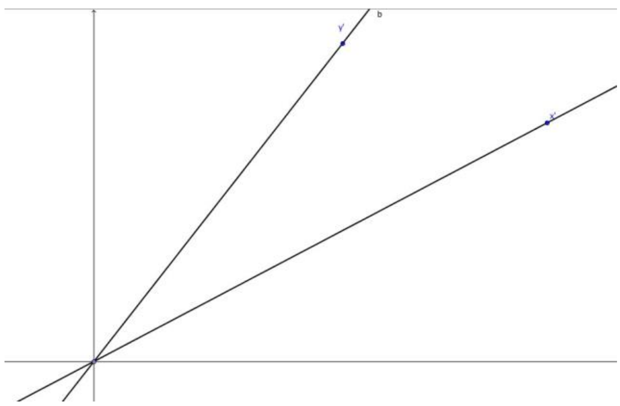
Esta etapa el profesor explica a los estudiantes que todas las respuestas que han son correctas en términos matemáticos porque en las instrucciones de las tareas no se declararon reglas sobre cómo transformar el triángulo (si es que lo transformaron), por tanto cualquier manera en que hayan procedido es correcta. A continuación se les expone una alternativa de transformación, la llamada transformación lineal.

La transformación lineal, una forma particular de transformar:

Para explicar la idea se resuelve la tarea 2 utilizando Geogebra. En principio en vista gráfica se recrea la situación de la figura 3 de la tarea (figura I).

Figura I: Representación de la tarea 2 en GeoGebra.

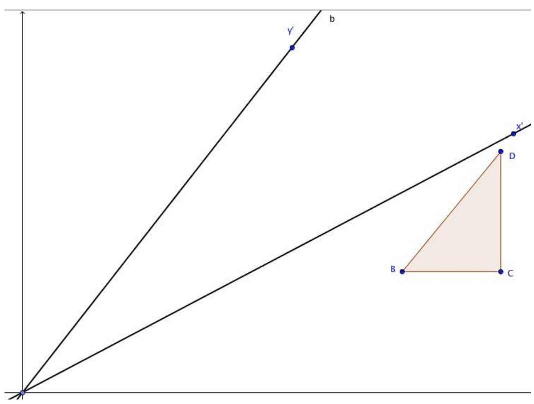
Fuente: Elaboración propia.



Para resolver la actividad básicamente lo que se hace es colocar cada uno de los puntos del triángulo (dado en la tarea 1) en sus nuevas posiciones que tendrían en los eje x’y’. En la figura II se muestra el triángulo que será transformado, fue creado con la herramienta Polígono y se le ocultaron las etiquetas de los lados.

Figura II: Representación en GeoGebra del triángulo a transformar de la tarea 2.

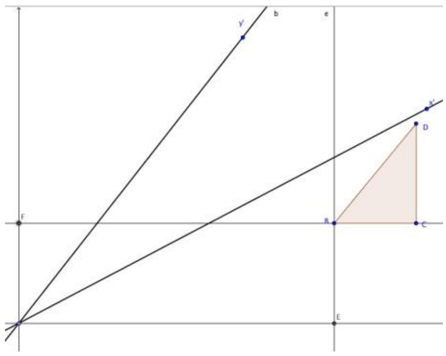
Fuente: Elaboración propia.



Para ubicar los puntos B, C y D del triángulo en los ejes primos se deberán determinar sus componentes x e y en el sistema carteciano xy y posteriormente ubicar estas componentes en los ejes primos. A continuación se explica para el punto B, para los puntos C y D se hará en forma semejante; para determinar la componente en x del punto B se traza una recta paralela al eje y que pase por el punto B y se determina la intersección de la paralela y el eje x; de manera semejante, para determinar la componente y del punto B se traza una paralela al eje x que pase por el punto B y se calcula su intersección con el eje y, ver figura III.

Figura III: Determinación con rectas paralelas de las componentes x e y del punto B en el eje xy, puntos E y F.

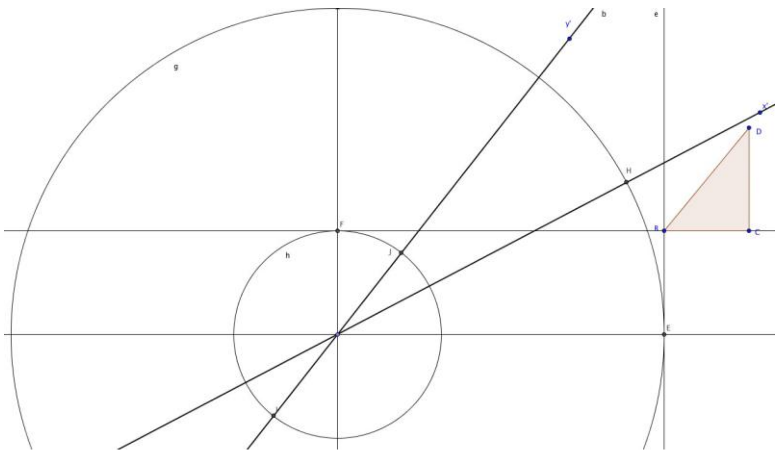
Fuente: Elaboración propia.



Los puntos E y F son las componentes del punto B en el sistema xy; si se ubican estos puntos en los ejes primos, por medio de paralelas se podría ubicar la posición del punto B en el sistema primo. Para ubicar el punto E en el eje x' se traza una circunferencia con centro en el origen del sistema xy y que tenga radio E, posteriormente se calcula la intersección de dicha circunferencia con el eje x' y esta será la posición buscada y se repite el procedimiento para el punto F; ver figura IV.

Figura IV: Los puntos H y J representan las componentes E y F, respectivamente, del punto B en los ejes x'y'.

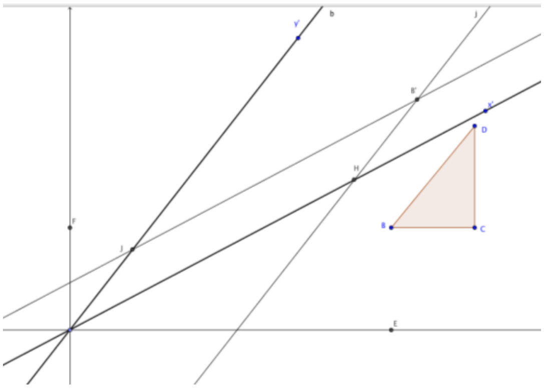
Fuente: Elaboración propia.



Para ubicar el punto B en el sistema primo se traza una paralela al eje y' que pase por H y otra paralela al eje x' que pase por J y se determina su intersección, esta será la posición de B en los ejes x'y', es decir B', ver figura V.

Figura V: Determinación del punto B en los ejes x'y', punto B'.

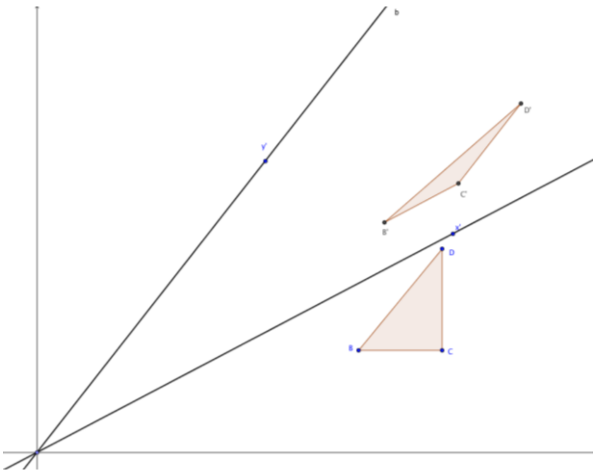
Fuente: Elaboración propia.



Con un procedimiento semejante se determinan los puntos C’ y D’ y posteriormente con la herramienta Polígono se construye el triángulo B’C’D’ con el cual se resuelve la tarea 2 con una transformación lineal. Figura VI.

Figura VI: El triángulo B’C’D’ es la representación de la imagen bajo una transformación lineal del triangulo BCD.

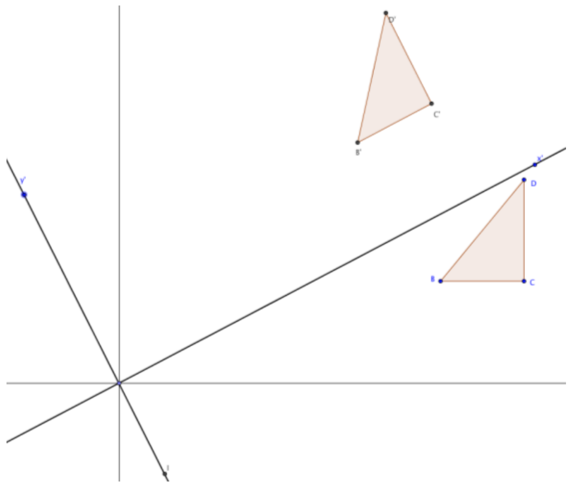
Fuente: Elaboración propia.



Si el eje y’ se rota y se coloca perpendicular al eje x’ para simular la situación de la tarea 1, se obtiene la transformación lineal del triángulo BCD la cual sería una solución a la tarea; figura VII.

Figura VII: El triángulo B’C’D’ es la representación de la imagen bajo una transformación lineal del triangulo BCD.

Fuente: Elaboración propia.



Ejercicios para los estudiantes

El profesor deberá plantear otras posibles posiciones para los ejes primos en las tareas y usar otras figuras (como vectores) para que los estudiantes determinen cómo quedarían transformados con una transformación lineal. Otro asunto a discutir es ¿qué elementos de la construcción realizada en GeoGebra son los que determinan el comportamiento de una transformación lineal? Otro asunto interesante para discutir sería retomar la pregunta planteada al inicio del artículo, ver ejemplo I.

Cierre de la secuencia didáctica

El profesor deberá remarcar que en lo estudiado sólo se han considerado transformaciones geométricas en $\mathbb{R}^2$, sin embargo las hay en $\mathbb{R}^3$ pero para dimensiones superiores a 3 las representaciones geométricas de las transformaciones lineales dejan de ser accesibles y la discusión de la linealidad en esos casos se realiza en términos algebraicos, los cuales también se pueden aplicar a los casos estudiados en estas tareas.

5. Discusión de la secuencia

Cuando los estudiantes aporten sus respuestas a las tareas 1 y 2 posiblemente habrá algunas soluciones que podrán parecer disparatadas. El profesor podría esperar una respuesta que corresponda con el modelo de la linealidad sin embargo si el estudiante no cuenta con ese modelo hará uso de sus recursos y dado que las tareas no declaran reglas de cómo deberán transformar (o si deberán transformar) entonces cualquier propuesta que aporten los estudiantes es correcta. A continuación mostramos algunas de las respuestas que dio un grupo de estudiantes a las tareas.

Respuestas de estudiantes a la tarea 1

Fuente: Hernández (2013)

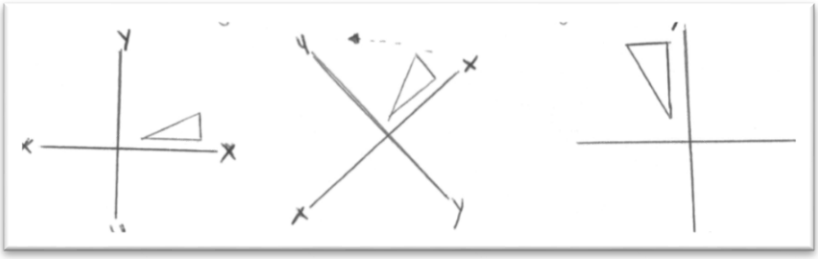
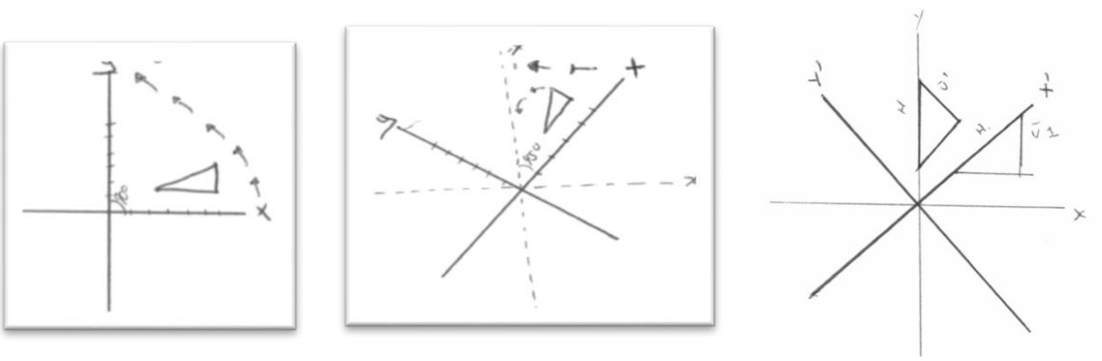


Figura VIII

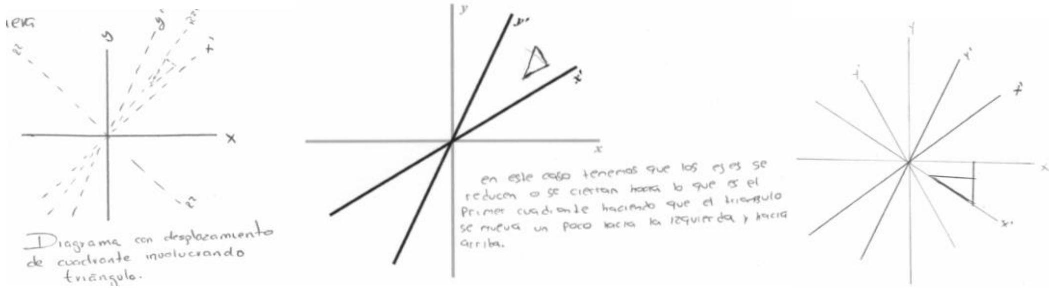


Figuras IX, X y XI

Resulta interesante que los estudiantes agregan nuevos elementos a las representaciones dadas en las tareas; en las figuras IX y X se aprecian flechas que indican la dirección del giro y etiquetas de 90 y 45 grados. Esto es interesante porque muestra cómo los modelos explícitos utilizados en el planteamiento de las tareas (el dibujo del triángulo rectángulo en un plano ortogonal y el otro sistema coordenado que giró) comunican información a los estudiantes y esta información puede ayudarles a cumplir la tarea o convertirse en un obstáculo si esta les causa un conflicto.

Respuestas de estudiantes a la tarea 2

Fuente: Hernández (2013)



Figuras XII, XIII y XIV

La respuesta en la figura XII muestra una deformación del triángulo al girar los ejes, sin embargo en la figura XIII aunque parece haber una deformación, el estudiante agrega un texto que explica que los ejes se cerraron, entonces el triángulo se movió; no declara que hubo deformación. En todos los casos, en el transcurso de la clase, se puede discutir con los estudiante sobre cómo construyeron su dibujo, eso ayudaría a entender qué hicieron y una vez que se escucharon y comentaron las soluciones el profesor deberá pasar a las siguientes etapas de la secuencia, la institucionalización.

Consideraciones finales

Esta secuencia se propone como una forma más de introducir a los estudiantes al tema de las transformaciones lineales; su utilización podría favorecer en los estudiantes la construcción de modelos tácitos que afecten cómo entienden el concepto de transformación lineal (para bien o para mal). En un caso favorable podría servir para ampliar su universo de transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y que reconozcan transformaciones lineales involucradas en situaciones como la del ejemplo I:

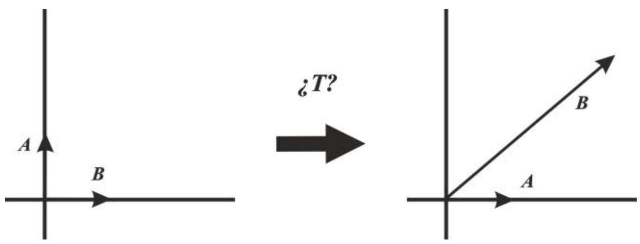


Figura 1 Figura 2

En algunos estudiantes que han tomado algún curso de álgebra lineal y que inicialmente declaraban la no existencia de la transformación lineal en esta situación, después de la secuencia cambiaban su postura; por lo anterior resulta importante observar las respuestas de los estudiantes a esta pregunta una vez que hayan hecho la actividad para conocer su postura ante esta situación. En un caso desfavorable las ideas que se generen con esta secuencia podrían volverse un obstáculo para entender transformaciones lineales en otras dimensiones en las que no sea factible emplear representaciones geométricas, por ello el alcance de trabajar con estas representaciones debe ser discutido con los estudiantes. Esta propuesta no es una versión finalizada, será necesario seguir probándola para evaluar cómo funciona e ir mejorándola.

Esto que mostramos fue una primer etapa en la secuencia didáctica, la siguiente es matematizar esta manera de transformar que trabajamos para transitar al sistema de representación algebraico y allí discutir las propiedades que definen a una transformación lineal (y buscar una ruptura con lo geométrico para entrar al terreno formal), pero ese es un asunto que dejamos pendiente para un documento posterior.

Referencias

FISCHBEIN, Efraim. (1987). *Intuition in science and matematics: an educational approach*. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.

FISCHBEIN, Efraim. (1989). Tacits Models and Mathematical Reasoning. *For de Learning of Mathematics, 9*(2), 9-14.

HERNÁNDEZ, Héctor. Diseño de una secuencia didáctica para el estudio de la transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ (Tesis de maestría). Cicata-IPN, México.

MOLINA, Juan Gabriel. (2004). Las concepciones que los estudiantes tienen sobre la transformación lineal en contexto geométrico (Tesis de maestría). Cinvestav, México.

MOLINA, Juan Gabriel; OCKTAÇ, Asuman. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. *Relime*, *10*(2), 241-273.

PINKER, Steven. (1997). *How the Mind Works*. New York: Norton.