GeoGebra e a família dos números metálicos

GeoGebra and family of metal numbers

SÔNIA CRISTINA DA CRUZ MENDES [1]

ESTELA KAUFMAN FAINGUELERNT [2]

CHANG KUO RODRIGUES[3]

Resumo

Este trabalho é parte integrante de uma investigação voltada para o processo de ensino e de aprendizagem em Geometria e teve como ponto de partida iniciar a familiarização dos estudantes com os números irracionais. À luz da Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999), buscamos familiarizar os estudantes ao conhecimento dos números irracionais, utilizando o número de ouro. Diante disso, as investigações levaram-nos à família dos números metálicos (ouro, prata, bronze etc), que nos permitiram criar uma atividade com o objetivo de estudar e localizar as raízes irracionais de equações quadráticas, além de observar as relações estabelecidas entre os gráficos das funções quadráticas atrelados e seus coeficientes, utilizando o software GeoGebra. Este artigo conta a trajetória percorrida para chegarmos à referida atividade e ao seu desenvolvimento.
Palavras-chave*: família dos números metálicos; equações quadráticas; funções quadráticas.*

Abstract

This paper is part of a research-oriented teaching and learning in geometry and had as a starting point to start to familiarize students to the irrational numbers. In light of the Anthropological Theory of Didactics of Chevallard (1999), we seek to familiarize students to the knowledge of irrational numbers, used the number of gold. Thus, the investigations led us to the family of numbers made of metal (gold, silver, bronze etc), which allowed us to create an activity with the aim to study and find the irrational roots of quadratic equations, and to observe the established relations between graphs of quadratic functions and their coefficients linked using the software GeoGebra. This article tells the trajectory to get to that activity and its development.
Keywords: family of metal numbers, quadratic equations, quadratic functions.

Introdução

Iniciamos nossa pesquisa buscando encontrar meios que contribuíssem para o ensino e a aprendizagem dos números irracionais. Para tal, utilizamos uma abordagem geométrica de forma que a descoberta dos números irracionais seja parte da história da geometria. Concordamos, assim, com Fainguelernt (1999), quando diz que o estudo da

[1] Universidade Severino Sombra – sccmendesprof@gmail.com
[2] Universidade Severino Sombra – estelakf@globo.com
[3] Universidade Severino Sombra – chang@powerline.com.br

geometria:

> [...] oferece um vasto campo de ideias e métodos de muito valor, quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização (FAINGUELERNT, 1999, p.22)

Partindo desse princípio, percebemos que as construções geométricas proporcionaram-nos um caráter investigativo e exploratório. Ao utilizar as figuras geométricas, encontramos várias relações acerca dos valores de números irracionais, o que possibilitou encontrar significado em um contexto mais real para os números, isto é, de forma concreta, a partir da visualização dos estudantes, para, posteriormente, chegarmos à abstração necessária ao desenvolvimento do raciocínio lógico matemático. Essa relação entre os conhecimentos geométricos e a descoberta dos números irracionais pode contribuir para o processo de apropriação da formação do conceito.

Na geometria, encontramos um campo fértil para investigações, o qual pode ser visto como uma ciência e um meio de análise de estruturas lógicas, favorecendo o aprendizado de como "fazer" e como "pensar".

Neste artigo, apresentamos o caminho pelo qual chegamos a uma atividade do trabalho de pesquisa de nossa dissertação. Essa atividade permitiu-nos relacionar as funções quadráticas e seus respectivos gráficos a números irracionais, conforme apresentaremos mais adiante.

Encontramos suporte teórico para nossa investigação na Teoria Antropológica do Didático, de Chevallard (1999). Para melhor entendimento do leitor, apresentaremos algumas reflexões sobre essa teoria, tecendo uma relação com o presente trabalho.

Um aspecto que consideramos relevante para iniciar o caminho que trilhamos em nossa pesquisa foi identificar como vem a ser a matemática escolar, segundo Chevallard, Bosch e Gáscon (2001). Os autores citam que é uma consequência das necessidades matemáticas da convivência dos indivíduos em sociedade. Talvez seja por isso que é preocupante haver uma inversão nos valores relacionados à única razão de a Matemática ser ensinada na escola, reduzindo-se o valor social da aprendizagem a um mero aprendizado escolar, tal como Chevallard, Bosch e Gáscon (2001) ressaltam:

> Esse tipo de reducionismo pode fazer com que não se "leve a sério" a matemática escolar, considerando-a como mero "artefato escolar". Aparece então um problema didático que pode ser formulado da

> seguinte maneira: “o que fazer para que os alunos se coloquem como matemáticos diante de questões matemáticas que lhe são propostas na escola e para que assumam, eles mesmos, a responsabilidade por suas respostas?” (CHEVALLARD; BOSCH; GÁSCON, 2001, p.46)

Dessa forma, procuramos meios de apresentar aos alunos questões sobre números irracionais, as quais partissem de um contexto social, utilizando as funções quadráticas que podem surgir de problemas contextualizados, tornando a aprendizagem matemática um meio de atender as necessidades da sociedade, isto é, ressaltando as conexões que existem entre a Matemática e as diferentes áreas do conhecimento.

O fazer matemático requer que haja um objeto matemático, em nosso caso, os números irracionais, para, então, construirmos modelos matemáticos e sugerirmos explorá-los.

Saber utilizar as ferramentas matemáticas já conhecidas para resolver problemas vivenciados no cotidiano mostra que “[...] o estudo de um sistema matemático ou extramatemático gera questões que podem ser abordadas mediante instrumentos matemáticos já existentes, mas que são desconhecidos para aquele que desenvolve a atividade” (CHEVALLARD; BOSCH; GÁSCON, 2001, p.55).

Nesse sentido, a Matemática torna-se um constante trabalho de criação, utilizando ferramentas conhecidas e recursos já utilizados para criar novos modelos; em resumo, aquele que aprende a matemática clássica transforma-a e cria seus próprios mecanismos, ao utilizá-la.

O ensino pode ser um meio de estudo motivador, e cabe ao professor planejá-lo estrategicamente, selecionando atividades desafiadoras e investigativas condizentes com cada nível de escolaridade. “Nesse paradigma, a aprendizagem é considerada como um processo psicocognitivo, fortemente influenciado por fatores de motivação e de atitude do aluno-aprendiz” (CHEVALLARD; BOSCH; GÁSCON, 2001, p.73), daí o enfoque por uma busca motivacional para os números irracionais, a qual nos levou à razão áurea e, posteriormente, à descoberta da família dos números metálicos.

É fundamental, para a aprendizagem, a elaboração de um bom material com atividades que motivem o aprendiz, de modo que o professor perceba a “necessidade de criar novos dispositivos didáticos capazes de articular o trânsito entre os diferentes momentos desse processo” (CHEVALLARD; BOSCH; GÁSCON, 2001, p.285).

Uma das dificuldades encontradas no desenvolvimento do processo é que nem sempre há intenção e/ou vontade do estudante em aprender. Sobre essa questão, que depende da vontade própria do estudante, Chevallard, Bosch e Gáscon (2001) chamam de “irresponsabilidade matemática dos alunos”.

Em resumo, a abordagem antropológica da Teoria da Transposição Didática apresenta o homem fazendo matemática, em seu cotidiano, constatando que todo fenômeno matemático compõe uma didática da obra matemática a qual, ao longo do tempo, sofre transformações, para se adequar ao contexto atual de ensino, o que caracteriza a transposição.

Nesse contexto, essa teoria organiza a atividade matemática inserida no conjunto de atividades humanas e das instituições sociais, e a análise das atividades incide na Teoria Antropológica do Didático, ou seja, a análise praxeológica do didático, quando há identificação e análise da *tarefa*, *técnica*, *tecnologia* e *teoria*.

Os tipos de *tarefas* (que seriam as atividades) e *técnicas* (maneiras de fazer) fornecerão modelos diferentes para sua realização, pois, quando bem delineadas, podem ser analisadas sob pontos de vista diferentes.

Para que o aprendiz cumpra toda a *tarefa*, é preciso que conheça todo o desenvolvimento de uma *técnica*. Como exemplo, a *técnica* da prova por absurdo, para mostrar que um número é irracional no desenvolvimento de uma determinada *tarefa*.

A Matemática possui *técnicas* que são institucionalizadas, já reconhecidas pela comunidade dos matemáticos, mas, para sua existência, deve ser compreendida, entendida e justificada, ou seja, sob uma condição de existência estritamente relacionada a um discurso descritivo e justificativo; o que Chevallard, Bosch e Gáscon (2001) chamam de *tecnologia*[4]. Essa *tecnologia*, quando justificada, incide na *teoria*.

A organização para desenvolver um determinado tipo de *tarefa* é chamada de organização *praxeológica*, que é um conjunto de *técnicas*, *tecnologias* e *teorias*.

Os objetos matemáticos de estudo são caracterizados como ostensivos, os que possuem uma materialidade, e não-ostensivos, quando exigem maior abstração, como ideias e conceitos. Então, em nosso estudo, poderíamos considerar a representação dos irracionais como ostensivos (ex: $\sqrt{2}$) e a noção de número irracional não-ostensivo (o conceito, propriamente dito, de irracional), que é a nossa maior preocupação.

Para apresentar essa teoria (CHEVALLARD, 1999) de modo prático, construímos o esquema abaixo.

[4].Para não causar uma confusão ao leitor, apresentaremos o termo *tecnologia* em itálico, quando estivermos nos referindo à Teoria Antropológica da Transposição Didática de Chevallard, Bosch e Gáscon (2001), pois utilizamos o *software GeoGebra*, que é um recurso da tecnologia da informação.

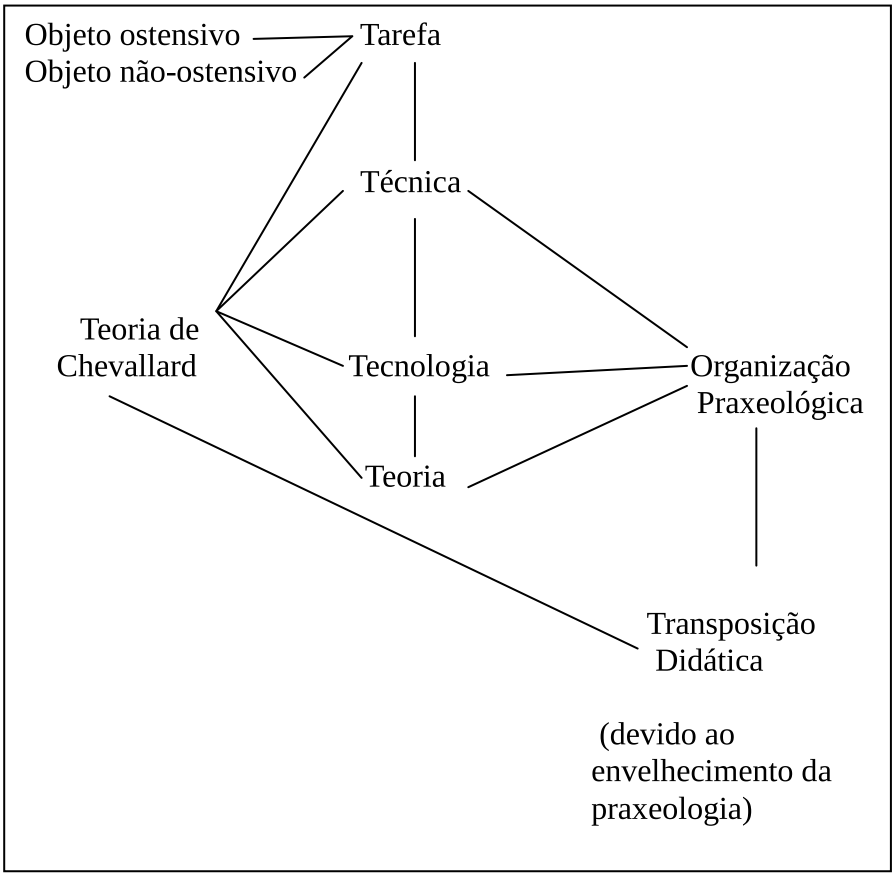

FIGURA 1. Esquema da teoria de Chevallard (2001)
FONTE: dados da pesquisa

Segundo Chevallard (1999), no processo de aprendizagem, deverá ocorrer interação entre velhos e novos conhecimentos, além de um bom material didático elaborado pelo educador.

Assim, para modelagem de nossas atividades, refletimos sobre quais seriam os conhecimentos preexistentes que iriam interagir com o material escolhido? Quais os conhecimentos prévios que estariam relacionados a novos conhecimentos, para uma aprendizagem com significado, favorecendo a construção do conceito dos números irracionais?

Para responder esses questionamentos, construímos um esquema, conforme figura 2, apresentando alguns indicadores que consideramos relevantes a serem abordados para a aprendizagem dos números irracionais.

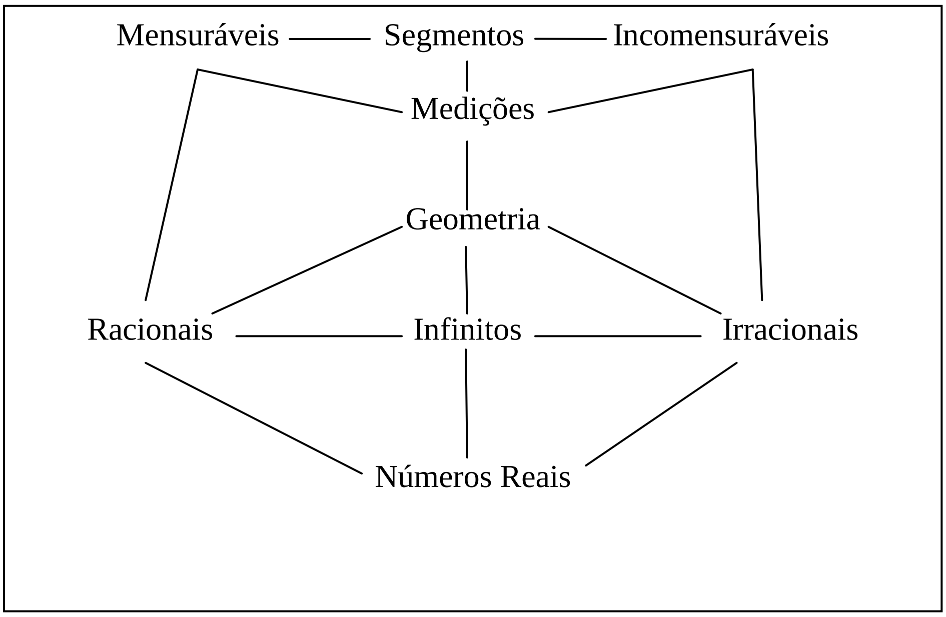

FIGURA 2. Indicadores para aprendizagem dos números irracionais
FONTE: dados da pesquisa

Nesse contexto, a seguir, abordaremos algumas considerações sobre a razão áurea, que foi nosso elemento motivador e de foco geométrico, e permitiu-nos trilhar até encontrarmos a família dos números metálicos.

1. A Razão Áurea

Em nossa busca por um elemento motivador, encontramos na razão áurea um meio de apresentar, demonstrar e motivar o processo de aprendizagem dos números irracionais, devido à sua “beleza”, ao seu “misticismo” e curiosidade, além de permitir inúmeras construções geométricas e relação com outros conteúdos matemáticos, o que nos possibilitou um caráter investigativo.

Mas, referir-se à beleza e à motivação é algo subjetivo, visto que cada indivíduo sente-se atraído ou motivado por coisas diferentes: do que eu gosto não é do que o outro gosta. Chegamos à seguinte problemática: o que é gosto?

Segundo Chauí (2006), foi Kant quem realizou o mais importante tratamento sobre juízo de gosto, discutindo a sua subjetividade. É possível perceber que:

> [...] uma discussão é um processo de afinamento das opiniões cuja finalidade é chegar a um acordo entre as partes. Assim, não se disputa o belo, mas pode-se discuti-lo. Essa discussão é uma reflexão com a finalidade de se chegar a um juízo estético compartilhado por todos (CHAUI, 2006, p. 282)

Notamos que a razão áurea, por um afinamento de opiniões, revela padrões de beleza criados, ou não, pelo homem, de acordo com a sua cultura e seus diferentes grupos sociais.

A razão áurea é encontrada nas proporções de várias obras de arte, na natureza e é considerada a proporção da beleza. A arte, muitas vezes, imita a natureza, a qual, por sua vez, apresenta inúmeras características que o homem, como observador, formaliza e traduz como matemática.

Encontramos na razão áurea um vasto campo de estudo a ser explorado de forma que acreditamos ser motivadora para o ensino e a aprendizagem dos números irracionais, tendo em vista que é reconhecido como um número com características misteriosas e enigmáticas.

O número de ouro é representado pela letra ϕ (*Phi*), cujo valor é 1,618033988749... (um número irracional). A razão áurea inspira estudiosos de todas as disciplinas, principalmente pelo fato de o homem apropriar-se do ϕ *(Phi)* para realizar inúmeras obras e monumentos.

Segundo Livio (2007, p.13), Euclides foi o primeiro a definir com clareza a razão áurea (300 a.C.), chamando-a de “Razão extrema e média”, quando uma linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor, ou seja, dividir o segmento todo em duas partes tais que o segmento total dividido pela maior dê o mesmo resultado que a maior dividida pela menor.

Daí, teremos a seguinte proporção, conforme figura 3:

$$\frac{segmento\ total}{parte\ maior} = \frac{parte\ maior}{parte\ menor}$$

FIGURA 3. Proporção áurea
Fonte: Dados da pesquisa

É evidente que temos uma infinidade de formas diferentes de dividir um segmento AB qualquer, em duas partes desiguais. Porém, somente uma delas parecerá ser a mais “agradável ao espírito”, como traduzindo uma operação harmoniosa para os nossos sentidos.

Para que possamos encontrar, algebricamente, o valor de ϕ *(Phi),* partimos do segmento (figura 4) da mesma maneira como foi efetuada na proporção acima citada.

FIGURA 4. Divisão áurea do segmento de reta
FONTE: Dados da pesquisa

Assim, pelo estudo das proporções, podemos estabelecer

$$\frac{u+v}{u} = \frac{u}{v} \tag{01}$$

Que pode ser escrito como:

$$\frac{u}{u} + \frac{v}{u} = \frac{u}{v} \tag{02}$$

Substituindo:

$$\frac{u}{v} = x \tag{03}$$

Temos:

$$\frac{u}{u} + \frac{v}{u} = \frac{u}{v} \tag{04}$$

$$1 + \frac{1}{x} = x \tag{05}$$

$$x + 1 = x^2 \tag{06}$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{07}$$

Chegamos a essa equação quadrática, a qual apresenta duas raízes reais, que são números irracionais:

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong 0,618 \tag{08}$$

e

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618 = \phi \tag{09}$$

2. A Família dos números metálicos

No decorrer de nossas investigações sobre a razão áurea, encontramos alguns elementos que devem ser divulgados, a fim de contribuir para maior aprofundamento em pesquisas futuras, pois sua diversidade proporcionará possibilidades de atividades para distintas áreas, tal como o caso da família dos números metálicos.

Apresentada de forma sucinta, a família dos números metálicos, cujos membros "são todos os números irracionais quadráticos positivos" (SPINADEL, 2003), é a solução positiva das equações quadráticas, do tipo:

$$x^2 - nx - 1 = 0 \tag{10}$$

e

$$x^2 - x - n = 0 \tag{11}$$

sendo *n* um número natural.

São chamados de números metálicos, pois apresentam uma generalização do número de ouro, quando $n = 1$, conforme citado anteriormente (item 07).

As raízes dessas equações quadráticas são números irracionais, assim como acontece com o número de ouro, e podem ser expressas como frações contínuas, sequências secundárias de Fibonacci, equações quadráticas, construções geométricas, e apresentam determinada lei de formação.

Tentamos, pela montagem do quadro que apresentamos abaixo (quadro 1), organizar algumas das características dos principais membros da família dos números metálicos encontrados.

Essa organização permite verificar a vasta dimensão das possibilidades de conhecimentos matemáticos que podem ser abordados com a família dos números metálicos, apesar de existirem outros.

	Sequência numérica	Lei de formação	Equação quadrática	Raízes das equações quadráticas
Número de Ouro	1, 1, 2, 3, 5 8, 13, 21...	$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$	$x^2 - x - 1 = 0$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Número de Prata	1, 1, 3,7,17, 41, 99,239...	$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$	$x^2 - 2x - 1 = 0$	$1+\sqrt{2}$
Número de Bronze	1, 1, 4, 13, 43,142,469...	$a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1}$	$x^2 - 3x - 1 = 0$	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$
Número de Cobre[5]	1,1,3,5,11, 21,43,85...	$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$	$x^2 - x - 2 = 0$	O número inteiro 2
Número de Níquel	1, 1, 4, 7, 19, 40,97...	$a_{n+1} = a_n + 3a_{n-1}$	$x^2 - x - 3 = 0$	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

QUADRO 1. Família dos números metálicos
FONTE: Dados da pesquisa

[5] Apesar de a resolução da equação do número de cobre gerar um número inteiro, ele é considerado pertencente à família dos números metálicos, o que cabe um aprofundamento sobre o assunto em outro contexto, já que estamos, nesse momento, apresentando os estudos encontrados.

3 Desenvolvimento da atividade

A atividade proposta foi desenvolvida com o *software GeoGebra*[6] e permitiu executar e realizar atividades matemáticas relacionadas à geometria, à álgebra e ao cálculo, além de contribuir com o professor na montagem de seus trabalhos[7] e avaliações que serão aplicadas em suas turmas, viabilizando a construção de desenhos e figuras geométricas.

Esse *software* foi desenvolvido na Áustria por Markus Horerwanter, da Universidade de Salzburg, e possibilita abordar vários conteúdos da Educação Básica, proporcionando aulas dinâmicas e produtivas, como um importante recurso metodológico que proporciona uma melhor visualização, percepção e investigação de propriedades, validando as conclusões dos alunos em suas próprias investigações e descobertas, para desenvolverem, posteriormente, as ideias necessárias para a formação de conceitos.

Atividade – Raízes das funções quadráticas da Família dos Números Metálicos.

Objetivos

- Analisar os gráficos das funções quadráticas;
- Perceber que não há um ponto que expresse as raízes irracionais das funções;
- Observar e identificar a qual intervalo pertence um número irracional.

Enunciado da atividade

Plote as funções do número de ouro, de prata e bronze e responda:

a) Qual o coeficiente que está sendo alterado?
b) O que acontece com os gráficos?
c) Em qual ponto todos os gráficos cortam o eixo y?
d) Esse ponto tem alguma relação com algum dos coeficientes?
e) Quais são as raízes dessas funções?
f) Utilizando o *software GeoGebra*, conseguimos encontrar um número que expresse essas raízes? Por quê?

---

[6] É um software de acesso livre e gratuito, e pode ser utilizado por qualquer pessoa pelo endereço eletrônico: http:www.geogebra.org/cms, o qual apresenta versões para o sistema operacional do Windows e Linux.

[7] O professor poderá fazer a figura desejada com o software e, para copiá-la no trabalho que esté montando (teste, prova e outros), utilizar a tecla *print screen* do teclado do computador e *ctrl v* no documento do Word, ou, no próprio software, abrir a caixa **arquivo**, **exportar**, **copiar para área de transferência** e *ctrl v* no documento do Word.

Nessa atividade, a *tarefa* proposta consistiu em *plotar* funções quadráticas, utilizando o *software GeoGebra*, cujas raízes são números irracionais, pertencentes ao grupo da família dos números metálicos. Para tal, os alunos escreveram as funções no campo **Entrada**, que se encontra na parte inferior da tela do *software GeoGebra*, de acordo com a figura 5, e apertaram *enter* no teclado do computador; automaticamente, os gráficos são plotados, aparecendo na tela. Pedimos aos alunos que respondessem as questões propostas acima (da letra *a* até *f*). A *técnica* utilizada pelos alunos foi o reconhecimento visual dos gráficos e, para responder especificamente a letra *f* da atividade, alguns realizaram o rolamento da tela pelo *mouse*, alterando a numeração do eixo das abscissas, a fim de procurarem um ponto na reta do eixo das abscissas, que fornecesse um valor numérico exato das raízes irracionais, o que, obviamente, não foi encontrado.

A movimentação do *software* permitiu que os alunos percebessem que o intervalo no qual se encontravam as raízes iria se reduzir infinitamente, mas que não chegariam a um valor numérico exato. Isso forneceu um aspecto positivo de instabilidade e inexatidão relacionada aos números irracionais.

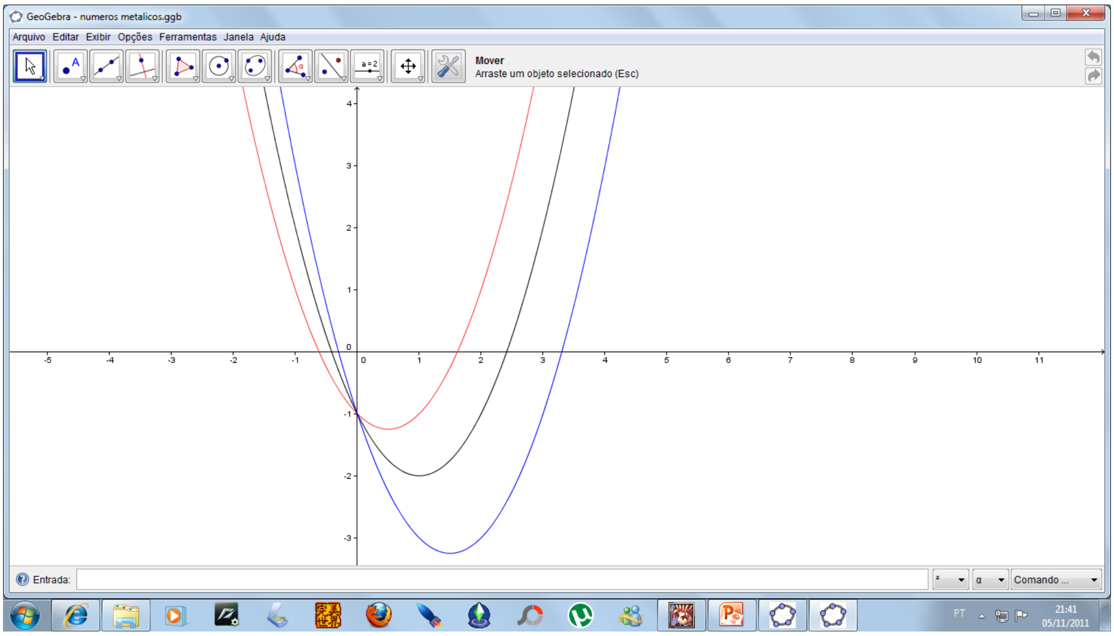

FIGURA 5. Tela do GeoGebra, com gráfico das funções
FONTE: Dados da pesquisa

Considerações finais

Acreditamos que uma das dificuldades na compreensão do conceito dos irracionais deve estar relacionada ao caráter meramente utilitário com que é transmitido o conhecimento matemático. Há uma não aceitação na aprendizagem desse conceito, visto que é exigida a habilidade de abstraí-lo. Para os estudantes, o conceito de números irracionais parece fugir da realidade do mundo e da necessidade em suas vidas. Assim, por que aprender algo que não será utilizado e que parece ser tão desnecessário?

Nesse contexto, a atuação do professor é essencial e a natureza das atividades é uma questão fundamental, pois podem motivar o aluno à investigação e exploração de novas descobertas, dando sentido para maior aceitação e formação de conceitos que se deseja ensinar.

Conjecturamos que a inserção desse estudo, relacionando a família dos números metálicos ao tópico das funções quadráticas, além da utilização do *software GeoGebra* para auxiliar no ensino dos números irracionais, potencializam a necessidade de aprender com prazer as novas descobertas, contribuindo, assim, para o desenvolvimento da habilidade de abstrair e perceber o conceito de infinito. Constatamos, nessa pesquisa, que a precisão da atividade apresentada não seria possível sem a inserção da tecnologia da informática.

Referências

CHEVALLARD, Y. (1999). *L'analyse des pratiques enseignantes en thoorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique dês Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, v.12.1, p. 221-265.

CHEVALLARD, Y. BOSCH, M. GASCÓN, J. (2001). *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.* Porto Alegre: Artmed Editora.

CHAUÍ, Marilena. *Convite à filosofia.* São Paulo: Ática, 2006.

FAINGUELERNT, E. K. (1999). *Educação Matemática: representação e construção em geometria.* Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

LIVIO, M. (2007). *Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente*; tradução Marco Shinobu Matsumura. Rio de Janeiro: Record.

SPINADEL, Vera W (2003). de. *La Familia de Numeros metalicos*. Artigo Universidade de Buenos Aires.