GeoGebra: um trabalho concatenado entre a álgebra e a geometria no ensino superior

GeoGebra: a concatenated work between algebra and geometry in higher education

KARLY BARBOSA ALVARENGA[1]

MURILO DE MEDEIROS SAMPAIO [2]

Resumo

Esse trabalho é um relato de experiência sobre atividades implementadas e fundamentadas na Engenharia Didática. Apresenta uma ação pedagógica investigativa, na área de ensino de matemática, que se constituiu em atividade formadora de professores. Tal ação se fundamentou em conteúdos matemáticos de funções e de geometria e álgebra trabalhados interconectados por meio do software *GeoGebra. A experiência aconteceu na Universidade Federal de Sergipe com estudantes de Licenciatura em Matemática. Segundo os estudantes, o estudo por esse meio os levou a mobilizar e inter-relacionar conteúdos que antes não estavam claros e tão pouco haviam percebidos, como, por exemplo, as relações entre área e perímetro de um retângulo e relações que não caracterizam uma função.*

Palavras-chave*: álgebra; geometria; GeoGebra.*

Abstract

This work is an experience report of activities implemented and documented in the Didactic Engineering. It presents an investigative pedagogical action in the area of mathematics teaching, which became active trainer of teachers. This action was based on mathematical content like function and of geometry and algebra worked interconnected through the software *GeoGebra. The experience happened at the Federal University of Sergipe with undergraduate students in mathematics. According to the students, studying in this way led them to mobilize and interrelate material that previously were not clear and neither had noticed, for example, the relationships between area and perimeter of a rectangle and relationships that do not constitute a function.*

Keywords*: algebra; geometry; GeoGebra.*

Introdução

O presente artigo, do tipo relato de experiência, apresenta uma ação pedagógica investigativa, na área de ensino de matemática, que se constituiu em atividade formadora de professores, tendo como objetivo contribuir para desenvolver não apenas o “espírito investigador”, mas também a percepção de relações intrínsecas entre

[1] Universidade Federal de Sergipe – karly@ufs.br
[2] Universidade Federal de Sergipe – murilo@ufs.br

geometria e álgebra, especificamente entre área, perímetro de um retângulo e as funções, ou não, que expressam tais relações.

O relacionamento entre a Álgebra e a Geometria tem uma história provavelmente desde III a.C., na Mesopotâmia. As relações entre ambas foram quase sempre de ajuda recíproca, como no caso das demonstrações de caráter geométrico que os algebristas árabes da Idade Média davam aos algoritmos de resolução das equações algébricas, ou aos métodos algébricos resolutivos de problemas geométricos do fim do Renascimento. Mas também houve alguns momentos de ruptura, como na primeira metade do século XIX.

Para Felix Klein, segundo Miorin (1998), a aritmética, álgebra e geometria não deveriam ser completamente fundidas, mas não deveriam ser tão separadas como eram ensinadas nas escolas, pois isso é contra o que é natural. Para ele também a introdução aos conhecimentos de função deveriam ser sob a forma geométrica e expressas pelas representações gráficas das quais, segundo ele, penetram não somente através da literatura moderna das ciências exatas, mas surgem em todas as cogitações da vida real.

Assim, como formadores de professores de matemática para a educação básica, resolvemos apresentar algumas relações estreitas entre essas “partes” da matemática e ainda entre elas e o Cálculo Diferencial e Integral I. Percebemos que na formação inicial dos estudantes de Licenciatura em Matemática precisava ser destacada uma atividade pedagógica que visasse essas correlações.

O artigo de Miguel, Fiorentini e Miorin (1992) apresenta algumas reflexões, inclusive históricas, sobre o movimento pendular entre a álgebra e a geometria. Nesse artigo encontramos tanto um debate sobre o trabalho com a álgebra, de maneira mecânica e automatizada desprovida de qualquer significação, quanto um chamado para uma tendência de ensinar a geometria de forma que ela desempenhe cada vez mais um papel na construção e na visualização de propriedades aritméticas e algébricas. Os autores (1992) propõe um ensino que estimule a reflexão e a análise de situações-problema de naturezas diversas, e nisso corroboram com Lins e Gimenes para os quais a atividade algébrica consiste no processo de produção de significados para a álgebra. (LINS R.; GIMENES, J.,1997, p.137).

Apesar de inúmeras pesquisas publicadas sobre o ensino e a aprendizagem sobre Funções (Markovits *et al*.,1995; Souza, 2011; Reis, 2011), dentre outros, os estudantes em geral não indicam um aprendizado efetivo desse conteúdo. Assim, depois de algumas experiências no *Programa de Iniciação de Bolsas de Iniciação à Docência*, no *Estágio Supervisionado Curricular* e em um projeto de extensão (*Contribuindo para a Melhoria da Aprendizagem Matemática no Município de Itabaiana)*, começamos a refletir sobre a possibilidade de desenvolver atividades que concatenassem o estudo de funções, aliás, a álgebra, de forma geral, e a geometria. Sob esse propósito foi apresentado na Semana de Extensão o mini-curso *O casamento da Álgebra e da Geometria*. Depois resolvemos observar em alguns livros didáticos exemplos de relações que não eram funções e notamos que tais exemplos não existiam. Então, surgiu o aprofundamento desse mini-curso aliado ao auxílio de um *software* que trabalhasse de forma simples com a *interface* entre álgebra e Geometria. Optamos pelo GeoGebra, que é livre e atendia as nossas demandas.

Para elaborar as atividades desenvolvidas nos baseamos na Engenharia Didática que, segundo Douady, é tanto uma metodologia de pesquisa quanto "uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo de forma coerente" (Douady 1993, apud Machado 2008, p. 234). Tal metodologia é implementada em quatro fases: análises preliminares; concepção e análise *a priori* das situações didáticas; experimentação e análise *posteriori* e validação.

Análises preliminares

Visamos nessa etapa conhecer e considerar os conhecimentos sobre o assunto que os alunos já tinham adquiridos. Assim propomos antes as seguintes questões:

- Existe alguma relação entre área e perímetro de um retângulo? Justifique.
- O que é uma função? Dê exemplo de uma função e de uma relação que não é função.

Depois de analisarmos as respostas observamos principalmente as seguintes características em relação aos estudantes:

- De 23 participantes somente um apresentou um exemplo de uma relação entre duas variáveis a qual não expressa uma função.
- Não souberam argumentar, debater e apresentar de forma lógica as relações entre perímetro e área de um retângulo.
- Apresentavam insegurança em relação a lidar com as fórmulas geométricas.
- A maioria não soube expor a definição de função de maneira clara e precisa.

- Grande parte deles apresentou a definição de função com um exemplo e por meio de um diagrama de flechas.

Análise *a priori* e concepção

Os participantes já tinham conhecimento mínimo sobre como utilizar o GeoGebra. Prevíamos que eles teriam alguma dificuldade em relação a uma nova concepção de pensar e exemplificar o conceito de funções do que a normalmente vista por eles nos cursos, tanto da educação básica como da própria licenciatura. Além disso, também imaginávamos que eles não tivessem tido contato com um modelo que envolvesse tantas relações geométricas, mesmo em um polígono como o retângulo, tão simples e "sem mistérios" em termos geométricos.

Essa atividade envolvia: discussões iniciais, a atividade no Laboratório de Informática e em sala de aula, conclusões finais. Os alunos não trabalharam em grupo, mas poderiam se deslocar para conversar e trocar ideias com outros colegas. Os objetivos do trabalho realizado com os estudantes foram:

- Estudar relações existentes entre área e perímetro de um retângulo;
- Estudar modelos geométricos para extrair relações algébricas como, por exemplo, as funções;
- Analisar o conhecimento desses estudantes a respeito de relações que não são funções; e
- Oportunizar situações geométricas para que os alunos modelem algebricamente.

Participaram 23 estudantes do 5º período de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, Campus de Itabaiana. A atividade foi desenvolvida como parte do conteúdo programático da disciplina Laboratório de Ensino de Matemática. De forma geral, tais estudantes tinham conhecimentos prévios de Cálculo I e II e Geometria Analítica. A maioria cursava, nesse mesmo período, Equações Diferenciais Parciais e ou Estruturas Algébricas. Quatro deles participavam de projetos de iniciação científica em Matemática.

A Experimentação[3]

[3] Utilizamos as siglas **u.a**. para designar unidade de medida quadrática e **u.p**. para unidade de medida linear.

As atividades tiveram duração de aproximadamente 12 horas e aconteceram no Laboratório de Informática da Universidade Federal de Sergipe - Centro Prof. Alberto de Carvalho, localizado na cidade de Itabaiana. (Fig.1)

FIGURA 1: Alunos no Laboratório de Informática da Matemática[4]

Área Fixa

Iniciamos propondo a construção de um retângulo de área 10 u.a. As construções deles se concentraram na malha que faz fundo ao espaço geométrico do GeoGebra e foram do tipo 2x5 u.a. Foi solicitado que retirassem a malha e construíssem um outro retângulo com essa mesma área, alguns disseram que seria uma do tipo “1x10 u.a.”. Foram inquiridos se existiria outro retângulo e como muitos diziam que não, eles foram estimulados a pensarem sobre questões do tipo “E um retângulo $100 \times \frac{1}{10}$ u.a.?” A maioria se posicionou que existiam infinitos.

Direcionamos para uma nova construção utilizando uma maneira generalizada para dinamizar e visualizar a existência desses infinitos retângulos de área 10. Os estudantes foram motivados a utilizarem o ícone seletor que direciona o tamanho da área e do perímetro desse polígono (*controle deslizante)*, as relações geométricas possíveis, e a assentarem dois dos quatro lados sobre os eixos cartesianos. Eles tentaram correlacionar as relações para “programar” no *software* e com algumas dicas como, por exemplo, verificar como seriam os pontos sobre os eixos, alguns participantes conseguiram. Foi solicitado que eles utilizassem o ícone *medir* para visualizarem as medidas dos

---

[4] Fomos autorizados a publicar a imagem dos estudantes

perímetros e a área que ia aparecendo ao movimentar o *controle deslizante*.

Assim, depois de outras construções como, por exemplo, área **17** u.a fixa, eles foram questionados quanto aos perímetros e da mesma forma responderam que existiam infinitos retângulos que tinha essa mesma área, porém o perímetro variava. Analisaram as variações dos perímetros, como "muito grandes", "menor possível", a possibilidade do esboço da figura estar em outros quadrantes que não seja o primeiro, quando isso acontecia, a probabilidade da área ser igual ao perímetro.

Houve muita interação e participação. Todos queriam falar, opinar, porém depois de observarem bastante o movimento dos retângulos e as relações geométricas com base no deslizamento, foi solicitado que registrassem tudo por escrito as relações intuídas. Isto é: Quando que o perímetro era igual à área? Com uma área fixa qualquer, qual seria a relação entre o perímetro e os lados? Se existisse o perímetro mínimo qual seria? Como detectar **todos os retângulos que tem o mesmo valor da área**? Qual seria o local geométrico dos vértices opostos quando conhecemos o valor da área?

Dados l_1e l_2, os lados de um retângulo, temos a seguinte expressão para a área *A*,

$$A = l_1 l_2 \quad \Rightarrow \quad l_2 = \frac{A}{l_1}, \forall\, l_1 \in\,]0, +\infty[$$

que corresponde a um local que passa por $(1, A)$, $(A, 1)\ e\ (\frac{\sqrt{A}}{2}, \frac{\sqrt{A}}{2})$ e quando o $l_1 \to \infty$ o $l_2 \to 0$, e quando $l_1 \to 0$ o $l_2 \to \infty$, o que caracteriza que este local é um braço de hipérbole (no primeiro quadrante). Tomando qualquer ponto desta hipérbole como vértice oposto, o retângulo associado terá área *A* escolhida.(Gráf. 1)

De fato, tomando $C = \left(t, \frac{A}{t}\right), \forall\, t \in\,]0, +\infty[$, temos que

$$A = (0,0), B = (t, 0)\ e\ D = \left(0, \frac{A}{t}\right)\ \forall\, t \in\,]0, +\infty[.$$

Logo $l_1 = t$ e $l_2 = \frac{A}{t}$, portanto,

$$\acute{A}rea = l_1 l_2 = t\left(\frac{A}{t}\right) = A$$

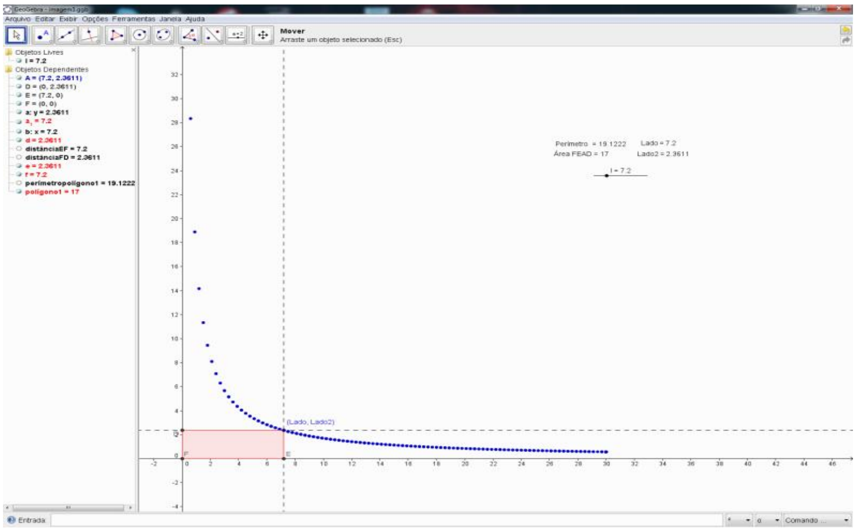

GRÁFICO 1: Lugar geométrico Hipérbole obtido pelo vértice oposto de um retângulo de área 17 u.a.

Estamos interessados em relacionar a medida da área e a do perímetro dos retângulos, a fim de analisar o comportamento dessas medidas quando uma delas varia. Quando sabemos um valor da área de um retângulo o que podemos concluir do valor do perímetro desse mesmo polígono, e vice-versa?

Convidamos os estudantes a pensarem nas questões: Tomando um valor da área *A*, qual deve ser a expressão dessa **variável perímetro** determinado pelo retângulo? Ela é uma variável dependente ou independente? Se for dependente qual seria a outra e vice-versa?

Considerando *P*, o perímetro, *A* a área, l_1 e l_2 os lados do retângulo, teremos

$$P = 2(l_2 + l_1), \qquad (1)$$

$$A = l_2 l_1 \qquad (2)$$

Isolando um dos lados em (2) e substituindo em (1) teremos

$$P = 2\left(\frac{A}{l_1} + l_1\right), l_1 \neq 0 \text{ e } A \text{ fixa.} \qquad (3)$$

Devido a continuidade dessa expressão, o valor do perímetro assume o valor mínimo *16,50* u.p. (quando $l_1=\sqrt{17}=l_2$) e não terá valor máximo determinado. De fato, utilizando derivada,

$$\frac{\partial P}{\partial l_1} = -2\frac{A}{{l_1}^2} + 2 = 0 \Rightarrow l_1^2 = A \Rightarrow l_1 = \sqrt{A},$$

isto é, o perímetro mínimo é atingido quando um dos lados for $\sqrt{A}$. Então, o outro lado também será $\sqrt{A}$ e o retângulo será então **um quadrado**, ou melhor, o perímetro será mínimo quando tivermos um quadrado. Como estamos tratando de uma área de 17 u.a. concluímos que o perímetro mínimo ocorre quando os lados forem $\sqrt{17}$.

Desta forma podemos deduzir o seguinte comportamento para uma área 17 u.a.:[5]

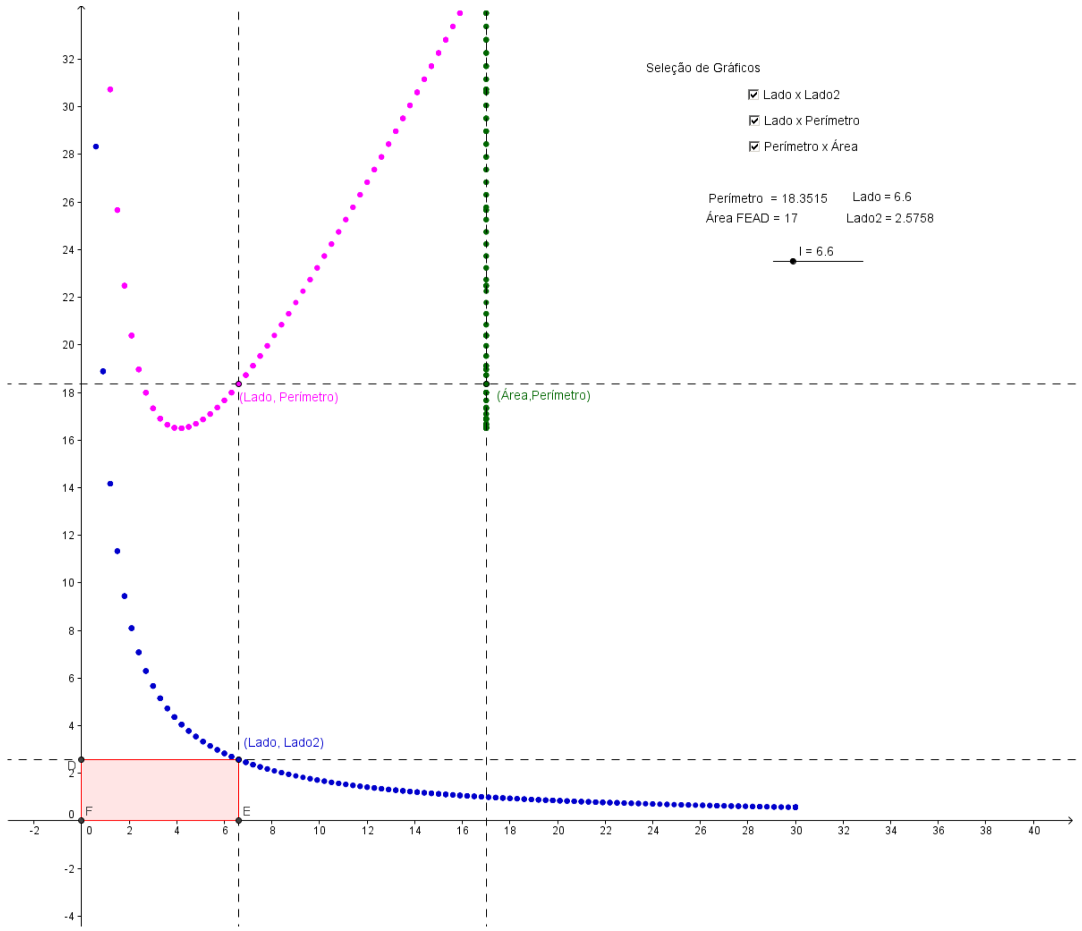

GRÁFICO 2: Esboço gráfico no GeoGebra, no mesmo sistema de coordenadas, da relação entre os dois lados l_1 e l_2 (azul), entre o perímetro **P** e o lado l_1 (rosa) e entre a área 17 u.a. e perímetros (verde) de um retângulo.

Assim, no esboço do gráfico da função perímetro (Gráf.2, vide a cor rosa) em relação a um dos lados (ref. (3)), teremos um ramo dessa hipérbole e ele estará acima do valor 16,50 u.p. O ramo da hipérbole azul é dada por $\frac{A}{l_1}$, obtida da ref. (2). Ambas as relações são funções cujos gráficos são hipérboles e, no nosso modelo, são apenas ramos das hipérboles localizados no quadrante $l_1 > 0$ e $l_2 > 0$. Contudo, pelo modelo observamos que a relação entre a área *A* e o perímetro *P* não é função, pois para cada *A*, fixa, existem infinitos valores que *P* pode assumir, como é possível observar pela representação gráfica anterior (cor verde) e vice-versa.

Perímetro fixo

[5] Apresentamos neste trabalho os três gráficos em um mesmo sistema de coordenadas. Porém na atividade implementada os gráficos foram discutidos e esboçados em sistemas separados.

Foi debatida a outra possibilidade, **fixar o perímetro e variar a área**, porém, nesse caso, já é possível obter outras relações às quais são funções apenas as que envolvem os lados ou as que envolvem a área e um dos lados. Do mesmo modo, foram intuídas, debatidas e observadas tais relações não somente por meio da possibilidade visual e dinâmica que o GeoGebra oferece, mas também efetuando os cálculos algebricamente e recursos da derivada. Vale ressaltar que, neste caso, a relação entre os lados é dada pelo lugar geométrico,

$$(l_1, (10/2)\text{-}\, l_1), \qquad (4)$$

onde P = **10** u.p. O esboço é um segmento de reta e a reta na qual ele está assentado tem coeficiente angular negativo, que passa por $\left(0, \frac{P}{2}\right)$ e $\left(\frac{P}{2}, 0\right)$, situado no primeiro quadrante, pois as medidas dos lados devem ser não negativas. Assim, se tomarmos qualquer ponto deste segmento como vértice oposto, o retângulo associado terá como perímetro o P escolhido. (Gráf. 3)

De fato, tomando $C = \left(t, \frac{P}{2} - t\right), \forall t \in \left(0, \frac{P}{2}\right)$, temos que

$$A = (0{,}0), B = (t, 0) \text{ e } D = \left(0, \frac{P}{2} - t\right) \ \forall\, t \in \left(0, \frac{P}{2}\right).$$

Logo $l_1 = t$ e $l_2 = \frac{P}{2} - t$, portanto,

$$\text{Perímetro} = 2l_1 + 2l_2 = 2t + 2\left(\frac{P}{2} - t\right) = P$$

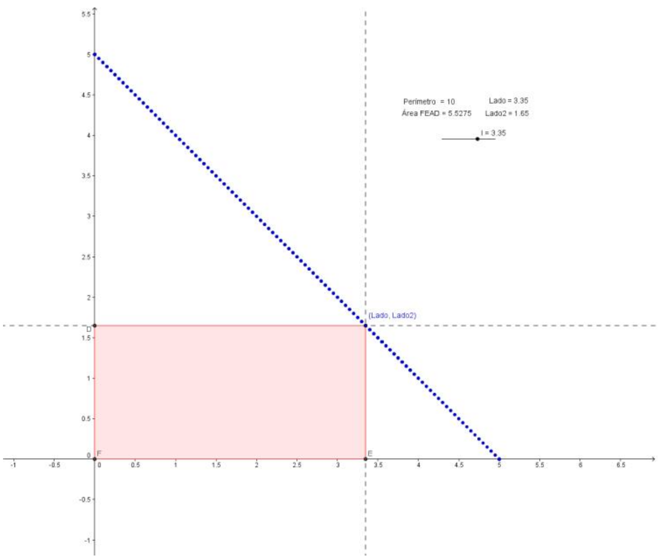

GRÁFICO 3: Lugar geométrico segmento de reta obtido por um dos vértices de um retângulo de perímetro 10 u.p.

O lugar geométrico expresso pela relação entre a área e um dos lados é uma parábola com concavidade voltada para baixo,

$$A = l_1 l_2 = l_1\left(\frac{P}{2} - l_1\right), \forall\, l_1 \in \left(0, \frac{P}{2}\right),$$

obtida substituindo o valor de l_2 (3) em (2). (*cf*. gráf. 4, para perímetro fixo 10 u.p.)

Devido à continuidade dessa expressão, o valor da área pode assumir seu valor máximo em $l_1 = \frac{P}{4}$ e não atinge o mínimo,

$$\frac{\partial A}{\partial l_1} = \frac{P}{2} - 2l_1 = 0 \Rightarrow l_1 = \frac{P}{4} \Rightarrow A = \frac{P^2}{16}.$$

Desta forma podemos deduzir o comportamento da relação entre a área e um dos lados, *P* =**10** u.p, como no gráfico 4.

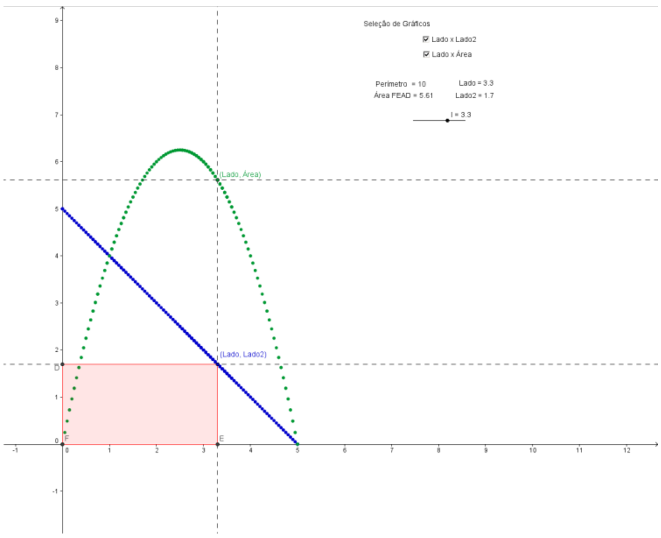

GRÁFICO 4: Esboço gráfico no GeoGebra, no mesmo sistema de coordenadas, da relação entre os dois lados l_1 e l_2 (azul), e entre a área e um dos lados(verde) de um retângulo de perímetro 10 u.p.

Validação

Depois da experimentação propusemos questões como as iniciais novamente e outras como:

- O que a oficina trouxe de inovador?
- O que acha do *software* GeoGebra para trabalhar tais conteúdos?
- O aprendizado de funções dessa forma me ajudou a...

Depois de analisarmos as respostas observamos principalmente as seguintes características em relação aos estudantes:

- Em grande maioria, relataram que o *software* GeoGebra é muito importante para a compreensão e aprendizagem de muitos conteúdos matemáticos;
- Unanimemente despertaram o interesse de animar modelos de forma a criar conjecturas e incentivar a busca por padrões;
- Alguns entenderam como um novo método de ensino, uma nova fórmula de apresentar alguns certos assuntos em aula;
- Sem exceções, compreenderam que as relações entre perímetro e área de um retângulo por si só, não pode ser chamada de função; e
- Em geral, melhoraram a segurança em relação a lidar com as fórmulas, em especial as geométricas.

As análises *a posteriori* nos indicaram que os estudantes se surpreenderam com relações as quais não são funções, se motivaram em aprofundar tais estudos para outros polígonos, revelaram nunca terem visto as relações encontradas de forma tão concatenadas, manifestaram dificuldades em generalizar alguns resultados. Eles fizeram o resumo das atividades e indicaram, pelos registros escritos e participação nas aulas e principalmente, na fase de validação da metodologia, que aprenderam muito sobre área, perímetro e funções e que tais aprendizagens refletiriam principalmente no exercício de suas docências na educação básica. Comentarem que o GeoGebra foi muito útil para, de forma rápida e precisa, apenas por um *click*, poderiam movimentar, dinamizar as construções e fazer comparações. Alguns alunos também comentaram que por meio desse *software* puderam não só elaborar as construções geométricas, mas da mesma forma, visualizar algebricamente os gráficos e relacionar tais comportamentos às figuras geométricas.

Considerações finais

A utilização do *software* GeoGebra proporcionou uma rápida modificação do fenômeno modelado, quando os estudantes observavam que o modelo elaborado por eles não respondia as perguntas postas. Para eles, mesmo sendo alunos do ensino superior tais atividades, são válidas, pois em geral, são poucas as oportunidades que eles têm de visualizarem conteúdos matemáticos de forma enredada e por meio de um auxílio didático, como o computador, e de um *software* que possibilita a concatenação de tais conteúdos. Contudo, acreditamos que o número de horas dedicadas a essa atividade foi pouco e deveria ser realizada como um mini-curso com duração de, pelo menos, 18 horas. Assim, os participantes e ministrantes podem ter mais tempo para analisar profundamente tais relações. Interessante observar que apesar de os estudantes que participaram dessa atividade já terem conhecimento prévio de Cálculo Diferencial e Integral, poucos conseguiram mobilizar seus esquemas e empregar na análise da situação-problema que lhes foi proposta.

O estudo pode continuar com análises entre volumes e superfícies de sólidos geométricos, entre áreas e perímetros de variados tipos de triângulos. As relações que serão obtidas podem ou não gerar funções e dessa forma podemos estudar de forma dinamizada e investigativa a álgebra e a geometria uma dando significado e fazendo emergir a outra.

Referências

LINS, R. C.;GIMENES, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas, SP: Papirus, 1997.

MACHADO, S.D.A.(org). *Educação Matemática – Uma (nova) introdução.* São Paulo:EDUC, 2008.

MARKOVITS, Z.; EYLON, B S.; BRUCKHEIMER, M. *Dificuldades dos alunos com o conceito de função*. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. *As idéias da álgebra*, São Paulo: Atual, 1995, p. 49-69.

MIGUEL A., FIORENTINI D. e MIORIM A. *Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?, Pró-posições*, vol. 3, n° 1, Campinas, SP, 1992.

MIORIM M.A.*Introdução à História da Educação Matemática*.São Paulo: Atual, 1998.

REIS, A. M. *Uma proposta dinâmica para o ensino de função afim a partir dos erros dos alunos no primeiro ano do ensino médio*. São Paulo, SP: PUCSP, 2011. Dissertação de Mestrado Profissional. Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SOUZA V. R. *Funções no Ensino Médio: História e Modelagem.* São Paulo, SP: PUCSP, 2011. Dissertação de Mestrado Profissional. Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.