



UN ESTUDIO DE ERRORES SOBRE LA REPRESENTACIÓN EN LA RECTA DE NÚMEROS NEGATIVOS

Alicia Bruno Castañeda
Noemí Cabrera Betancort

Universidad de La Laguna

Resumen

Presentamos un trabajo sobre la representación en la recta de números negativos por parte de alumnos de Educación Secundaria (13-14 años) que presentaban dificultades generalizadas en el aprendizaje de las Matemáticas. Se ha realizado una clasificación de los tipos de errores que cometieron los alumnos en la cual hemos diferenciado entre los errores conceptuales o de *interpretación* y los errores de procedimiento o de *escritura*.

Abstract

This work studies the representation of negative numbers in the number line by Secondary School students (13-14 years old) showing generalized difficulties in the learning of mathematics. We classify the mistakes made by the students. The classification considers separately the conceptual (or “interpretative”) mistakes and the procedural (or writing) ones.

Introducción

Este trabajo analiza cómo alumnos con dificultades de aprendizaje en Matemáticas utilizan la recta en diferentes situaciones en las que están implicados números negativos.

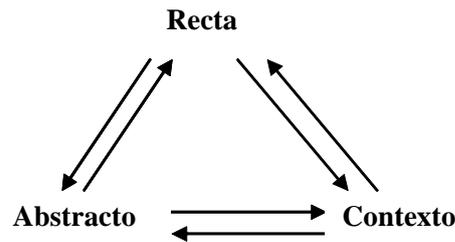
Entendemos en este trabajo como alumnos *con dificultades en Matemáticas* a un grupo de alumnos que presentaba bajo rendimiento académico en todos los bloques de contenido matemático y también alumnos con necesidades educativas especiales.

Analizamos las dificultades que manifiestan estos alumnos en dos procesos diferentes: *cuando representan en la recta y cuando leen de la recta* los aspectos de concepto, orden, suma y resta, en relación con los números negativos.

Basándonos en trabajos previos (Bruno y Martínón, 1999; Peled, 1991; Vergnaud, 1982) consideramos la enseñanza y aprendizaje de los números negativos desde tres dimensiones de conocimiento:

- *Dimensión abstracta*, que es el uso de los números y las operaciones a través de sus símbolos matemáticos abstractos.
- *Dimensión de recta*, que se refiere a la representación en la recta de los números y las operaciones.
- *Dimensión contextual*, que es el uso de los números y las operaciones en situaciones concretas.

Consideramos también las traducciones que se pueden establecer entre estas dimensiones, es decir, cómo se expresa el conocimiento de una dimensión a otra.



En Bruno y Martínón (1994) se analizan algunos aspectos de las traducciones entre estas tres dimensiones por parte de alumnos de 12-13 años. En dicho trabajo, después de realizar una experiencia de aula en la que la recta se utilizó como apoyo de la enseñanza de los números negativos, se concluyó que la recta presentaba dificultades, especialmente en las traducciones entre las dimensiones abstractas y de recta. Sin embargo, el uso de situaciones concretas (dimensión contextual) sirvió de apoyo para comprender las traducciones entre lo abstracto y la recta. Por ello concluimos que una enseñanza de los números negativos que utilice la recta debería ir unida al uso de los números en la dimensión contextual.

En este trabajo restringimos el estudio a alumnos con dificultades en Matemáticas, presuponiendo que las dificultades y errores que encontremos serán más numerosas, lo que nos ayuda a tipificar y analizar con mayor profundidad los tipos de errores.

Objetivos

Los objetivos de este trabajo se concretan en el estudio de los errores que manifiestan alumnos con dificultades en Matemáticas al realizar las siguientes traducciones:

- de la recta a lo contextual y de lo contextual a la recta
- de lo abstracto a la recta y de la recta a lo abstracto

en el concepto, el orden, la suma y la resta con números negativos.

Para analizar estos errores hemos planteado a los alumnos actividades de:

- **Concepto:** interpretar, leer o representar números negativos (en las tres dimensiones). En el caso de las dimensiones de recta y contextual distinguimos entre dos tipos de situaciones numéricas: *estados* y *variaciones*.
- **Suma y resta:** interpretar, leer o representar sumas y restas con números negativos. Para las dimensiones de recta y contextual, las relacionamos principalmente con situaciones de cambio (*estado inicial + variación = estado final*).
- **Orden:** ordenar números negativos e interpretar el orden en alguna de las tres dimensiones.

En el estudio de los errores distinguimos entre **errores de escritura**, que son errores de procedimiento o de hábitos de escritura cometidos al escribir o al leer de la recta, y **errores de interpretación** que se producen cuando no se relaciona la representación que se lee o que se realiza en la recta con el concepto de número, con la suma, con la resta o con el orden de los números. Estos últimos son, por tanto, errores conceptuales.

Metodología

Para realizar la investigación se llevó a cabo una experiencia de aula con alumnos de 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) de 13-14 años, de un Centro del extrarradio de Tenerife. La investigación tuvo dos fases; una primera fase de trabajo en el aula con los alumnos sobre los números negativos y, una segunda fase, en la que se realizó entrevistas a una selección de los alumnos participantes en la primera fase.

Para la primera fase diseñamos un material específico para introducir los números negativos. Este material consistía en una secuencia de actividades sobre los números negativos que constaba de 8 partes: concepto de número

negativo, valor absoluto, orden, opuesto de un número, suma, resta, multiplicación y división. Las actividades se diseñaron de forma que trabajase con la misma intensidad las tres dimensiones ya mencionadas y las relaciones entre ellas. Los números se representaron en la recta con puntos y con flechas y los contextos tratados fueron temperatura, dinero, nivel del mar y posición del ascensor.

El Centro elegido para realizar la experiencia realizó agrupamientos flexibles en los grupos de 2º de ESO según el rendimiento de los alumnos (niveles alto, medio y bajo). Esto nos permitió elegir los dos grupos de nivel bajo, que tenían 10 y 11 alumnos, respectivamente. Dichos alumnos presentaban una amplia variedad de dificultades: problemas de concentración, bajo nivel en Matemáticas, necesidades educativas especiales (de estos últimos, había dos en cada grupo).

La fase de experimentación en el aula tuvo una duración de 9 horas en las que se realizaron las actividades propuestas con el material elaborado. Una vez terminadas las actividades, los alumnos hicieron una prueba escrita, que fue la misma para los alumnos de todos los niveles de 2º al terminar este tema, propuesta por los profesores de los distintos grupos.

La segunda fase, esto es, la realización de las entrevistas, comenzó tres meses después de terminada el periodo de instrucción. Se entrevistó de forma individual a 9 de los 21 alumnos participantes. Para ello se eligieron a los alumnos que habían obtenido peor rendimiento, después de seguir con regularidad la instrucción. La duración de cada entrevista fue de 30 minutos, aproximadamente.

El objetivo de las entrevistas era plantear a los alumnos actividades en las que tuviesen que realizar traducciones entre las dimensiones:

Recta ↔ Contexto Recta ↔ Abstracto

En la Tabla 1 se indica el número de cuestiones realizadas sobre cada traducción.

Tabla 1. Número de actividades realizadas en las entrevistas de cada una de las traducciones

Traducción	Contexto→Recta	Recta →Contexto	Abstracto→Recta	Recta→Abstracto
Nº total	13	7	4	6

Análisis de resultados

El análisis de las entrevistas consistió en la identificación de los errores más frecuentes que cometían los alumnos para cada tipo de traducción. En este trabajo exponemos una clasificación de estos errores.

Como comentamos anteriormente, los errores se clasificaron en dos tipos: *errores de escritura* (o de procedimiento) y *errores de interpretación* (o conceptuales).

Una vez realizado el análisis, concluimos que los alumnos cometían errores que no estaban recogidos en la literatura revisada y que hemos denominado como se expone a continuación:

- Errores de *interpretación*:

Traducción, Representación aislada, Escala y Reversibilidad.

- Errores de *escritura*:

Conteo, Colocación, Orientación, Flecha.

A continuación explicamos y ponemos un ejemplo de cada uno de estos errores. Los ejemplos elegidos corresponden a las actividades planteadas en las entrevistas.

Errores de interpretación

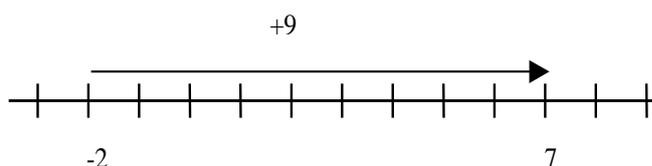
Como hemos indicado, los errores de *interpretación* se deben a una falta de conocimiento conceptual sobre el uso de la recta. En concreto, distinguimos entre errores de *traducción*, *representación aislada*, *escala* y *reversibilidad*.

Traducción

El error de *traducción* aparece cuando el alumno no asocia una representación en la recta como modelo de una situación concreta (concepto, suma o resta) o, por el contrario, cuando a partir de una situación concreta no la representa en la recta. La comisión reiterada de este tipo de error por parte de un alumno indica que la recta no es un modelo para él.

Se encontró este error al plantearles que dieran un ejemplo de una situación real que se correspondiese con una representación concreta, como en el siguiente ejemplo:

Dime una situación que se represente de la siguiente forma:



En esta actividad, 6 de los 9 alumnos entrevistados interpretaron una situación aditiva del tipo: *estado inicial + variación = estado final*, todos ellos de forma correcta. Una de las respuestas dadas fue la siguiente:

“Estaba en el piso -2 y subí 9 pisos. Me bajé en el piso $+7$ ”.

Sin embargo, para los otros 3 alumnos la representación en la recta no les evocó ninguna situación de las usuales. Así por ejemplo, hemos clasificado como error de *traducción* la siguiente respuesta de un alumno:

“Me quitaron dos gomas, me compré 9 y tengo 7”

Este alumno toma los números de la recta, con el signo correcto, pero describe una situación que no se corresponde con la representación.

Representación aislada

El error denominado *representación aislada* ya había sido catalogado en investigaciones previas (Bruno y Martínón, 1997) y aparece confirmado en esta investigación. Este error se produce cuando, a partir de una situación aditiva, se representan en la recta los tres números implicados con tres puntos aislados, sin establecer conexión en ellos.

Por ejemplo, se propuso a los alumnos la siguiente actividad en la que debían representar una situación concreta en la recta:

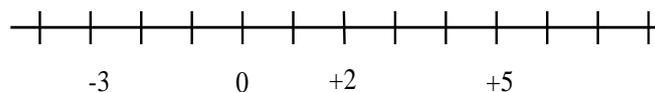
**“Juan cogió el ascensor en el piso 3 del sótano y se bajó en el piso 5”.
Representa en la recta la situación y averigua cuál fue el movimiento del ascensor.**

La situación aditiva dada se corresponde con una del tipo:

$$\textit{estado final} - \textit{estado inicial} = \textit{variación}$$

y no fue resuelta correctamente por ningún alumno de los entrevistados, pues todos hicieron una interpretación errónea del enunciado.

La representación que mostramos a continuación, realizada por un alumno, es un ejemplo de lo que hemos denominado error de *representación aislada*.

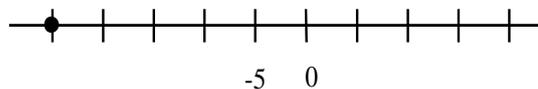


Para este alumno la situación aditiva dada no tiene una interpretación significativa en la recta, ya que los tres valores son puntos aislados en la recta.

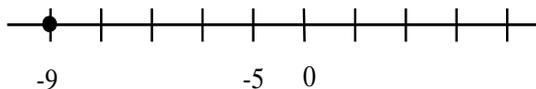
Error de escala y Error de reversibilidad

Hemos denominado error de *escala*, a aquel que se produce cuando el alumno no interpreta una representación en la recta dada en una escala determinada. Este error lo pudimos observar en la siguiente actividad:

Escribe el número representado en la recta con un punto

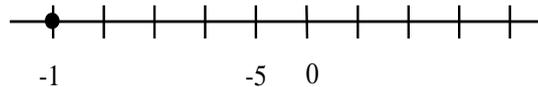


La respuesta de algunos alumnos fue la siguiente:



Estos alumnos no tuvieron en cuenta la escala a la que había sido dada la recta y supusieron que cada espacio representaba la unidad.

En esta misma actividad podemos observar el error de *reversibilidad*, que consiste en colocar los números negativos en orden contrario al correcto en la recta, es decir, de derecha a izquierda en orden creciente. Este error se corresponde con una respuesta como la siguiente en esta actividad:



Errores de escritura

Los errores de *escritura* no implican que el alumno no comprenda el significado conceptual de la representación en la recta, sino que comete errores de procedimiento. Hemos observado en este trabajo cuatro errores de escritura: *colocación*, *flecha*, *conteo* y *orientación*.

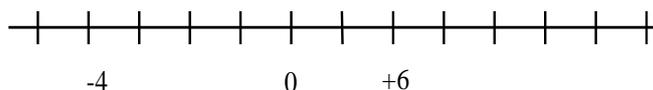
Colocación

El error de *colocación* aparece cuando se tiene que representar una flecha (una *variación*) y su valor no se coloca encima o debajo de la flecha, sino en su extremo. Esto puede llevar, en ocasiones, a la interpretación de la variación como un estado.

En la siguiente actividad:

“La temperatura era de -4°C y subió 6°C ”. Representa en la recta la situación y averigua cuál fue la temperatura después de esta subida.

Un alumno responde de forma correcta y da como respuesta que la temperatura después de la subida era de 2°C . Sin embargo, la representación que hace en la recta es la siguiente:



Aunque este alumno no dibuje la flecha, realiza el movimiento con la mano y coloca +6 en el lugar de +2. Como hemos dicho, eso no le impidió dar una respuesta correcta; sin embargo, la representación es incorrecta.

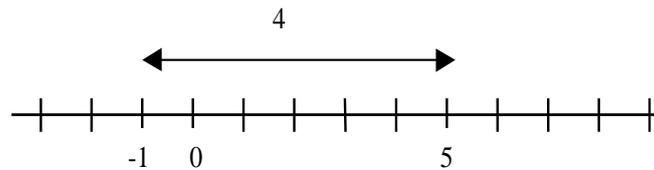
Flecha

El error de flecha tiene que ver, como el caso anterior, con las representaciones de las *variaciones* mediante flechas. Ahora, el error se produce cuando se representa la variación con una flecha en la que se señalan los dos extremos, con lo cual no es posible averiguar si es una variación positiva o negativa.

Con el siguiente ejemplo se ejemplifica este error. Se propuso a los estudiantes la actividad siguiente:

Mi hermano tiene 5 euros y yo debo 1 euro. Representa esta situación en la recta. ¿Cuántos euros tiene mi hermano más que yo?

La respuesta de un alumno, en la que se observa el error de *flecha*, fue la siguiente:



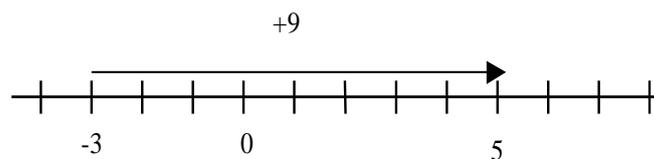
Conteo

El error de *conteo* se produce cuando se cuentan de forma incorrecta los espacios entre los números en la recta.

En la actividad siguiente, ya comentada anteriormente, pudimos catalogar el error de *conteo*.

“Juan cogió el ascensor en el piso 3 del sótano y se bajó en el piso 5”.
Representa en la recta la situación y averigua cuál fue el movimiento del ascensor.

La respuesta de un alumno fue:



En este caso, el alumno hace una correcta interpretación de la situación dada en el enunciado y representa una situación aditiva. Sin embargo, comete un error de *conteo*, dado que la *variación* tiene el valor 9, siendo 8 el correcto. Este error se ha producido por que ha contado, tanto la raya del origen, como la del extremo de la flecha.

Orientación

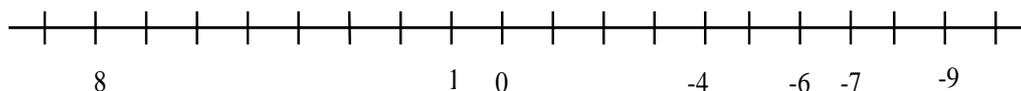
Llamamos error de *orientación* cuando se invierten la posición de los números positivos y negativos en la recta y se colocan los positivos a la izquierda del cero y los negativos a la derecha.

Por ejemplo, en la actividad:

Representa los siguientes números en la recta:

-4, -9, -6, 8, 1, -7

encontramos este error en la respuesta:



Conclusiones

La experiencia realizada en el aula mostró que los alumnos no dominaban el modelo de la recta antes de introducir los números negativos. Esto condicionó el aprendizaje posterior basado en la recta. Después de terminada la experiencia, tras la cual se realizaron las actividades descritas en este trabajo, los alumnos mostraron un mayor conocimiento de la recta, pero cometieron diferentes errores. Esto muestra que la recta no es un modelo intuitivo para los alumnos y necesita un proceso de aprendizaje en el aula, en especial cuando se trata de alumnos con dificultades en Matemáticas.

En este trabajo se ha presentado una clasificación de errores en la lectura e interpretación de los números negativos en la recta con el objetivo posterior de realizar un material de aula para los números negativos que vaya orientado a corregir estos errores. Como hemos visto, los errores son de dos tipos:

conceptuales y procedimentales. En este sentido, las actividades sobre los números negativos se suelen organizar con base en los conceptos, sin considerar que es necesario trabajar ciertos procedimientos. Aunque los errores conceptuales suelen estar más arraigados, no se deben obviar los errores de procedimiento ya que puede llevar a los alumnos a realizar interpretaciones conceptuales erróneas. Pensamos, por otro lado, que, para los alumnos con dificultades, subsanar los errores de escritura es más fácil que interpretar correctamente las representaciones.

Referencias bibliográficas

- Bruno, A., Martínón, A. (1994). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma*, 18, 39-48.
- Bruno, A., Martínón, A. (1997). Procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(2), 249-258.
- Bruno, A., Martínón, A. (1999). The teaching of numerical extension: the case of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30(6), 789-809.
- Peled, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers. *Proceedings of the XV PME*, 145-152.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En Carpenter, T.; Moser, J, Romberg, T. (Eds.) *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. LEA. New Jersey.