La diferencia como herramienta de análisis del cambio de las magnitudes geométricas: El caso del círculo

The difference as an analysis tool of the change of geometric magnitudes: The case of the circle

MARIO SÁNCHEZ AGUILAR[1]
JUAN GABRIEL MOLINA ZAVALETA[2]

Resumen

En este escrito presentamos una propuesta didáctica enfocada en estudiar algunas relaciones que existen entre el radio, el área y la circunferencia de un círculo. La propuesta está inspirada en elementos históricos de la génesis del cálculo y hace uso de las potencialidades del software GeoGebra. Aunque la propuesta podría agregar dinamismo a la enseñanza de la geometría e incluso tener algún valor motivacional para los estudiantes, sería necesario hacer algun estudio de campo que ilustre sus alcances y motivaciones.
Palabras clave*: cálculo de diferencias; área y circunferencia de un círculo; historia de la matemática.*

Abstract

In this paper we present a didactical proposal focused on the study of some of the existing relationships between the radius, area and circumference of a circle. The proposal is inspired by historic elements of the genesis of calculus and makes use of the potential of the software GeoGebra. Although the proposal could add dynamism to the teaching of geometry and even have some motivational value for students, it would be necessary to do some field research to illustrate its scope and limitations.
Keywords*: difference between two quantities; area and circumference of a circle; history of mathematics.*

Introducción

El uso de la historia de las matemáticas en la enseñanza y el aprendizaje de las mismas**,** es un área de investigación bien establecida dentro de la comunidad internacional de educadores matemáticos; esto se puede constatar a través de las publicaciones, congresos, y grupos de estudio especializados en este tema, que desde hace varios lustros se han venido organizando. El volumen 6 de los estudios ICMI (Fauvel & van Maanen, 2002),

[1] Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional de México – mosanchez@ipn.mx
[2] Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional de México – jmolinaz@ipn.mx

las reuniones del grupo *History and Pedagogy of Mathematics* (HPM) y el grupo de trabajo *History in Mathematics Education* del congreso europeo CERME, son sólo algunos ejemplos que ilustran el interés de nuestra comunidad por utilizar la historia de las matemáticas como un elemento de la educación matemática. Sin embargo, no todos los usos que se hacen de la historia de las matemáticas en la enseñanza son iguales. En su categorización de los "por qué" y "cómo" utilizar la historia en la educación matemática, Jankvist (2009) propone tres categorías para organizar los distintos usos que se hacen de la historia en la educación matemática: (1) las aproximaciones iluminadoras, (2) las aproximaciones basadas en módulos, y (3) las aproximaciones basadas en la historia.

En este manuscrito presentamos una propuesta didáctica enmarcada en la categoría de aproximaciones basadas en la historia, es una propuesta inspirada en el desarrollo histórico de las matemáticas. En particular retomamos la idea de la *diferencia* $x_2 - x_1$ entre dos cantidades x_1 y x_2 , la cual fue una herramienta de análisis de la variación de cantidades, que se utilizó durante la génesis del cálculo. Nuestra propuesta está inspirada en el método de interpolación llamado *methodus differentialis*, el cual fue utilizado inicialmente por Isaac Newton como una herramienta de predicción del comportamiento de algunos cuerpos celestes (Newton, 1686).

Uno de los propósitos de nuestra propuesta es ayudar a los estudiantes a descubrir algunas relaciones existentes entre la longitud del radio de un círculo, y el área y el perímetro de ese mismo círculo. Como veremos más adelante la propuesta incluye el uso del software GeoGebra, el cual es percibido como un instrumento de mediación del saber.

En la siguiente sección del escrito explicamos el contexto que dio origen a nuestra propuesta, la cual se refiere a una reforma reciente de la educación secundaria en México. Posteriormente ilustramos brevemente el funcionamiento del *methodus differentialis* en el cual está inspirado este trabajo. En las siguientes dos secciones detallamos los propósitos y funcionamiento de la propuesta, pero también clarificamos los vínculos entre ésta y el *methodus differentialis* de Newton. Concluímos nuestro escrito con algunas reflexiones sobre el dispositivo didáctico presentado.

1. El contexto en el que surge la propuesta

Este diseño didáctico se origina en el contexto de la más reciente reforma de la educación secundaria en México. En esta reforma los contenidos matemáticos que deben ser presentados a los estudiantes están organizados en tres ejes: (1) Sentido numérico y pensamiento algebraico, (2) forma, espacio y medida, y (3) manejo de la información.

En el eje de "forma, espacio y medida" se incluyen temas y actividades relacionadas con el estudio de cuerpos geométricos y sus propiedades; en particular, los lineamientos de la reforma indican que se deben estudiar las relaciones entre magnitudes geométricas. Los lineamientos recomiendan también el uso de algún software de geometría dinámica para apoyar el estudio de los cuerpos geométricos (ver Secretaría de Educación Pública, 2006).

Un caso que llamó nuestra atención dentro de estos lineamientos es la instrucción que indica que se deben estudiar relaciones entre las magnitudes de un círculo; al respecto los lineamientos generales de la reforma mencionan:

> Como ocurre con el estudio de las otras figuras, no sólo se trata de calcular el área y el perímetro, sino también, conocidos el perímetro y el área, se debe calcular la longitud del radio o del diámetro, así como resolver problemas de cálculo de áreas sombreadas (corona circular); **también se debe analizar la relación entre la longitud del radio y el área del círculo, como punto de contraste con la relación entre la longitud del diámetro y la longitud de la circunferencia**. (Secretaría de Educación Pública, 2006, p. 54, nuestro énfasis).

Es importante hacer notar cómo estos lineamientos le indican al profesor *qué* debe enseñar, pero no le clarifican *cómo* lo debe enseñar. Para esta lección particular los lineamientos recomiendan consultar el material complementario denominado "Geometría dinámica" (Secretaría de Educación Pública, 2000). Uno esperaría que este material complementario incluyera instrucciones específicas sobre cómo el profesor puede implementar la exploración requerida, particularmente haciendo uso de algún software de geometría dinámica, sin embargo como consta en las páginas 68-70 del material complementario y que corresponden al análisis las magnitudes del círculo, solo se propone una actividad basada en lápiz y papel, pero no se hace uso de algún paquete de geometría dinámica.

Lo que queremos evidenciar aquí es la falta de una guía explícita en los lineamientos de la reforma sobre cómo el profesor puede llevar a cabo la exploración requerida auxiliándose de algún software. Es aquí donde surge la necesidad de una propuesta didáctica que ayude al profesor a cerrar la brecha que existe entre lo que solicita el curriculo escrito y lo que el profesor debe hacer en el salón de clases. Nuestra propuesta didáctica fue diseñada con la intención de cubrir esa necesidad.

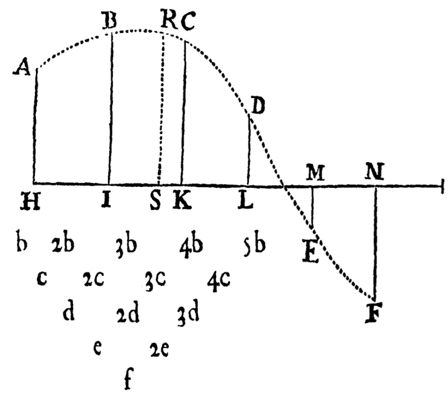
Como hemos comentado en la introducción del escrito, el diseño didáctico propuesto está inspirado en el *methodus differentialis* de Isaac Newton. En la siguiente sección ilustraremos el funcionamiento de este método, para posteriormente presentar la propuesta.

2. Ilustración del funcionamiento del *methodus differentialis*

Como hemos mencionado previamente, el *methodus differentialis* es un método matemático originalmente utilizado por Isaac Newton como una herramienta de predicción del comportamiento de algunos cuerpos celestes. Este método se publica desprendido de sus significaciones físicas veinticinco años después en un compendio de resultados matemáticos del mismo autor (Newton, 1711). En este método aritmético la idea matemática básica que sustenta su funcionamiento es la de la diferencia aritmética; esto permite a Newton calcular cocientes de diferencias para encontrar una distancia desconocida, que en el caso de la figura 1 es la señalada como *RS*.

El *methodus differentialis* es esencialmente un método aritmético de interpolación. En éste se considera un conjunto finito de puntos en un plano *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, etc., a partir de los cuales se trazan los segmentos de recta *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM* y *FN*. Estos segmentos son perpendiculares a otro segmento de recta *HN* (ver figura 1).

FIGURA 1: Gráfico que ilustra el funcionamiento del *methodus differentialis.*
FUENTE: Newton (1686, p. 288).



El objetivo principal de este método es encontrar la longitud o altura correspondiente a algún punto desconocido, que se encuentre en alguna posición intermedia, entre los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. En la figura 1 esta longitud desconocida se representa con el segmento *RS*. Evidentemente estas longitudes podrían interpretarse hoy en día como los valores de las ordenadas correspondientes a los valores *H*, *I*, *K*, *L*, *M* y *N* en el dominio de una función.

El método hace uso de diferencias aritméticas y cocientes de éstas. Estos cocientes de diferencias se encuentran representados en la figura 1 con las expresiones que incluyen las letras minúsculas *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*. Los cocientes se encuentran definidos de la siguiente manera:

$$b = \frac{AH - BI}{HI}, 2b = \frac{BI - CK}{IK}, 3b = \frac{CK - DL}{KL}, 4b = \frac{DL - ME}{LE}, etc.$$

$$c = \frac{b - 2b}{HK}, 2c = \frac{2b - 3b}{IL}, 3c = \frac{3b - 4b}{KM}, etc.$$

$$d = \frac{c - 2c}{HL}, 2d = \frac{2c - 3c}{IM}, etc.$$

$$e = \frac{d - 2d}{HM}$$

Para calcular el valor de la ordenada que se desconoce, es necesario calcular los valores de *a*, *p*, *q*, *r*, *s* y *t*. Estos valores se encuentran definidos de la siguiente manera (tómese como referencia la figura 1):

$$a = AH \qquad r = (q)(SK)$$

$$p = -HS \qquad s = (r)(SL)$$

$$q = (p)(-IS) \qquad t = (s)(SM)$$

Finalmente, la longitud que se quiere conocer, representada en la figura 1 como *RS*, se encuentra definida por la siguiente expresión:

$$RS = a + bp + cq + dr + es + ft$$

3. La propuesta didáctica para analizar las relaciones existentes entre algunas magnitudes del círculo

Anteriormente hemos ilustrado cómo los lineamientos de la reforma de la educación secundaria en México piden que se analice la relación entre la longitud del radio, el área del círculo, y la longitud de la circunferencia, pero no se aclara cómo hacerlo con el apoyo de un software de geometría dinámica. Las capacidades del software GeoGebra permiten que se vinculen de manera dinámica los contextos de representación geométrico y numérico, lo cual es ideal para analizar las relaciones entre las magnitudes del círculo que se especifican en la reforma.

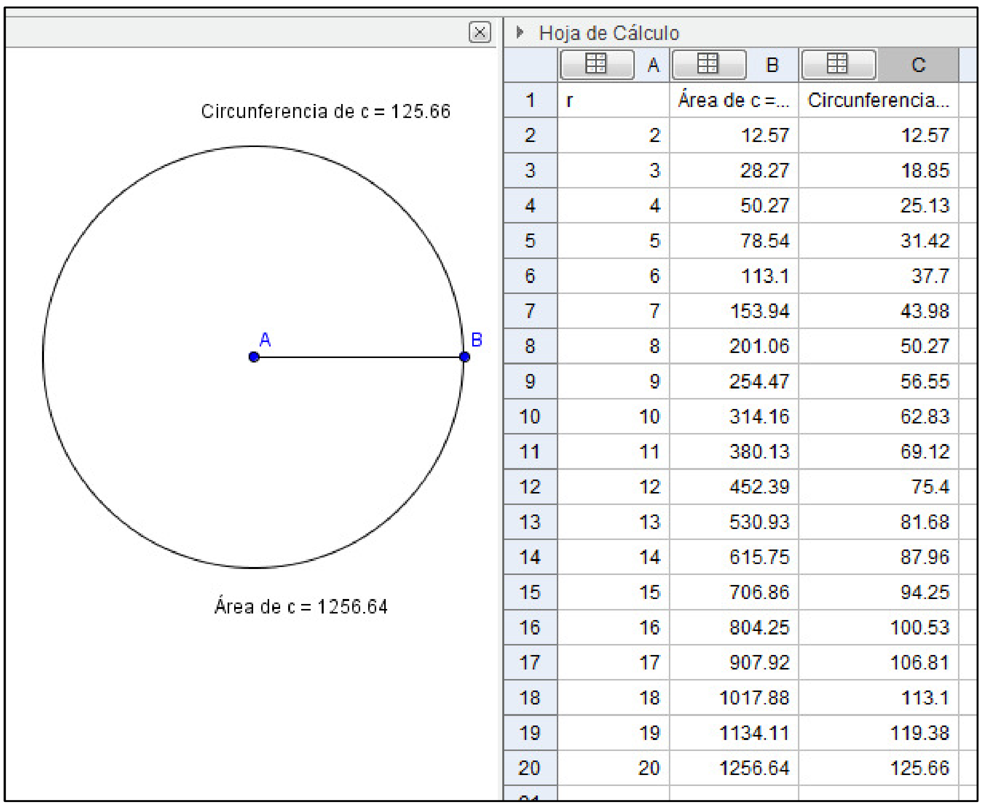
Ahora sugerimos una manera de cómo estudiar esas relaciones con ayuda del software GeoGebra. La propuesta tiene un propósito doble: por un lado tiene el objetivo de ayudar a los estudiantes a descubrir que cuando la longitud del radio aumenta, el área y la longitud de la circunferencia también aumentan, pero no de la misma forma o con la misma velocidad; por otro lado también tiene el propósito de ayudar a los profesores de matemáticas a explorar este tipo de relaciones con sus estudiantes de una manera dinámica.

Iniciamos con el siguiente planteamiento:

> *Consideremos un círculo cuya longitud inicial del radio es igual a uno y comienza a crecer de uno en uno, ¿qué pasa con el área del círculo? ¿Qué pasa con la longitud de la circunferencia?*

La situación anterior la representamos mediante una animación realizada en GeoGebra en la que la longitud del radio de un círculo varía de manera discreta, al mismo tiempo se registran las magnitudes que toman el área y la circunferencia cuando dicho radio varía.

FIGURA 2: Variación del radio de un círculo y las magnitudes de área y circunferencia en las vistas gráfica y hoja de cálculo de GeoGebra. En el anexo se muestran más detalles de la construcción.
FUENTE: Elaboración propia.



	A	B	C
1	r	Área de c =...	Circunferencia...
2	2	12.57	12.57
3	3	28.27	18.85
4	4	50.27	25.13
5	5	78.54	31.42
6	6	113.1	37.7
7	7	153.94	43.98
8	8	201.06	50.27
9	9	254.47	56.55
10	10	314.16	62.83
11	11	380.13	69.12
12	12	452.39	75.4
13	13	530.93	81.68
14	14	615.75	87.96
15	15	706.86	94.25
16	16	804.25	100.53
17	17	907.92	106.81
18	18	1017.88	113.1
19	19	1134.11	119.38
20	20	1256.64	125.66

En la columna A de la figura 2 mostramos los valores del radio r, en la columna B las áreas respectivas y en la columna C sus circunferencias.

En la columna D de la figura 3 mostramos que el cálculo de las diferencias aplicado a los valores que toma la circunferencia durante la animación genera el valor constante 6.28 ≈

2π. En la animación al variar el radio del círculo se puede observar que si la longitud del radio crece, también lo hacen el área y la circunferencia, pero ¿cómo crecen el área y la circunferencia? Para abordar la cuestión anterior utilizamos la vista hoja de cálculo de GeoGebra y calculamos las diferencias entre las cantidades consecutivas, tanto para los valores de la circunferencia como para los del área del círculo.

FIGURA 3: Cálculo de diferencias para los valores de la circunferencia obtenidos a través de la hoja de cálculo del software GeoGebra. Véase la construcción 2 en el anexo.
FUENTE: Elaboración propia.

Hoja de Cálculo

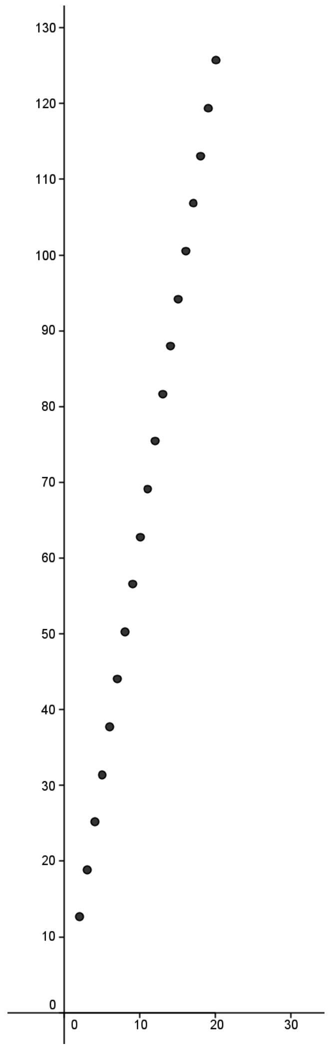
	A	B	C	D
1		Área de c ...	Circunferencia...	Diferencias Circunferencia
2	2	12.57	12.57	6.28
3	3	28.27	18.85	6.28
4	4	50.27	25.13	6.28
5	5	78.54	31.42	6.28
6	6	113.1	37.7	6.28
7	7	153.94	43.98	6.28
8	8	201.06	50.27	6.28
9	9	254.47	56.55	6.28
10	10	314.16	62.83	6.28
11	11	380.13	69.12	6.28
12	12	452.39	75.4	6.28
13	13	530.93	81.68	6.28
14	14	615.75	87.96	6.28
15	15	706.86	94.25	6.28
16	16	804.25	100.53	6.28
17	17	907.92	106.81	6.28
18	18	1017.88	113.1	6.28
19	19	1134.11	119.38	6.28
20	20	1256.64	125.66	

$$C_3 - C_2 = 18.85 - 12.57 = 6.28$$
$$C_4 - C_3 = 25.13 - 18.85 = 6.28$$
$$C_5 - C_4 = 31.42 - 25.13 = 6.28$$
$$C_6 - C_5 = 37.7 - 31.42 = 6.28$$
$$C_7 - C_6 = 43.98 - 37.7 = 6.28$$
$$C_8 - C_7 = 50.27 - 43.98 = 6.28$$
$$C_9 - C_8 = 56.55 - 50.27 = 6.28$$
$$C_{10} - C_9 = 62.83 - 56.55 = 6.28$$
$$C_{11} - C_{10} = 69.12 - 62.83 = 6.28$$
$$C_{12} - C_{11} = 75.4 - 69.12 = 6.28$$
$$C_{13} - C_{12} = 81.68 - 75.4 = 6.28$$
$$C_{14} - C_{13} = 87.96 - 81.68 = 6.28$$
$$C_{15} - C_{14} = 94.25 - 87.96 = 6.28$$
$$C_{16} - C_{15} = 100.53 - 94.25 = 6.28$$
$$C_{17} - C_{16} = 106.81 - 100.53 = 6.28$$
$$C_{18} - C_{17} = 113.1 - 106.81 = 6.28$$
$$C_{19} - C_{18} = 119.38 - 113.1 = 6.28$$
$$C_{20} - C_{19} = 125.66 - 119.38 = 6.28$$

El valor constante de las diferencias de los valores de la circunferencia indica que la circunferencia cambia de manera lineal cuando la longitud del radio aumenta; si graficamos la relación radio-circunferencia, obtendremos la gráfica de una función lineal (ver figura 4). Como a los datos se les calculó diferencias una vez, decimos que obtuvimos una variación de primer orden y en este caso el resultado es un valor constante.

FIGURA 4: Gráfica de la variación de la longitud de la circunferencia en función del radio.

FUENTE: Elaboración propia.



Si procedemos de manera similar para el caso de la relación radio-área, al calcular las segundas diferencias —es decir, las diferencias de las diferencias contenidas en la columna B de la figura 3— obtendremos nuevamente el valor constante 6.28 ≈ 2π. En este caso tendríamos una variación de segundo orden (figura 5).

FIGURA 5: Cálculo de primeras (columna E) y segundas diferencias (columna F) para los valores del área del círculo realizados en la hoja de cálculo del software GeoGebra.

FUENTE: Elaboración propia.

E	F
Diferencias de área	Seg. Diferencias de área
15.71	6.28
21.99	6.28
28.27	6.28
34.56	6.28
40.84	6.28
47.12	6.28
53.41	6.28
59.69	6.28
65.97	6.28
72.26	6.28
78.54	6.28
84.82	6.28
91.11	6.28
97.39	6.28
103.67	6.28
109.96	6.28
116.24	

Diferencias del área

$$B_3 - B_2 = 28.27 - 12.57 = 15.71$$
$$B_4 - B_3 = 50.27 - 28.27 = 21.99$$
$$B_5 - B_4 = 78.54 - 50.27 = 28.27$$
$$B_6 - B_5 = 113.1 - 78.54 = 34.56$$
$$B_7 - B_6 = 153.94 - 113.1 = 40.84$$
$$B_8 - B_7 = 201.06 - 153.94 = 47.12$$
$$B_9 - B_8 = 254.47 - 201.06 = 53.41$$
$$B_{10} - B_9 = 314.16 - 254.47 = 59.69$$
$$B_{11} - B_{10} = 380.13 - 314.16 = 65.97$$
$$B_{12} - B_{11} = 452.39 - 380.13 = 72.26$$
$$B_{13} - B_{12} = 530.93 - 452.39 = 78.54$$
$$B_{14} - B_{13} = 615.75 - 530.93 = 84.82$$
$$B_{15} - B_{14} = 706.86 - 615.75 = 91.11$$
$$B_{16} - B_{15} = 804.25 - 706.86 = 97.39$$
$$B_{17} - B_{16} = 907.92 - 804.25 = 103.67$$
$$B_{18} - B_{17} = 1017.8 - 907.92 = 109.96$$
$$B_{19} - B_{18} = 1134.11 - 1017.88 = 116.24$$
$$B_{20} - B_{19} = 1256.64 - 1134.11 = 122.53$$

Segundas diferencias del área

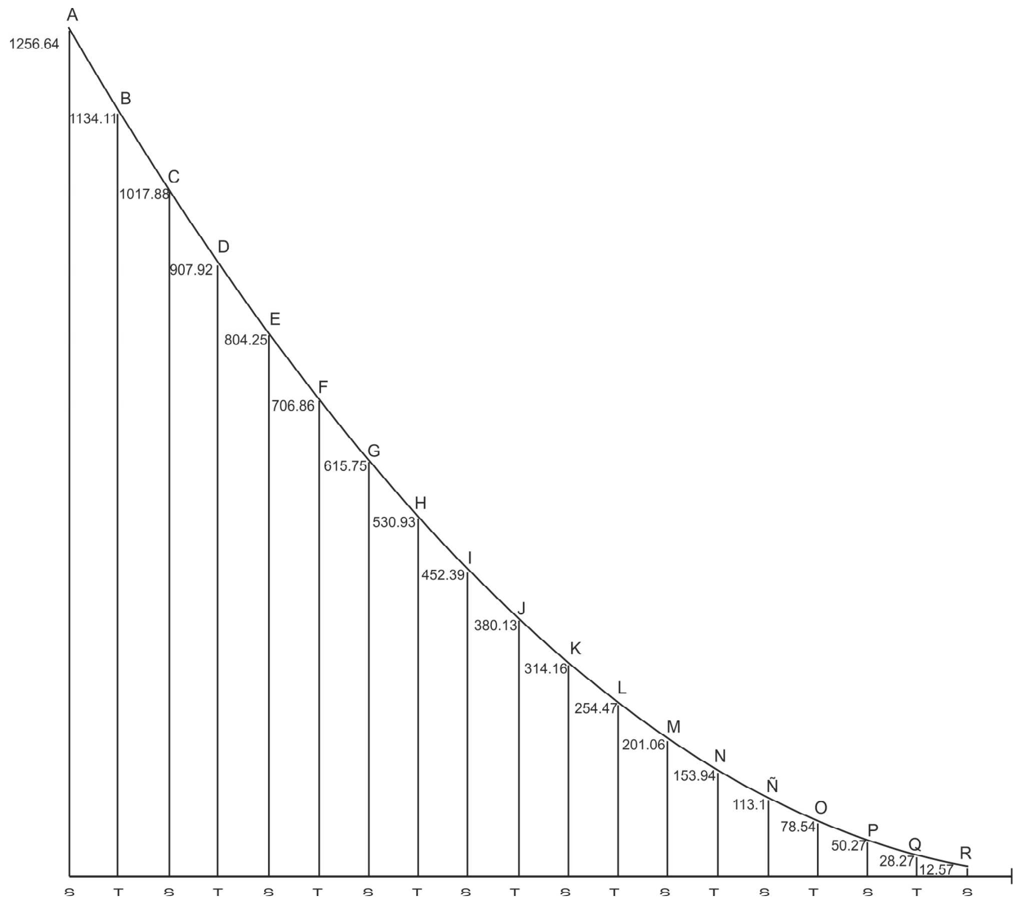
$$E_3 - E_2 = 21.99 - 15.71 = 6.28$$
$$E_4 - E_3 = 28.27 - 21.99 = 6.28$$
$$E_5 - E_4 = 34.56 - 28.27 = 6.28$$
$$E_6 - E_5 = 40.84 - 34.56 = 6.28$$
$$E_7 - E_6 = 47.12 - 40.84 = 6.28$$
$$E_8 - E_7 = 53.41 - 47.12 = 6.28$$
$$E_9 - E_8 = 59.69 - 53.41 = 6.28$$
$$E_{10} - E_9 = 65.97 - 59.69 = 6.28$$
$$E_{11} - E_{10} = 72.26 - 65.97 = 6.28$$
$$E_{12} - E_{11} = 78.54 - 72.26 = 6.28$$
$$E_{13} - E_{12} = 84.82 - 78.54 = 6.28$$
$$E_{14} - E_{13} = 91.11 - 84.82 = 6.28$$
$$E_{15} - E_{14} = 97.39 - 91.11 = 6.28$$
$$E_{16} - E_{15} = 103.67 - 97.39 = 6.28$$
$$E_{17} - E_{16} = 109.96 - 103.67 = 6.28$$
$$E_{18} - E_{17} = 116.24 - 109.96 = 6.28$$

El hecho de que los valores constantes obtenidos durante el cálculo de las primeras diferencias, para el caso de la longitud de la circunferencia y de las segundas diferencias del área, son aproximadamente igual a 2π, se encuentra ligado al concepto de derivada, ya que la idea de diferencia es la base de la estructura de dicho concepto matemático: Se sabe que la derivada de una función $C = C(r)$ con respecto a r es $C'(r) = \lim_{h \to 0} \frac{C(r+h) - C(r)}{h}$, siempre que este límite exista; si omitimos deliberadamente aplicar el límite cuando h tiende a cero, se consigue una aproximación a la derivada. Para el caso de los valores de la circunferencia que analizamos en este trabajo $h = 1$ y la expresión anterior $\frac{C(r+1) - C(r)}{1}$ es equivalente a las diferencias $C_{r+1} - C_r$ realizadas en la hoja de cálculo. Por otra parte para el área se tendría $B_{r+1} - B_r$, en ambos casos para $r = 2, 3, \dots 19$; estos son los cálculos que hicimos en la hoja de cálculo mostrados en las figuras 3 y 5. Un razonamiento semejante se utiliza para las segundas diferencias, al calcular éstas el resultado que se obtiene es 6.28 ≈ 2π. Por otra parte se sabe que el área de un círculo es $A(r) = \pi r^2$ y al derivarla se tiene que $A'(r) = 2\pi r$, al derivarla otra vez se obtiene que $A''(r) = 2\pi \approx 6.28$. Si se graficaran ambas funciones se obtendría una parábola y una recta, respectivamente.

4. Vínculo entre el *methodus differentialis* y la propuesta

Como se ha discutido, en esta propuesta nosotros nos hemos basado en el *methodus differentialis* para estudiar cómo cambian las magnitudes del círculo, por esta razón consideramos solamente la primera parte del método en el que se calculan cocientes de diferencias. A continuación ilustramos la aplicación de esa parte del método a los valores de las áreas que hemos trabajado en GeoGebra (valores contenidos en la figura 5).

FIGURA 6: Representación de las variaciones del área del círculo semejante a la planteada en el *methodus differentialis* (figura 1).
FUENTE: Elaboración propia.



En este caso tendríamos que:

$$b = \frac{AS - BT}{ST} = \frac{1256.64 - 1134.11}{1} = 122.53$$

$$2b = \frac{BT - CS}{TS} = \frac{1134.11 - 1017.88}{1} = 116.23$$

$$3b = \frac{CS - DT}{ST} = \frac{1017.88 - 907.92}{1} = 109.96$$

$$4b = \frac{DT - ES}{TS} = \frac{907.92 - 804.25}{1} = 103.67, etc.$$

Consideraciones finales

En este manuscrito hemos presentado una propuesta didáctica para analizar relaciones entre las magnitudes de un círculo. Dicha propuesta está inspirada en elementos históricos de la génesis del cálculo y aprovecha las funcionalidades del software GeoGebra para su implementación. Esta combinación de elementos históricos de la matemática con el uso de herramientas tecnológicas no es novedosa; existen propuestas como la de Kidron (2004) en la que se utiliza un software con capacidades gráficas y algebraicas para enseñar los tópicos de aproximación e interpolación de acuerdo a su desarrollo histórico. Creemos que este tipo de propuestas que combinan la historia y el uso de tecnología deberían seguirse desarrollando ya que, por un lado, el uso de la historia en la enseñanza de la geometría puede tener un valor motivacional para los estudiantes (Gulikers y Blom, 2001); por otro lado el uso de la tecnología puede agregar más dinamismo a las clases de los profesores de matemáticas. Es necesario que propuestas como la que presentamos en este escrito sean probadas en salones de clases de matemáticas para de esta manera conocer más acerca de los alcances y limitaciones de este tipo de aproximaciones didácticas.

Referencias

FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. (Eds.). (2002). *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Países Bajos: Kluwer. doi: 10.1007/0-306-47220-1

GULIKERS, I; BLOM, K. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*. N. 2, v. 47, 223-258. doi: 10.1023/A:1014539212782

JANKVIST, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*. N. 3, v. 71, 235-261. doi: 10.1007/s10649-008-9174-9

KIDRON, I. (2004). Polynomial approximation of functions: historical perspective and new tools. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. N. 3, v. 8, 299-331. doi: 10.1023/B:IJCO.0000021793.71677.cd

NEWTON, I. (1686). *Philosophia Naturalis Principia Mathematica*. Londini: Jussu Soc, Regiæ ac Typis J. Strater. Recuperado de http://www.gutenberg.org/files/28233/28233-pdf.pdf

NEWTON, I. (1711). *Analysis per quantitum series, fluxiones, ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis.* Londini: Ex officina Pærsoniana. Recuperado de http://www.wilbourhall.org/pdfs/newton/Analysis1711WH.pdf

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA (2006). *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006*. Secretaría de Educación Pública, México. Recuperado de http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/programa/programa.pdf

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA (2000). *Geometría Dinámica. EMAT. Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología*. Secretaría de Educación Pública, México. Recuperado de http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/pdf/recdidacticos/geometriadinamica.pdf

ANEXO

A continuación se presentan algunas de las construcciones utilizadas en el escrito; todas las imágenes son construcciones propias realizadas con el software GeoGebra.

Construcción 1: Animación de la variación de las magnitudes del círculo, figura 2

El procedimiento para esta construcción en GeoGebra es el siguiente:

1. Se abre una nueva ventana en la que se ocultan los ejes.
2. Agregar un deslizador con nombre *r* en un intervalo mínimo de uno y máximo de veinte con incrementos de una unidad, imagen 1.

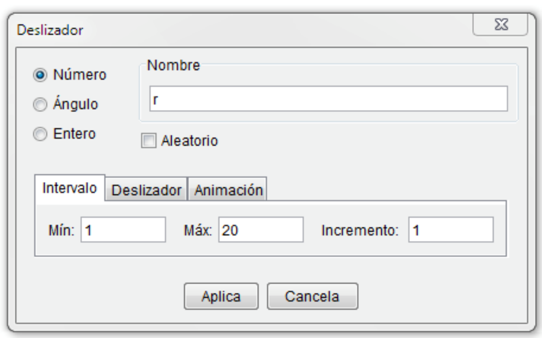


Imagen 1

3. Trazar un segmento $\overline{AB}$ y establecer coordenadas $A = (0, 0)$ y $B = (r, 0)$ y luego se traza un círculo con centro en A y radio en B, imágenes 2 y 3.

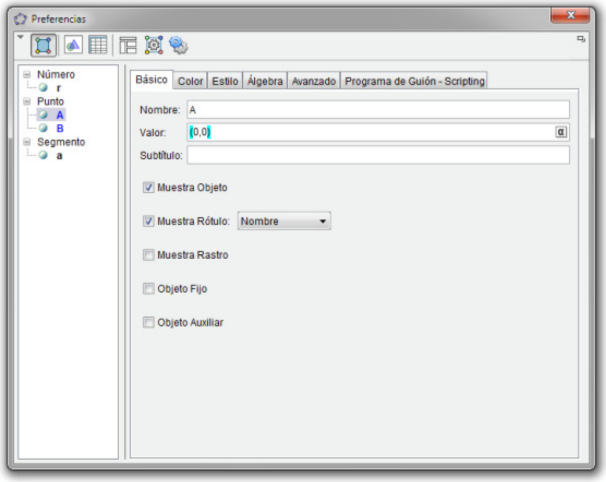


Imagen 2

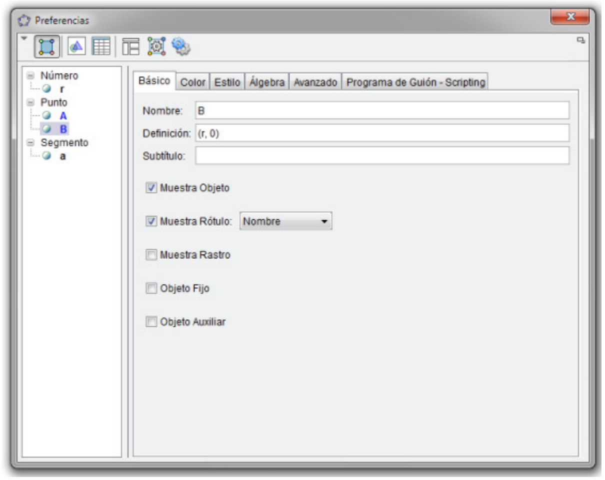


Imagen 3

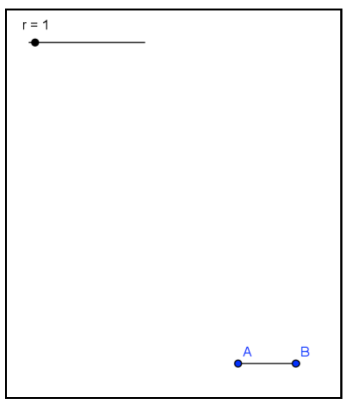


Imagen 4

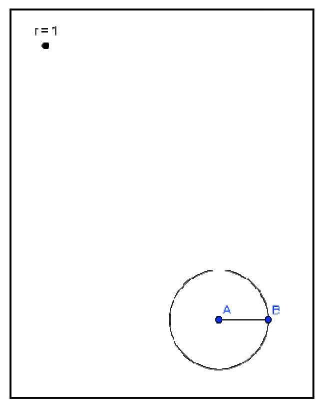


Imagen 5

Cuando se arrastra el punto r del deslizador se observará cómo cambia la circunferencia y área del círculo. Eligiendo la función *Distancia o Longitud,* al aplicarse al círculo se determina esta magnitud; de la misma manera se elige la función *Área* y se calcula. Cada una de esas magnitudes al ser registradas en la hoja de cálculo generan la figura 2.

Construcción 2. Cálculo de diferencias para los valores de la circunferencia con la hoja de cálculo del software GeoGebra

1. Las funciones *Distancia o Longitud* o *Área* de GeoGebra realizan estas mediciones para la figura que se seleccione, imagen 6.

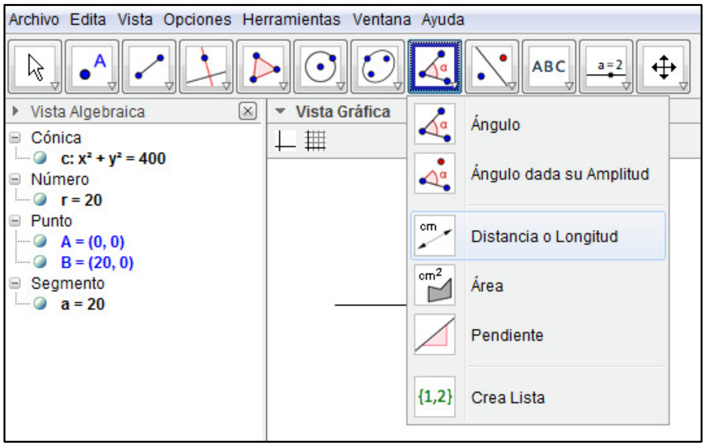


Imagen 6

2. Si se elige la función *Área* y luego se selecciona el círculo dibujado en la construcción anterior, aparecerá a un costado del círculo una etiqueta que indica la longitud de la circunferencia, imagen 7.

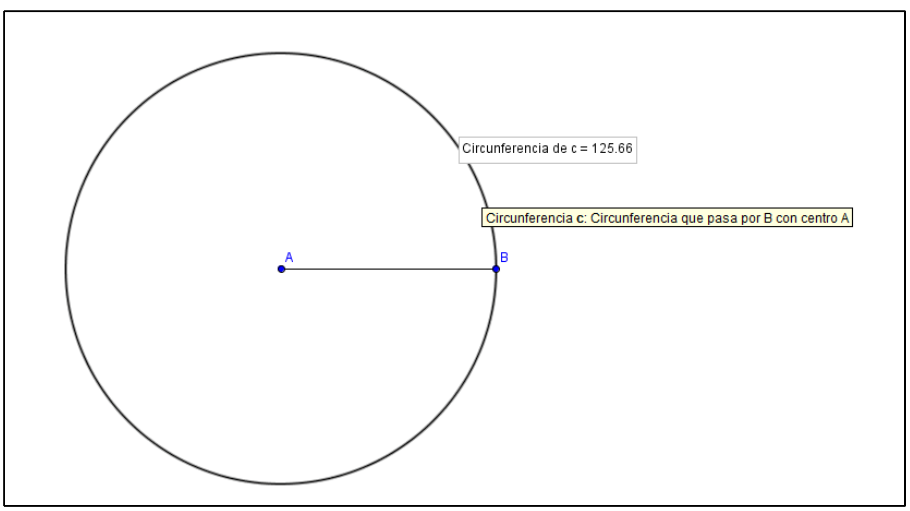


Imagen 7

3. Al variar el deslizador *r* de la construcción, variará el tamaño de la circunferencia y por tanto también cambiarán las medidas de la longitud de la circunferencia. Al dar clic con el botón derecho sobre la etiqueta con esta medida, en la ventana emergente se selecciona

la opción *Registro en Hoja de Cálculo* para que se envíen los datos de estas mediciones a una columna en la *Vista de hoja de Cálculo*, imagen 8.

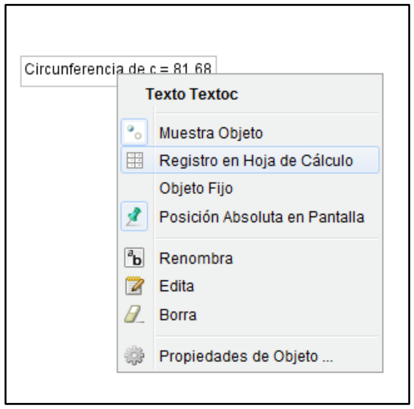


Imagen 8

4. Con lo anterior se mostrará una nueva ventana emergente en la que se configurará cómo se mostrarán los datos en la columna de la hoja de cálculo; es este caso elegimos que se muestren en las celdas del 1 al 20 y se elige la opción *cerrar*, imagen 9.

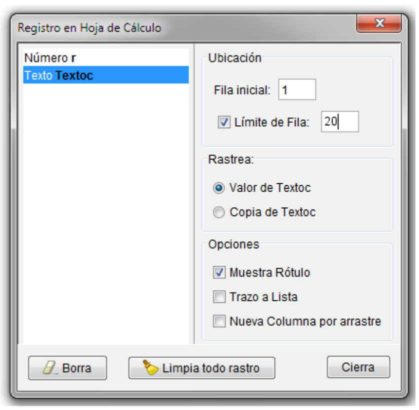
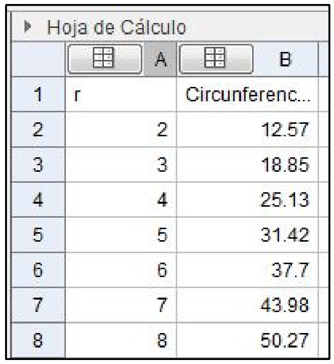


Imagen 9

5. Con lo anterior, al mover el deslizador *r* se almacenarán en una columna los valores de la longitud de la circunferencia que se generen, imagen 10.

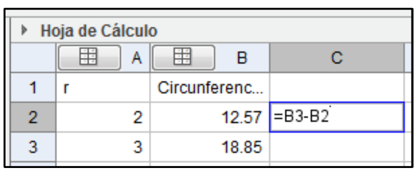


Hoja de Cálculo

	A	B
1	r	Circunferenc...
2	2	12.57
3	3	18.85
4	4	25.13
5	5	31.42
6	6	37.7
7	7	43.98
8	8	50.27

Imagen 10

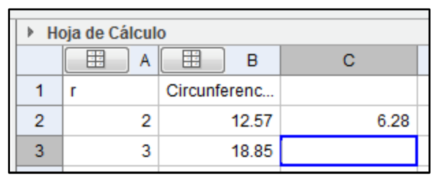
6. Finalmente para calcular las diferencias de la longitud de la circunferencia, que en este caso se almacenaron en la columna B, en la vista *Hoja de Cálculo* colocamos el cursor sobre la segunda celda de la columna C (o de cualquier otra columna que esté libre) y escribimos la expresión: $= B3 - B2$ y presionamos *Enter*. Con esto se mostrará en la celda C2 el resultado de restar $18.85 - 12.57 = 6.28$, imágenes 11 y 12.



Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	r	Circunferenc...	
2	2	12.57	=B3-B2
3	3	18.85	

Imagen 11



Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	r	Circunferenc...	
2	2	12.57	6.28
3	3	18.85	

Imagen 12

7. Si se coloca el cursor sobre la celda C2 y se selecciona el cuadrado en la esquina inferior, se da clic con el botón izquierdo (sin liberar la presión) y se arrastra hasta la fila C19, se repetirá la operación de diferencias con las demás celdas y aparecerán los valores, imágenes 13 y 14. Con un procedimiento semejante se calcularon las diferencias y segundas diferencias del área.

Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	r	Circunferenc...	
2	2	12.57	6.28
3	3	18.85	

Imagen 13

Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	r	Circunferenc...	
2	2	12.57	6.28
3	3	18.85	6.28
4	4	25.13	6.28
5	5	31.42	6.28
6	6	37.7	6.28
7	7	43.98	6.28
8	8	50.27	6.28
9	9	56.55	6.28
10	10	62.83	6.28
11	11	69.12	6.28
12	12	75.4	6.28
13	13	81.68	6.28
14	14	87.96	6.28
15	15	94.25	6.28
16	16	100.53	6.28
17	17	106.81	6.28
18	18	113.1	6.28
19	19	119.38	6.28
20	20	125.66	

Imagen 14