

Mapeo de periodos para una deformación μ -constante de una singularidad aislada de curva plana

Period mapping for a μ -constant deformation of an isolated singularity of plane curve

Francisco Jesus Flores-Vivas y Miguel Angel Dela-Rosa

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, México

RESUMEN. En el presente trabajo expositivo se estudia un germen de función holomorfa casihomogéneo $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ con una singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^2$. Específicamente, se considera una deformación de f , F_y con base T , para la cual el número de Milnor se mantiene constante, $\mu(F_y) = \mu(f)$ para cada $y \in T$. El objetivo principal de este trabajo consiste en mostrar que existe un mapeo de periodos asociado con esta familia F_y , el cual se construye usando la teoría sobre la retícula de Brieskorn y la \mathcal{V} -filtración. Los resultados principales se ilustrarán en variados ejemplos. Un hecho importante que atrae nuestra atención en este trabajo, es que la construcción del mapeo de periodos nos proporciona soluciones de la ecuación hipergeométrica de Gauss cuando uno se centra en el análisis de la familia de curvas elípticas simples.

Palabras clave: Singularidad aislada de curva plana, mapeo de periodos, deformación μ -constante, retícula de Brieskorn, ecuación hipergeométrica de Gauss.

ABSTRACT. In this expository article a holomorphic quasihomogeneous function germ $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ with an isolated singularity at $0 \in \mathbb{C}^2$ is studied. Concretely, a deformation for f , F_y with basis T , is considered in such a way that the Milnor number remains constant, that is, $\mu(F_y) = \mu(f)$ for all $y \in T$. The main task in this work is to show that there is a periods map associated to this family F_y which is constructed by means of the Brieskorn lattice and the \mathcal{V} -filtration theory. The main results will be illustrated several examples. One important fact which captures our attention is that the procedure of constructing the period map provides us with solutions for the

hypergeometric Gauss equation, when one focuses in the family of simple elliptic curves.

Key words: Plane curve isolated singularity, period mapping, μ -constant deformation, Brieskorn lattice, hypergeometric Gauss equation.

2020 AMS Mathematics Subject Classification. Primary: 32-01, 32S40, 32S30; Secondary: 14H55, 14H20, 14F40

1. Introducción

La teoría de singularidades permite apreciar la interacción de diferentes objetos y estructuras matemáticas propios de otras áreas de las matemáticas. De acuerdo con los intereses del lector, existen muy diversos enfoques de dicha interacción. Uno muy usual es la aplicación de técnicas desarrolladas en esta teoría a la teoría de sistemas dinámicos. En este contexto, una línea de interés es la teoría de singularidades de funciones suaves, que podemos interpretar en cierto sentido como una generalización del análisis local de los máximos y/o mínimos, lo cual se aborda asumiendo una estructura de diferenciabilidad para la función o familia de funciones de interés (ver [AVG1985], [AVG2012]).

En este trabajo expositivo nos enfocaremos en una interacción especial entre las geometrías algebraica y compleja; el álgebra conmutativa; y la topología algebraica. Esto es, a lo largo de este manuscrito, estaremos trabajando con un enfoque que se centra en aspectos algebraicos y complejo-analíticos, siendo nuestro objetivo fundamental, “analizar el comportamiento de deformaciones de curvas algebraicas planas afines”. A continuación, vamos a precisar estas ideas. Bien, en la teoría de singularidades de “funciones suaves”, un objeto matemático del que se puede obtener una amplia interacción entre análisis complejo y geometría algebraica clásica, es el germen asociado a una función holomorfa $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$.

La retícula de Brieskorn es un “módulo” asociado a un germen de función analítica-compleja f definida sobre un dominio en \mathbb{C}^2 cuyos puntos críticos son aislados. Estamos interesados en el caso de hipersuperficies de dimensión 2, lo cual simplifica la presentación del manuscrito.

Supongamos que $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es un germen que tiene un punto crítico aislado en $0 \in \mathbb{C}^2$. Existen variados invariantes asociados al germen f , uno es el álgebra de Milnor, dada por el \mathbb{C} -espacio vectorial A_f , definido como el cociente del anillo $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ (de gérmenes de series de Taylor convergentes alrededor del $0 \in \mathbb{C}^2$) por el ideal J_f que está generado por las derivadas parciales de f , ver [AVG2012]. La dimensión de A_f , como \mathbb{C} -espacio vectorial, es llamada el “número de Milnor”, $\mu := \mu(f, 0)$. Otro invariante es la retícula de Brieskorn H_0'' la cual es un $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ -módulo de formas diferenciales holomorfas que permite recuperar, salvo un cociente, al álgebra de Milnor, ver [Ku1998]. La retícula de Brieskorn permite construir un invariante discreto asociado con f , con respecto al punto crítico $0 \in \mathbb{C}^2$, el cual es llamado el espectro de la singularidad, $sp(f)$, que consiste de μ números racionales (contando multiplicidades), los cuales miden la dimensión como \mathbb{C} -espacio vectorial de las piezas asociadas a una graduación del álgebra

de Milnor usando la V -filtración (ver [Ku1998], [AVG2012]). A través de este invariante es posible describir el comportamiento de f dentro de una familia de hipersuperficies $\{F_y\}$ parametrizada por un espacio M de parámetros y tales que $\mu(F_y) = \mu(f)$, es decir, el número de Milnor se mantiene constante bajo deformación. Esta familia la llamaremos deformación μ -constante de f . En este trabajo, nos enfocaremos en el caso de curvas planas complejas, para el análisis del mapeo de periodos determinado por la retícula de Brieskorn y que está asociado a una deformación μ -constante, para lo cual nos basaremos principalmente en [Ku1998]. El objetivo principal de este manuscrito es precisar, en el caso de gérmenes casihomogéneos de curvas algebraicas planas complejas, una parte de la teoría más general que es válida para gérmenes no necesariamente casihomogéneos. A pesar de esta simplificación, consideramos que nuestra exposición, la cual recoge variados resultados dispersos en muchos trabajos avanzados y técnicos para los no expertos en esta área de teoría de singularidades, proveerá al lector de una fuente de información que describe parte de la literatura existente sobre la retícula de Brieskorn inmersa en la V -filtración y el espacio de localización donde se induce la conexión meromorfa de Gauss-Manin. Finalmente, es importante mencionar que el presente artículo está basado en el trabajo de tesis de Maestría del primer autor [F2023].

2. Geometría algebraica compleja en superficies de Riemann

En esta sección se darán algunos conceptos y definiciones sobre gérmenes de funciones holomorfas, y cohomología en superficies de Riemann, material que se utiliza en las secciones subsiguientes.

2.1. Gérmenes de funciones holomorfas y base monomial para el álgebra de Milnor

El anillo de funciones holomorfas en una vecindad $D \subset \mathbb{C}^{n+1}$ (series de Taylor convergentes en D) lo denotaremos como $\mathcal{O}(D)$.

Definición 2.1. Decimos que dos funciones $f, g \in \mathcal{O}(D)$ son equivalentes, $f \sim g$, si existe una vecindad $V_z \subset D$ (de z fijo) en la cual f y g coinciden, es decir, $f|_{V_z} = g|_{V_z}$.

La relación \sim definida anteriormente es una relación de equivalencia. A las clases de equivalencia las llamaremos *gérmenes* en z . El conjunto (anillo) de gérmenes en $z \in D \subset \mathbb{C}^{n+1}$ será referido como $\mathcal{O}_{D,z} \approx \mathbb{C}\{z_0 - b_0, \dots, z_n - b_n\} \approx \mathcal{O}(D)$.

Definición 2.2. Diremos que una función $h : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ es un *biholomorfismo* si es holomorfa, biyectiva y tiene inversa también holomorfa.

Definición 2.3. Sean $f : x \mapsto f(x)$ y $g : y \mapsto g(y)$ gérmenes. Se dirá que f y g son *R-equivalentes*, $f \sim_R g$, si existe un biholomorfismo germen $h : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ para el cual $g = f \circ h$ y $h(x) = y$. Esto es, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} & & \\ \downarrow h & \searrow g & \\ \mathbb{C}^{n+1} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \end{array}$$

es conmutativo.

La relación entre gérmenes vía R -equivalencia define una relación binaria de equivalencia cuyas clases las llamaremos *singularidades* y serán denotadas por $f : (\mathbb{C}^{n+1}, z) \rightarrow (\mathbb{C}, f(z))$.

Definición 2.4. Para $f \in \mathcal{O}_{D,z}$, definimos:

1. El ideal Jacobiano $J_f := \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_i} : i = 0, \dots, n \right\rangle$, generado por las derivadas parciales de f .
2. El álgebra de Milnor como el anillo cociente $\frac{\mathcal{O}_{D,z}}{J_f}$ al cual denotaremos por \mathcal{O}_f .
3. El número de Milnor de f en z , denotado como $\mu_z(f)$, es la dimensión como \mathbb{C} -espacio vectorial del álgebra de Milnor.

El siguiente resultado puede ser consultado en [F2021, págs. 34-35].

Proposición 2.5. Sean f un germen en z y g un germen en w . Si $f \sim_R g$, entonces $\mathcal{O}_f \approx \mathcal{O}_g$.

Definición 2.6. Un germen f tiene una *singularidad aislada* en z , si $\mu_z(f) < \infty$. Escribiremos $\mu = \mu(f)$ cuando f tenga singularidad aislada en 0.

Los siguientes dos resultados pueden ser consultados en [Zo2006, pág. 15] y [AVG1985, pág. 121], respectivamente.

Teorema 2.7 (Puntos críticos aislados). *Un germen f tiene singularidad aislada en $z = 0$ si y solo si $z = 0$ es un punto crítico aislado de la función f .*

Teorema 2.8 (De determinación finita). *En una vecindad de un punto crítico de multiplicidad finita, es decir, en una vecindad de una singularidad aislada de un germen f , el germen f es R -equivalente a un germen de algún polinomio.*

Sea $\mathfrak{m} := \langle z_0, z_1, \dots, z_n \rangle$ el ideal maximal de $\mathcal{O}(D)$.

Ahora bien, se puede dar una demostración de la siguiente proposición, la cual puede ser consultada en [F2021, pág. 31].

Proposición 2.9. *Dado $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen de singularidad aislada de hipersuperficie, se tiene que $\mathfrak{m}^{\mu(f)} \subset J_f$.*

Teorema 2.10. *Sea f un germen de singularidad aislada de hipersuperficie. Entonces, existe una base monomial del álgebra de Milnor $\mathcal{B} = \{z^m + J_f : m \in \Lambda\}$, donde $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^{n+1}$ y $|\Lambda| = \mu(f)$.*

Demostración. Sea $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen de singularidad aislada en 0, entonces $\mu(f) < \infty$. Sea $g \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$, es decir, $g = \sum_{|I|=0}^{\infty} a_I z_0^{i_0} \cdots z_n^{i_n}$, donde I denota multi-índices con $|I| = i_0 + i_1 + \cdots + i_n$.

Tomando la clase de g en \mathcal{O}_f obtenemos que:

$$\begin{aligned} [g] &= \sum_{|I|=0}^{\infty} a_I z_0^{i_0} \dots z_n^{i_n} + J_f = \sum_{|I|=0}^{\mu(f)-1} a_I z_0^{i_0} \dots z_n^{i_n} + \sum_{|I|=\mu(f)}^{\infty} a_I z_0^{i_0} \dots z_n^{i_n} + J_f \\ &= \sum_{|I|=0}^{\mu(f)-1} a_I z_0^{i_0} \dots z_n^{i_n} + z^{\mu(f)} \left(a_{I_{\mu(f)}} + \sum_{|I|=\mu(f)+1}^{\infty} a_I z_0^{i_0} \dots z_n^{i_n} \right) + J_f. \end{aligned}$$

Por la proposición 2.9, $z^{I_{\mu(f)}} \left(a_{I_{\mu(f)}} + \sum_{|I|=\mu(f)+1}^{\infty} a_I z_0^{i_0} \dots z_n^{i_n} \right) \in J_f$. Luego,

$$[g] = \sum_{|I|=0}^{\mu(f)-1} a_I z_0^{i_0} \dots z_n^{i_n} + J_f = \sum_{|I|=0}^{\mu(f)-1} a_I (z_0^{i_0} \dots z_n^{i_n} + J_f).$$

Sea $\mathcal{B} := \{z^I + J_f : |I| = 0, 1, 2, \dots, \mu(f) - 1\}$. Entonces \mathcal{B} es un conjunto generador de \mathcal{O}_f . Más aún, como $|\mathcal{B}| = \mu(f)$ y $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_f = \mu(f) < \infty$, entonces los elementos de \mathcal{B} son linealmente independientes. Ya que, si los elementos de \mathcal{B} fueran linealmente dependientes, como $\text{gen}(\mathcal{B}) = \mathcal{O}_f$, entonces $\dim_{\mathbb{C}} \text{gen}(\mathcal{B}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_f < \mu(f)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, \mathcal{B} es una base para el álgebra de Milnor de f . \square

Definición 2.11. Una serie o polinomio f es llamado *casihomogéneo* de grado N y pesos $w_0, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{Q}$, si para toda $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ se tiene que $f(\lambda^{w_0} z_0, \lambda^{w_1} z_1, \dots, \lambda^{w_n} z_n) = \lambda^N f(z_0, z_1, \dots, z_n)$.

2.2. Formas diferenciales sobre superficies de Riemann

Los resultados presentados en esta sección pueden consultarse en [Da2013].

Sea S una superficie de Riemann. Un mapeo diferenciable de la forma $h : S \rightarrow \mathbb{C}$ será referido como una *función diferenciable* sobre S . El conjunto

$$\vartheta(S) := \{h : S \rightarrow \mathbb{C} \mid h \text{ es una función diferenciable sobre } S\}$$

es una \mathbb{C} -álgebra. Una *derivación* sobre $\vartheta(S)$ en un punto $p \in S$ es una transformación \mathbb{C} -lineal $D : \vartheta(S) \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface la regla de Leibniz, esto es:

$$D(f \cdot g) = D(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot D(g).$$

El conjunto $T_p(S) := \{D : \vartheta(S) \rightarrow \mathbb{C} \mid D \text{ es una derivación}\}$ es un espacio vectorial complejo con las operaciones suma y producto por escalar usuales y es llamado el *espacio tangente a S en p* .

Sea $z = x + iy$ las coordenadas locales para el punto $p \in S$. Las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ de la función $f \in \vartheta(S)$ son derivaciones $\frac{\partial}{\partial x}(p)$ y $\frac{\partial}{\partial y}(p)$. Definimos

$$\frac{\partial f}{\partial z}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) - i \frac{\partial f}{\partial y}(p) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) + i \frac{\partial f}{\partial y}(p).$$

Siguiendo [Da2013, pág. 45] tenemos los siguientes lemas.

Lema 2.12. Los vectores $\frac{\partial}{\partial x}(p)$ y $\frac{\partial}{\partial y}(p)$ (resp. $\frac{\partial}{\partial z}(p)$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(p)$) definen una base para el espacio tangente $T_p(S)$. Así, $\dim_{\mathbb{C}} T_p(S) = 2$.

Sea $A^1(S) := \{\omega : p \mapsto \omega_p : T_p(S) \longrightarrow \mathbb{C} \mid \omega_p \text{ es lineal } \forall p \in S\}$. $A^1(S)$ es llamado el conjunto de 1-formas diferenciales y sus elementos $\omega \in A^1(S)$ son llamados 1-formas diferenciales.

Dado un vector tangente $a\frac{\partial}{\partial x}(p) + \frac{\partial}{\partial y}(p)b$ (resp. $a\frac{\partial}{\partial z}(p) + b\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(p)$), definimos los mapeos dx y dy como $dx \left(a\frac{\partial}{\partial x}(p) + \frac{\partial}{\partial y}(p)b \right) = a$ y $dy \left(a\frac{\partial}{\partial x}(p) + \frac{\partial}{\partial y}(p)b \right) = b$ (resp. $dz = dx + idy$ y $d\bar{z} = dx - idy$).

Lema 2.13. Cualquier 1-forma diferencial ω sobre S puede ser escrita localmente como $\omega|_U = fdz + gd\bar{z} = (f + g)dx + (f - g)idy$, donde f y g son funciones complejas sobre algún abierto U de S y $z = x + iy$ sus coordenadas locales en U .

Ahora bien, una 1-forma diferencial $\omega|_U = fdz + gd\bar{z}$ es diferenciable, si f y g son funciones diferenciables para cualquier U . Denotemos por A^1 el conjunto de 1-formas diferenciables, el cual es un espacio vectorial sobre S .

Por otro lado, sean $A^{1,0} = \{\omega \in A^1 : \omega = fdz\}$ y $A^{0,1} = \{\omega \in A^1 : \omega = fd\bar{z}\}$. $A^{1,0}$ y $A^{0,1}$ son subespacios vectoriales complejos de A^1 tales que $A^1 = A^{1,0} \oplus A^{0,1}$.

Análogamente, para $k > 1$, se define el conjunto de k -formas diferenciales como las secciones $\omega : S \rightarrow A^k(S)$, donde

$$A^k(S) := \left\{ \omega : p \mapsto \omega_p : \prod_{\ell=1}^k T_p(S) \longrightarrow \mathbb{C} \mid \omega_p \text{ es multilineal } \forall p \in S \right\}.$$

El producto tensorial $\otimes : A^1 \times \cdots \times A^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ de 1-formas diferenciales está dado por $\otimes(\omega_1, \cdots, \omega_r) = \omega_1(t_1) \cdots \omega_r(t_r)$, donde $(t_1, \cdots, t_r) \in T_p(S) \times \cdots \times T_p(S)$.

Tenemos que, localmente, cualquier forma diferencial ω puede ser escrita como una combinación lineal de productos tensoriales de los elementos dz y $d\bar{z}$.

Si ω_1 y ω_2 son 1-formas diferenciales, definimos el *producto exterior* de estas formas como la 2-forma diferencial $\omega_1 \wedge \omega_2 := \frac{1}{2}(\omega_1 \otimes \omega_2 - \omega_2 \otimes \omega_1)$.

Nota 2.14. Sean ω_1, ω_2 1-formas diferenciales. Se tiene que:

1. $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$.
2. $\omega_1 \wedge \omega_1 = 0$ (en particular, $d\bar{z} \wedge dz = -dz \wedge d\bar{z}$ y $dz \wedge dz = d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0$).

En nuestro caso, como una superficie de Riemann es 2-dimensional como variedad diferenciable, se sigue que para $k > 2$, $A^k = 0$. Además, por definición $A^0 = \vartheta(S)$. Ahora, dado que $dz = dx + idy$ y $d\bar{z} = dx - idy$, se tiene que

$$\begin{aligned} dz \wedge d\bar{z} &= (dx + idy) \wedge (dx - idy) = \frac{1}{2}((dx + idy) \otimes (dx - idy) - (dx - idy) \otimes (dx + idy)) \\ &= \frac{1}{2}(dx dx - idxdy + idydx + dydy - dx dx - idxdy + idydx - dydy) \\ &= \frac{1}{2}(-2idxdy + 2idydx) = -i(dx dy - dy dx) = -i(dx \otimes dy - dy \otimes dx) = -ix \wedge dy. \end{aligned}$$

Entonces, cualquier 2-forma tiene una representación en coordenadas locales dada por $\omega = f dz \wedge d\bar{z} = -i f dx \wedge dy$. De esta manera, se tiene que dadas dos 1-formas, en coordenadas locales, $\omega_1 = f_1 dz + g_1 d\bar{z}$ y $\omega_2 = f_2 dz + g_2 d\bar{z}$, su producto exterior está dado por

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (f_1 dz + g_1 d\bar{z}) \wedge (f_2 dz + g_2 d\bar{z}) = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix} dz \wedge d\bar{z}.$$

2.3. Cohomología de de Rham para una superficie de Riemann

Los resultados presentados en esta sección se pueden consultar de manera puntual en [Da2013] y [Mir1995].

Sea S una superficie de Riemann. Vamos a definir un mapeo \mathbb{C} -lineal $d : A^l \rightarrow A^{l+1}$ llamado la *derivada exterior* y los mapeos $\partial, \bar{\partial} : A^l \rightarrow A^{l+1}$. Para tal caso, primero definimos $d : A^0 \rightarrow A^1$ como $df := \partial f + \bar{\partial} f$, donde $\partial f := \frac{\partial f}{\partial z} dz$ y $\bar{\partial} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$.

Los mapeos $\partial, \bar{\partial} : A^1 \rightarrow A^2$ están dados por $\partial(f dz + g d\bar{z}) := \partial f \wedge dz + \partial g \wedge d\bar{z} = \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} + \bar{\partial}(f dz + g d\bar{z}) := \bar{\partial} f \wedge dz + \bar{\partial} g \wedge d\bar{z} = \bar{\partial} f \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$. Así, $d : A^1 \rightarrow A^2$ es tal que

$$\begin{aligned} d(f dz + g d\bar{z}) &:= \partial(f dz + g d\bar{z}) + \bar{\partial}(f dz + g d\bar{z}) = \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz \\ &= \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

Es posible definir $d, \partial, \bar{\partial} : A^l \rightarrow A^{l+1}$ para $l \geq 2$, sin embargo, dado que en una superficie de Riemann $A^k = 0$, para $k \geq 3$, estos mapeos son triviales, es decir, $d, \partial, \bar{\partial} = 0$.

Observación 2.15. Si $f \in \mathcal{O}(S)$, entonces se tiene lo siguiente:

1. $\partial^2 = 0$, ya que $\partial(\partial(f)) = \partial \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \wedge dz = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz \wedge dz = 0$.
2. $\bar{\partial}^2 = 0$, ya que $\bar{\partial}(\bar{\partial}(f)) = \bar{\partial} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge d\bar{z} = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0$.
3. $\partial \circ \bar{\partial} = -\bar{\partial} \circ \partial$, ya que

$$\begin{aligned} \partial(\bar{\partial}(f)) &= \partial \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} d\bar{z} \wedge dz \\ &= -\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} d\bar{z} \wedge dz = -\bar{\partial} \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz \right) = -\bar{\partial}(\partial(f)). \end{aligned}$$

4. $d^2 = 0$, ya que

$$\begin{aligned} d(d(f)) &= d(\partial(f) + \bar{\partial}(f)) = \partial(\partial(f) + \bar{\partial}(f)) + \bar{\partial}(\partial(f) + \bar{\partial}(f)) \\ &= \partial^2(f) + \partial(\bar{\partial}(f)) + \bar{\partial}(\partial(f)) + \bar{\partial}^2(f) = \partial(\bar{\partial}(f)) - \bar{\partial}(\partial(f)) = 0. \end{aligned}$$

Definición 2.16. Una k -forma diferencial $\omega \in A^k$ es llamada *cerrada* siempre que $d(\omega) = 0$. Diremos que ω es *exacta* siempre que $\omega = d\tau$, para alguna $(k-1)$ -forma diferencial τ . El conjunto de k -formas diferenciales cerradas es denotado por $Z_d^k(S)$. Así mismo, $B_d^k(S)$ denota el conjunto de k -formas diferenciales exactas.

Notemos que si $\omega \in B_d^k(S)$, entonces $\omega = d\tau$. Así, $d(\omega) = d(d(\tau)) = d^2(\tau) = 0$. Por lo cual, $\omega \in Z_d^k(S)$. Tenemos entonces que $B_d^k(S) \subset Z_d^k(S)$.

Definición 2.17. El k -ésimo grupo de cohomología de de Rham es el cociente

$$H_d^k(S) = H_d^k(S, \mathbb{C}) := \frac{Z_d^k(S)}{B_d^k(S)}.$$

Los siguientes resultados pueden consultarse en [Da2013, pág. 51] y [Mir1995, pág. 6]), respectivamente.

Proposición 2.18. Para una superficie de Riemann compacta S de género g se tiene que $\dim_{\mathbb{C}} H_d^1(S) = 2g$.

Proposición 2.19. Cualquier superficie de Riemann es una \mathcal{C}^∞ -variedad real 2-dimensional orientable y conexa por trayectorias. Así, cualquier superficie de Riemann compacta es difeomorfa a un toro con g asas, para algún entero no negativo g .

3. Retícula de Brieskorn y conexión de Gauss-Manin

En esta sección vamos a definir la *retícula de Brieskorn* mediante formas diferenciales y la llamada *conexión (meromorfa) de Gauss-Manin* que es una transformación \mathbb{C} -lineal que cumple la regla de Leibniz. Esto permitirá obtener una descomposición por subespacios (espacios propios de un operador relacionado con la conexión) de la localización de la retícula de Brieskorn, \mathcal{M} , y esta descomposición permitirá definir la llamada \mathcal{V} -filtración en \mathcal{M} .

3.1. Fibración de Milnor

Para $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen de singularidad aislada de curva plana en el origen, se puede elegir un buen representante que consiste en restringir dominio y rango, lo cual permite obtener una fibración suave localmente trivial que, como veremos más adelante, será la base para construir otros objetos que son el objetivo del presente manuscrito.

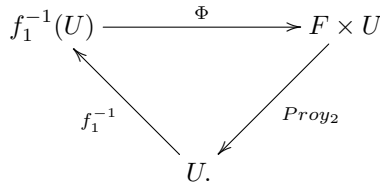
Bien, comenzamos por elegir $B_\epsilon = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : |(z_0, z_1)| < \epsilon\}$ y $D_\delta = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \delta\}$ de tal forma que $(z_0, z_1) = 0$ es el único punto singular de f en B_ϵ y $t_0 = 0$ es el único valor singular en D_δ . Más aún, podemos elegir $0 < \delta \ll \epsilon \ll 1$ tales que para todo $t \in D_\delta^* = \{t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |t| < \delta\}$, las 1-variedades complejas no singulares $f^{-1}(t)$ intersecan transversalmente a la frontera $S_\epsilon := \partial B_\epsilon$. Bajo estas condiciones, se tiene el siguiente teorema donde se muestra la existencia del buen representante citado arriba, lo cual se puede consultar en [AGLV1998, pág. 51] y cf. [Mi1968, Wall2004].

Teorema 3.1 (De la fibración de Milnor). *La restricción $f_1: f^{-1}(D_\delta^*) \cap B_\epsilon \rightarrow D_\delta^*$ es una fibración C^∞ localmente trivial.*

Nota 3.2. Del teorema 3.1, las restricciones representan a los gérmenes,

$$f : (V^*, 0) \longrightarrow (D_\delta^*, 0) \text{ y } f : (V, 0) \longrightarrow (D_\delta, 0),$$

respectivamente, donde $V := (f^{-1}(D_\delta) \cap B_\epsilon)$, $V^* := V \setminus \{0\}$. Asimismo, este teorema permite concluir que para todo $t \in D_\delta^*$ existe una vecindad U de t y un difeomorfismo $\Phi : A \longrightarrow F \times U$ con $A = f_1^{-1}(U)$, el cual hace conmutativo el siguiente diagrama



Además, como D_δ^* es conexa, todas fibras de f_1 son difeomorfas entre sí. Por lo cual, F es única salvo difeomorfismo, la cual es llamada la *fibra de Milnor*.

De acuerdo con el siguiente resultado, usando [Mi1968, pág. 5], se puede decir un poco más sobre la fibra de Milnor.

Proposición 3.3. *Sea $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen de curva plana con singularidad aislada en 0 cuyo representante es un polinomio no constante f . Supongamos que $f_1 : B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\delta^*) \longrightarrow D_\delta^*$ es su fibración de Milnor asociada. Entonces, las fibras V_t son del mismo tipo de homotopía que un $\mu(f)$ -bouquet de 1-esferas¹.*

3.2. Retícula de Brieskorn

Sea $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen de singularidad aislada de curva plana compleja casihomogéneo de grado $d = 1$ y considérese su fibración de Milnor dada por el teorema 3.1. Los objetos que a continuación se describen tienen un enfoque local (a nivel de gérmenes) que es donde se usa una parte de la información de la fibración de Milnor como buen representante del germen alrededor del punto singular aislado dado por $0 \in \mathbb{C}^2$.

Primeramente, la diferencial de f es $df = f_0 dz_0 + f_1 dz_1$, donde $f_0 := \frac{\partial f}{\partial z_0}$ y $f_1 := \frac{\partial f}{\partial z_1}$.

Consideremos el $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ -módulo de formas diferenciales holomorfas

$$\Omega_{\mathbb{C}^2, 0}^2 = \{a(z_0, z_1) dz_0 \wedge dz_1 : a \text{ es una función holomorfa}\}$$

y el submódulo

$$df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} = \left\{ df \wedge dg : g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ g_0 & g_1 \end{pmatrix} dz_0 \wedge dz_1 : g_i = \frac{\partial g}{\partial z_i}, i = 0, 1 \right\}.$$

Definición 3.4. Definimos la *retícula de Brieskorn* como el $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ -módulo cociente:

$$\mathcal{H}^{(0)} := \frac{\Omega_{\mathbb{C}^2, 0}^2}{df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}.$$

¹ Es decir, $V_t \sim \bigvee_{i=1}^{\mu(f)} S_j^1$, donde cada S_j^1 es un círculo.

Consideremos otro submódulo de 2-formas diferenciales holomorfas dado por:

$$df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^1 = \left\{ df \wedge (adz_0 + bdz_1) : adz_0 + bdz_1 \in \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^1 \right\} = \left\{ \begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ a & b \end{vmatrix} dz_0 \wedge dz_1 : a, b \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} \right\}.$$

Se define $\delta: A_f = \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}{J_f} \longrightarrow \frac{\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2}{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^1}$ dado por $\delta([g]) = [gdz_0 \wedge dz_1]$, el cual es un isomorfismo. Así,

$$A_f = \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}{J_f} \approx \frac{\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2}{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^1} \approx \frac{\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2}{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^1} = \frac{\mathcal{H}^{(0)}}{\mathcal{H}^{(0)}}, \quad \mathcal{H}^{(0)} := \frac{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^1}{df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}. \quad (1)$$

Ahora bien, $\mathcal{H}^{(0)}$ tiene estructura de $\mathbb{C}\{t\}$ -módulo con el producto por elementos de $\mathbb{C}\{t\}$ dado por:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{C}\{t\} \times \mathcal{H}^{(0)} &\longrightarrow \mathcal{H}^{(0)} \\ (g(t), [w]) &\longmapsto g(t) \cdot [w] = [\varphi_f(g)w], \end{aligned}$$

donde $\varphi_f(g) = g(f) = \sum \alpha_i f^i$, es decir, evaluamos g en $f = t$, recordando que t es una carta coordenada en $(\mathbb{C}, 0)$.

De hecho, esto nos dice que basta con definir la multiplicación por elementos de $\mathbb{C}\{t\}$ de tal forma que:

$$(t^k, [w]) \longrightarrow t^k \cdot [w] := [f^k w], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Lema 3.5.

- a) $t \cdot \mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{H}^{(0)}$.
- b) $t \cdot \mathcal{H}^{(0)}$ es un $\mathbb{C}\{t\}$ -submódulo de $\mathcal{H}^{(0)}$ generado por $\langle t \rangle = \{g \cdot t : g \in \mathbb{C}\{t\}\}$.

Teorema 3.6. Sea $\mathcal{B} := \{z^m + J_f : m \in \Lambda\}$, con $|\Lambda| = \mu(f) < \infty$, una base monomial del álgebra de Milnor. Entonces, $\{z^m dz + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} : m \in \Lambda\}$ forma una base para $\mathcal{H}^{(0)}$.

Demostración. Tenemos que: $(\mathbb{C}\{t\}, \langle t \rangle, \mathbb{C} \approx \frac{\mathbb{C}\{t\}}{\langle t \rangle})$ es un anillo local; $\mathcal{H}^{(0)}$ es un $\mathbb{C}\{t\}$ -módulo finitamente generado ([Ku1998, pág. 30]) y $\frac{\mathcal{H}^{(0)}}{\langle t \rangle \mathcal{H}^{(0)}} \approx A_f$ es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión finita $\mu(f)$. Por el teorema A.1, si damos una base $\{[v_1], \dots, [v_{\mu(f)}]\}$ de $\frac{\mathcal{H}^{(0)}}{\langle t \rangle \mathcal{H}^{(0)}}$, entonces $\{v_1, \dots, v_{\mu(f)}\}$ sería base para $\mathcal{H}^{(0)}$.

Sea $\mathcal{B} := \{z^m + J_f : m \in \Lambda\}$ base del álgebra de Milnor. Por lema 3.5 y (1), se tiene que $\frac{\mathcal{H}^{(0)}}{\langle t \rangle \mathcal{H}^{(0)}} \approx \frac{\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2}{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^1}$. Asimismo, $\frac{\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2}{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^1}$ y A_f son isomorfos como \mathbb{C} -espacios

vectoriales, vía el isomorfismo $\delta: g(z) + J_f \mapsto g(z)dz + df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^1$. Entonces, δ lleva la base \mathcal{B} en una base $\delta(\mathcal{B})$ de $\frac{\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2}{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^1}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{B}) &= \{ [z^m dz] + df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^1 : m \in \Lambda, |\Lambda| = \mu(f) \} \\ &\approx \{ [z^m dz] + \langle t \rangle \mathcal{H}^{(0)} : m \in \Lambda, |\Lambda| = \mu(f) \} \end{aligned}$$

es una base de $\frac{\mathcal{H}^{(0)}}{\langle t \rangle \mathcal{H}^{(0)}}$. Por lo tanto, se tiene que $\{ [z^m dz] : m \in \Lambda, |\Lambda| = \mu(f) < \infty \}$ es una base para $\mathcal{H}^{(0)}$, con $[z^m dz] = z^m dz + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} \in \mathcal{H}^{(0)}$. \square

3.3. Conexión de Gauss-Manin

En lo subsecuente, al igual que en la sección anterior, seguiremos considerando un germen de singularidad aislada de curva plana $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ y su fibración de Milnor asociada.

Definición 3.7. La *conexión de Gauss-Manin* en $'\mathcal{H}^{(0)}$ está dada por el mapeo:

$$\mathcal{D} := \partial_t : '\mathcal{H}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{H}^{(0)} \tag{2}$$

$$[df \wedge (Adz_0 + Bdz_1)] \longmapsto [d(Adz_0 + Bdz_1)],$$

donde d denota la derivada exterior de formas diferenciales, a saber,

$$d(Adz_0 + Bdz_1) = \left(\frac{\partial B}{\partial z_0} - \frac{\partial A}{\partial z_1} \right) dz_0 \wedge dz_1.$$

Se tiene que $\mathcal{D} = \partial_t$ es una transformación \mathbb{C} -lineal que cumple la regla de Leibniz,

$$\mathcal{D}(gm) = \frac{dg}{dt}m + g\mathcal{D}(m), \quad \forall g \in \mathbb{C}\{t\}, \forall m \in '\mathcal{H}^{(0)}.$$

Ésta es llamada una *conexión del par* $('\mathcal{H}^{(0)}, \mathcal{H}^{(0)}) = (E, F)$. Luego, de [Ku1998, pág. 20] se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.8. *Sea $\mathcal{D} : E \rightarrow F$ la conexión para el par de $\mathbb{C}\{t\}$ -módulos (E, F) . Tenemos que $\dim_{\mathbb{C}} \frac{F}{E} < \infty$. Entonces $S^{-1}E = E \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}] = F \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}] = S^{-1}F$. Más aún, si definimos $M := S^{-1}E = S^{-1}F$, entonces el operador \mathcal{D} se extiende a M de tal manera que $\forall s \in E$ y $\forall k \in \mathbb{Z}$*

$$\mathcal{D} \left(s \otimes \frac{1}{t^k} \right) = \mathcal{D}(s) \otimes \frac{1}{t^k} - s \otimes \frac{k}{t^{k+1}}.$$

La transformación \mathbb{C} -lineal $\mathcal{D} : M \rightarrow M$ es llamada una *conexión meromorfa* para el par de $\mathbb{C}\{t\}$ -módulos (E, F) .

3.4. Descripción explícita de la Conexión de Gauss-Manin

Por el lema 3.8, dado un germen casihomogéneo de curva plana $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ con singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^2$, el operador ∂_t dado por ecuación (2) se extiende a una conexión meromorfa definida en su localización $\mathcal{H}^{(0)} \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$. Esto es, se tiene un operador

$$\partial_t : \mathcal{H}^{(0)} \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}] \rightarrow \mathcal{H}^{(0)} \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}],$$

el cual es llamado *la conexión de Gauss-Manin*. Esta conexión se puede determinar explícitamente, usando la acción del operador multiplicación por t , es decir, $t: v \mapsto t \cdot v$ y su inverso dado por $t^{-1}: v \mapsto [\frac{1}{t}v]$. En efecto, como $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ es casihomogéneo, se cumple la identidad de Euler, $f = z_0 w_0 f_0 + z_1 w_1 f_1$, donde w_0, w_1 son los pesos de f , $f_0 = \frac{\partial f}{\partial z_0}$ y $f_1 = \frac{\partial f}{\partial z_1}$. Sea $T = df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$. Entonces,

$$\begin{aligned} f \cdot (cdz_0 \wedge dz_1 + T) &= f \cdot (cdz_0 \wedge dz_1) + f \cdot T \\ &= f \cdot (cdz_0 \wedge dz_1) + T = (z_0 w_0 f_0 + z_1 w_1 f_1)cdz_0 \wedge dz_1 + T \\ &= (z_0 w_0 f_0 c + z_1 w_1 f_1 c)dz_0 \wedge dz_1 + T \\ &= \begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ -z_1 w_1 c & z_0 w_0 c \end{vmatrix} dz_0 \wedge dz_1 + T. \end{aligned}$$

Esto es,

$$t \cdot (cdz_0 \wedge dz_1 + T) = df \wedge [(-w_1 z_1 c)dz_0 + (w_0 z_0 c)dz_1] + T \in {}'\mathcal{H}^{(0)}. \quad (3)$$

Por la ecuación (3), para toda $v = adz_0 \wedge dz_1 + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} \in \mathcal{H}^{(0)}$ se tiene que

$$f \cdot v = df \wedge \eta + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} \in {}'\mathcal{H}^{(0)}, \quad \eta = (-w_1 z_1 a)dz_0 + (w_0 z_0 a)dz_1 \in \Omega_{\mathbb{C}^2, 0}^1. \quad (4)$$

Podemos entonces aplicar ∂_t a $[df \wedge \eta]$ obteniendo:

$$\partial_t([df \wedge \eta]) = [d(\eta)] = [d((-w_1 z_1 a)dz_0 + (w_0 z_0 a)dz_1)].$$

Por otra parte, ∂_t cumple la regla de Leibniz, y por lo tanto,

$$\partial_t(fv) = \partial_t(t \cdot v) = t' \cdot v + t \cdot \partial_t(v) = v + t \cdot \partial_t(v),$$

es decir,

$$\partial_t(v) = -\frac{1}{t} \cdot v + \frac{1}{t} \cdot \partial_t(t \cdot v) = -\frac{1}{t} \cdot v + \frac{1}{t} \cdot [d(\eta)].$$

Entonces, la conexión (meromorfa) de Gauss-Manin ∂_t está determinada por la fórmula:

$$\partial_t(v) = -\frac{1}{t} \cdot v + \frac{1}{t} \cdot [d(\eta)],$$

para cada $v \in \mathcal{H}^{(0)}$, donde η se elige de tal forma que la ecuación (4) es válida.

En particular, para un básico $[z^m dz] = z^m dz + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ (ver teoremas 2.10 y 3.6), donde $z^m dz = z_0^{m_0} z_1^{m_1} dz_0 \wedge dz_1$, se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_t([z^m dz]) &= \frac{1}{t} \cdot (-[z^m dz] + [d(\eta)]) = \frac{1}{t} \cdot \left(-[z^m dz] + \left[\left(\sum_{j=0}^1 \frac{\partial(w_j z_0^{m_0} z_1^{m_1})}{\partial z_j} \right) dz \right] \right) \\ &= \frac{1}{t} \cdot \left(-[z^m dz] + \left[\left(\sum_{j=0}^1 w_j (m_j + 1) \right) z^m dz \right] \right) \\ &= \frac{a(m)}{f} [z^m dz], \end{aligned}$$

$$\text{donde } a(m) := \left(\sum_{j=0}^1 w_j (m_j + 1) \right) - 1.$$

Entonces, se tiene el siguiente resultado (cf. [Ku1998, pág. 29]):

Proposición 3.9. *Para un germen de singularidad aislada $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ casi-homogéneo de grado 1 y pesos w_0, w_1 , el operador*

$$t \cdot \partial_t : \mathcal{H}^{(0)} \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}] \rightarrow \mathcal{H}^{(0)} \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}],$$

tiene al conjunto $\mathcal{B} = \{[z^m dz] : m \in \Lambda\}$, donde $[z^m dz] := z^m dz + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$, como base de vectores propios con valores propios asociados de acuerdo con la ecuación:

$$t \cdot \partial_t([z^m dz]) = a(m)[z^m dz],$$

donde la acción de t consiste en multiplicar por f los representantes y tomar su clase de formas diferenciales en la retícula de Brieskorn.

Definición 3.10. Denotaremos como $\mathcal{C}_{a(m)}$ al \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión 1 generado por $[z^m dz]$, donde $[z^m dz] := z^m dz + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$, $\forall m \in \Lambda$.

Nota 3.11. Notar que en cada \mathcal{C}_α con $\alpha \in \{a(m) : m \in \Lambda\}$, $\partial_t \bullet = a(m) \frac{1}{t} \bullet$, es decir, el operador ∂_t es invertible con inverso tal que en los espacios $\mathcal{C}_{a(m)-1}$ con $a(m) - 1 > -1$, $\partial_t^{-1} \bullet = \frac{1}{a(m)} t \bullet$.

3.5. Filtraciones \mathcal{V}^\bullet y $\mathcal{V}^{>\bullet}$ en la localización \mathcal{M}

Usando los espacios $\mathcal{C}_{a(m)}$ y el mapeo inverso ∂_t^{-1} con la propiedad dada por la nota 3.11, se puede obtener una descomposición refinada de la localización de la retícula de Brieskorn $\mathcal{M} := \mathcal{H}^{(0)} \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$. En efecto, tenemos que

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{a(m), m \in \Lambda} \mathbb{C} \cdot t^k \cdot e_m, \quad \text{donde } e_m := [z^m dz] = z^m dz + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}.$$

Definimos, por lo tanto, $C_{a(m)+k} := \mathbb{C} \cdot t^k \cdot e_m$, el cual es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión 1, cuyos elementos los denotaremos por $S_{a(m)+k}$.

Definición 3.12. Dado $s = \sum_{k, a(m)} S_{a(m)+k} \in \mathcal{M}$, su orden es el número racional $q(s) := \min\{a(m) + k : S_{a(m)+k} \neq 0\}$.

Por otra parte, se tiene una función de orden $ord : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por $ord(s) = \mathfrak{q}(s)$.

Ahora bien, definimos

$$\mathcal{V}^\beta \mathcal{M} := \mathcal{V}^\beta := \{s \in \mathcal{M} : \mathfrak{q}(s) \geq \beta\} = \bigoplus_{\beta \leq a(m)+k, k \in \mathbb{Z}} C_{a(m)+k},$$

$$\mathcal{V}^{>\beta} \mathcal{M} := \mathcal{V}^{>\beta} := \{s \in \mathcal{M} : \mathfrak{q}(s) > \beta\} = \bigoplus_{\beta < a(m)+k, k \in \mathbb{Z}} C_{a(m)+k}.$$

Tenemos entonces las siguientes filtraciones sobre \mathcal{M} :

- \mathcal{V}^\bullet -filtración: $\dots \subseteq \mathcal{V}^{\beta+1} \subseteq \mathcal{V}^\beta \subseteq \mathcal{V}^{\beta-1} \subseteq \dots$;
- $\mathcal{V}^{>\bullet}$ -filtración: $\dots \subseteq \mathcal{V}^{>\beta+1} \subseteq \mathcal{V}^{>\beta} \subseteq \mathcal{V}^{>\beta-1} \subseteq \dots$.

El módulo graduado asociado es $Gr_{\mathcal{V}}^* \mathcal{M} := \{Gr_{\mathcal{V}}^\beta \mathcal{M}\}$, donde $Gr_{\mathcal{V}}^\beta \mathcal{M} := \frac{\mathcal{V}^{\beta > \beta}}{\mathcal{V}^\beta} \approx C_\beta$.

4. Espectro y su invarianza bajo deformaciones μ -constantes

4.1. Espectro para un germen de curva plana

Tomando $n = 1$, sea Λ como en los teoremas 2.10 y 3.6, y la proposición 3.9 (cf. [F2021]). Para $p = 0, 1$, considérese

$$\begin{aligned} \Lambda_p &:= \{m \in \Lambda : n - p - 1 < a(m) \leq n - p\} \\ &= \{m \in \Lambda : -p < a(m) \leq 1 - p\}, \\ \Lambda_{\geq 0} &:= \Lambda_0 \cup \Lambda_1. \end{aligned}$$

Ahora bien, definimos $\eta_m := \partial_t^{1-p} [e_m]$, para cada $m \in \Lambda$. Por lo tanto, por definición, se tiene el siguiente resultado.

Lema 4.1. Si $m \in \Lambda_p$, entonces $\eta_m \in C_{\alpha(m)} := \partial_t^{1-p} \mathcal{C}_{a(m)}$, con $-1 < \alpha(m) \leq 0$, $\alpha(m) = a(m) - (1 - p)$.

Definición 4.2. Definimos $\mathcal{C} := \bigoplus_{m \in \Lambda} \mathbb{C} \cdot \eta_m$, $\eta_m := \partial_t^{1-p} [z^m dz]$ y $F^p \mathcal{C} := \bigoplus_{m \in \Lambda_{\geq p}} \mathbb{C} \cdot \eta_m$.

Los espacios $F^p \mathcal{C}$ satisfacen $F^{p+1} \mathcal{C} \subset F^p \mathcal{C}$, y por lo tanto, determinan una filtración sobre $\mathcal{C} = \bigoplus_{m \in \Lambda} \mathbb{C} \cdot \eta_m$:

$$\mathcal{C} = F^0 \mathcal{C} \supset F^1 \mathcal{C} \supset F^2 \mathcal{C} = \{0\},$$

la cual es llamada la “filtración de Hodge”.

Directamente, a partir de la definición de la filtración de Hodge y de (1), se puede obtener la demostración del siguiente resultado, la cual se puede consultar en [F2021, pág. 93] para $n \geq 1$ (cf. [Ku1998, pág. 116] para ver un resultado más general).

Lema 4.3. Si $p = 0, 1$, entonces

$$\bigoplus_{-1 < \alpha(m) \leq 0} Gr_F^p C_{\alpha(m)} \approx \bigoplus_{m \in \Lambda_p} \mathbb{C} \cdot [z^m dz] = \bigoplus_{-1 < \alpha(m) \leq 0} Gr_V^{\alpha(m)+1-p} A_f.$$

En general, el espectro $sp(f)$ se define con la filtración de Hodge, ver [Ku1998, pág. 116]. La siguiente es una forma alternativa para dicha definición, en la que se usa el lema 4.3, y consiste en basarse en el enfoque de A. N. Varchenko a través de expansiones asintóticas de periodos de integrales (ver [AVG2012]):

Definición 4.4. El *espectro de f* se define como

$$sp(f) := \left\{ \alpha(m) + (1 - p) : Gr_V^{\alpha(m)+1-p} A_f \neq 0, m \in \Lambda_p, p = 0, 1 \right\}.$$

Asimismo, la multiplicidad de cada $\beta \in sp(f)$ es la dimensión $d_\beta := \dim_{\mathbb{C}} \left(Gr_V^\beta A_f \right)$.

De la proposición 3.9, se tiene que cada $a(m)$ está dado por

$$a(m) = \left(\sum_{j=0}^1 w_j (m_j + 1) \right) - 1.$$

Por lo tanto, explícitamente,

$$sp(f) = \left\{ \left(\sum_{j=0}^1 w_j (m_{k,j} + 1) \right) - 1 : m_k := (m_{k,0}, m_{k,1}, \dots, m_{k,n}) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}, k = 1, \dots, \mu(f) \right\}, \quad (5)$$

donde w_0, w_1 son los pesos de f y los monomios $z^{m_k} + J_f$ forman una base para A_f (ver teorema 2.10). Además, se tiene la validez de la fórmula de Morihiko Saito (ver [Ku1998, pág. 121]):

$$\tilde{sp}(f) = t(t^{a(m_1)} + \dots + t^{a(m_{\mu(f)})}) \quad (6)$$

$$= t^{a(m_1)+1} + \dots + t^{a(m_{\mu(f)})+1}, \quad (7)$$

donde $a(m_k) \in sp(f), k = 1, \dots, \mu(f)$, y $\tilde{sp}(f) = \prod_{j=0}^1 \frac{t^{w_j} - t}{1 - t^{w_j}}$.

Una propiedad muy importante del espectro es la siguiente, para una demostración, ver [Ku1998, pág. 118] y [Her2002-2, pág. 172].

Proposición 4.5. Para un germen casihomogéneo de singularidad aislada de curva plana $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, los números espectrales $\beta \in sp(f)$ satisfacen las siguientes propiedades:

i) Si $d_\beta \neq 0$ entonces $-1 < \beta < 1$. Esto es, $sp(f) \subset (-1, 1)$.

²Usualmente se denota esta propiedad como $\tilde{sp}(f) = sp(f) + 1$.

ii) Propiedad de simetría en las multiplicidades: $d_{-\beta} = d_{\beta}$.

iii) Para cada $i = 1, \dots, \mu(f)$: $\alpha_i = -\alpha_{\mu+1-i}$.

Ejemplo 4.6. Consideremos a $f(x, y) = x^3 + y^4$. Notemos que $f(\lambda^{\frac{1}{3}}x, \lambda^{\frac{1}{4}}y) = \lambda x^3 + \lambda y^4 = \lambda f(x, y)$. Esto es, f es casihomogéneo de grado $d = 1$ con pesos $w_0 = \frac{1}{3}$ y $w_1 = \frac{1}{4}$. Veamos cómo se calcula el $sp(f)$, primero usando la ecuación (5) y después con la fórmula de Morihiko Saito (6). En efecto,

- Usando la fórmula (5): Como $f_x = 3x^2$ y $f_y = 4y^3$, $J_f = \langle 3x^2, 4y^3 \rangle = \langle x^2, y^3 \rangle$. Así,

$$A_f = \langle 1 + J_f, x + J_f, y + J_f, y^2 + J_f, xy + J_f, xy^2 + J_f \rangle.$$

De donde observamos que los multiexponentes de cada básico son:

$$m_1 = (0, 0), m_2 = (1, 0), m_3 = (0, 1), m_4 = (0, 2), m_5 = (1, 1), m_6 = (1, 2).$$

Por la ecuación (5), los números espectrales de f están dados por:

$$a(m_1) = \frac{1}{3}(0+1) + \frac{1}{4}(0+1) - 1, \quad a(m_2) = \frac{1}{3}(1+1) + \frac{1}{4}(0+1) - 1,$$

$$a(m_3) = \frac{1}{3}(0+1) + \frac{1}{4}(1+1) - 1, \quad a(m_4) = \frac{1}{3}(0+1) + \frac{1}{4}(2+1) - 1,$$

$$a(m_5) = \frac{1}{3}(1+1) + \frac{1}{4}(1+1) - 1, \quad a(m_6) = \frac{1}{3}(1+1) + \frac{1}{4}(2+1) - 1.$$

En consecuencia,

$$sp(f) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1, & \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - 1, & \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - 1, \\ \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - 1, & \frac{2}{3} + \frac{2}{4} - 1, & \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - 1 \end{array} \right\} \\ = \left\{ -\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, -\frac{2}{12}, \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{5}{12} \right\}.$$

- Usando la fórmula de Morihiko Saito dada en (6):

$$\tilde{sp}(f) = \prod_{j=0}^1 \frac{t^{w_j} - t}{1 - t^{w_j}} = \frac{(t^{\frac{1}{3}} - t)(t^{\frac{1}{4}} - t)}{(1 - t^{\frac{1}{3}})(1 - t^{\frac{1}{4}})} = t \left(t^{-\frac{5}{12}} + t^{-\frac{2}{12}} + t^{-\frac{1}{12}} + t^{\frac{1}{12}} + t^{\frac{2}{12}} + t^{\frac{5}{12}} \right).$$

De donde, $sp(f) = \frac{\tilde{sp}(f)}{t} = t^{-\frac{5}{12}} + t^{-\frac{2}{12}} + t^{-\frac{1}{12}} + t^{\frac{1}{12}} + t^{\frac{2}{12}} + t^{\frac{5}{12}}$. Por tanto, obtenemos los mismos números espectrales.

4.2. Deformaciones μ -constantes

Para $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen de función holomorfa con singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^2$, consideramos el anillo de gérmenes en 0, $\mathcal{O}_{V,0}$, en la bola de Milnor suficientemente pequeña V dada por la fibración de Milnor asociada a f , ver teorema 3.1 y nota 3.2.

Ahora bien, dos gérmenes f y g con singularidad aislada en 0 tienen números de Milnor $\mu(f)$ y $\mu(g)$ finitos. Más aún, si además f y g son R -equivalentes, entonces por la proposición 2.5 las álgebras de Milnor son isomorfas como \mathbb{C} -espacios vectoriales: $A_f \approx A_g$. Por lo tanto, se sigue que $\mu(f) = \mu(g)$, es decir, bajo R -equivalencia el número de Milnor es constante.

Definición 4.7.

1. Una deformación del germen $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ con base en $M \subset \mathbb{C}^k$, es un germen en 0 de una función $F: (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ con la propiedad de que $F(x, 0) = f(x)$, para cada $x \in \mathbb{C}^2$ con $0 \in M \subset \mathbb{C}^k$. Una deformación de f la denotaremos simplemente como F_y , variando $y \in M$.
2. Una deformación F_y se dice ser μ -constante siempre que $\mu(F_y) = \mu(f) =: \mu$, para toda $y \in M \subset \mathbb{C}^k$.

4.21. Algoritmos para la determinación de deformaciones μ -constantes

En este apartado se describirán dos algoritmos que permiten determinar deformaciones μ -constantes. Los resultados se encuentran en un contexto mas general, pero en nuestro caso nos restringimos a dos dimensiones, es decir, gérmenes de curvas planas.

A continuación, siguiendo [Ku1998, pág. 148], se describe el primer algoritmo. Aquí asumiremos que el germen de interés tiene un representante dado por un polinomio $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ casihomogéneo de tipo $w = (w_0, w_1) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^2$, grado $d = 1$ y $\mu := \mu(f)$:

Algoritmo 4.1. μ -deformación: V. S. Kulikov

- a) Sean $x^l = x_0^{l_0} x_1^{l_1}$ un monomio y $\mathbf{m} = x^l + J_f$ su clase en álgebra de Milnor A_f . Consideremos grado pesado³ \deg_w tal que

$$\deg_w(x^l) := \nu(x^l) := w_0 l_0 + w_1 l_1.$$

- b) Calculemos una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{m}_i = m_i + J_f : i = 1, \dots, \mu\}$ para el álgebra de Milnor \mathcal{O}_f .

- c) Supongamos que se tienen los números ordenados

$$\nu(m_1) \leq \nu(m_2) \leq \dots \leq \nu(m_\mu).$$

Definamos

$$k := \min\{i : i = 1, \dots, \mu : \nu(m_i) > 1\}.$$

Entonces, una deformación μ -constante para f está dada por

$$F_\lambda^\mu(x) := f(x) + \sum_{j=k}^{\mu} \lambda_j m_j, \quad \lambda = (\lambda_k, \dots, \lambda_\mu) \in \mathbb{C}^{\mu-k}. \quad (8)$$

³Es decir, aquel definido de tal manera que se pueden graduar el anillo de polinomios (salvo coordenadas) $\mathbb{C}[x_0, x_1] \simeq \bigoplus_{d \in \mathbb{Q}_{\geq 0}} \mathbb{C}[x_0, x_1]_d$ y de forma análoga el anillo de series de potencias convergentes $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} \simeq \mathbb{C}\{x_0, x_1\}$.

Para simplificar la exposición, en el apéndice B.1 nos limitamos a resaltar los puntos importantes del pegado de fibraciones de Milnor y objetos asociados, en los que se soporta la construcción del mapeo de periodos asociado la deformación F_y dada en (8), lo cual se desarrolla en la sección 6.

Ahora bien, siguiendo [Her2002-1] obtenemos otro método para encontrar una deformación μ -constante para el caso cuando el germen $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es casihomogéneo de tipo $w = (w_0, w_1)$ con $\mu = \mu(f)$, cuyos pesos son tales que $0 < w_j \leq \frac{1}{2}$ para cada $j = 0, 1$, y su grado es $d = 1$. En efecto, primeramente se tiene que el espectro esta determinado por la expresión formal:

$$\sum_{i=1}^{\mu(f)} t^{\alpha_i+1} := \left(\frac{t - t^{w_0}}{t^{w_0} - 1} \right) \left(\frac{t - t^{w_1}}{t^{w_1} - 1} \right),$$

donde los $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, \mu(f)$ son los *números espectrales* de f ordenados de la siguiente manera

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_\mu.$$

En estos términos, se tiene el siguiente algoritmo.

Algoritmo 4.2. μ -deformación: C. Hertling

a1) Sean $x^l = x_0^{l_0} x_1^{l_1}$ un monomio y $\mathfrak{m} = x^l + J_f$ su clase en álgebra de Milnor. Consideremos el grado pesado \deg_w tal que

$$\deg_w(x^l) := \nu(x^l) := w_0 l_0 + w_1 l_1.$$

b1) Calculemos una base $\mathcal{B} = \{\mathfrak{m}_i = m_i + J_f : i = 1, \dots, \mu\}$ para el álgebra de Milnor \mathcal{O}_f , tales que⁴ $\nu(m_i) = \alpha_i - \alpha_1$, para cada $i = 1, \dots, \mu$.

c1) Supongamos que

$$\nu(m_1) \leq \nu(m_2) \leq \dots \leq \nu(m_\mu).$$

Para $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, definamos

$$\nu(\lambda_i) = 1 - \nu(m_i) \text{ y } k := \min\{i : \nu(m_i) \geq 1, i = 1, \dots, \mu\}.$$

Entonces, una deformación μ -constante para f está dada por

$$G_{\tilde{\lambda}}^\mu(x) := f(x) + \sum_{j=k}^{\mu} \lambda_j m_j, \quad \lambda = (\lambda_k, \dots, \lambda_\mu) \in \mathbb{C}^{\mu-k}. \quad (9)$$

Ejemplo 4.8. Para este ejemplo se utiliza el algoritmo 4.1.

Consideremos el polinomio $f = x^3 + y^7 + z^2$ casihomogéneo de tipo $w = (\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{2})$. Las derivadas parciales de f son $f_x = 3x^2$, $f_y = 7y^6$, $f_z = 2z$. En consecuencia, el

⁴Es decir, cada monomio se elige con respecto a la graduación pesada $\mathbb{C}[x_0, x_1] \simeq \bigoplus_{d \in \mathbb{Q}_{\geq 0}} \mathbb{C}[x_0, x_1]_d$, de tal manera que $m_i \in \mathbb{C}[x_0, x_1]_{d_i}$, con $d_i = \nu(m_i)$ para cada $i = 1, \dots, \mu$.

álgebra de Milnor para f es $A_f = \frac{\mathbb{C}\{x, y, z\}}{\langle x^2, y^6, z \rangle}$. Por lo tanto, el número de Milnor es $\mu = 12$ y una base para A_f está dada por $\mathcal{B} = \{m_j + J_f: j = 1, \dots, \mu\}$, con representantes monomiales

$$m_j \in \{1, x, y, xy, y^2, xy^2, y^3, xy^3, y^4, xy^4, y^5, xy^5\}.$$

Los grados pesados para cada monomio están dados en la siguiente tabla:

m_j	1	x	y	xy	y^2	xy^2	y^3	xy^3	y^4	xy^4	y^5	xy^5
$\nu(m_j)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{13}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{19}{21}$	$\frac{5}{7}$	$1 + \frac{1}{21}$

Notemos que casi todos los monomios tienen grado pesado menor que 1, salvo xy^5 que tiene grado $1 + \frac{1}{21}$. Así, una μ -deformación para $f = x^3 + y^7 + z^2$ está dada por:

$$F_\lambda(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda xy^5 = x^3 + y^7 + z^2 + \lambda xy^5, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ejemplo 4.9. En este caso se usa el algoritmo 4.2. Consideremos a $f = x^4 + y^4$ polinomio casihomogéneo de tipo $w = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Notemos que $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$. Así, $A_f = \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle x^3, y^3 \rangle}$. Por lo tanto, $\mu = 9$ y una base para A_f es dada por $\mathcal{B} = \{m_j + J_f: j = 1, \dots, \mu\}$ con

$$m_j \in \{1, x, x^2, y, y^2, xy, xy^2, x^2y, x^2y^2\}, \quad j = 1, \dots, 9.$$

En la siguiente tabla presentamos los órdenes pesados para cada monomio de la base A_f :

m_j	1	x	y	xy	x^2	y^2	xy^2	x^2y	x^2y^2
$\nu(m_j)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

Los números espectrales para f son:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}, \alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{1}{4}, \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0, \alpha_7 = \alpha_8 = \frac{1}{4}, \alpha_9 = \frac{1}{2}.$$

De donde podemos observar que $\nu(m_j) = \alpha_j - \alpha_1, j = 1, \dots, 9$, en efecto:

$$\begin{aligned} \nu(1) &= 0 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha_1 - \alpha_1, \\ \nu(x) &= \nu(y) = \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha_{2,3} - \alpha_1, \\ \nu(xy) &= \nu(x^2) = \nu(y^2) = \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha_{4,5,6} - \alpha_1, \\ \nu(xy^2) &= \nu(x^2y) = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha_{7,8} - \alpha_1, \\ \nu(x^2y^2) &= 1 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha_9 - \alpha_1. \end{aligned}$$

Notemos que el único monomio que tiene grado pesado mayor igual que uno es x^2y^2 . Por lo cual, una μ -deformación para $f = x^4 + y^4$ es

$$G_\lambda^\mu(x, y) = f(x, y) + \lambda x^2 y^2 = x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2,$$

con base $M = \mathbb{C} \setminus \{-2, 2\}$.

El siguiente resultado se sigue de resultados más generales de A. N. Varchenko, dados para varias dimensiones y gérmenes no necesariamente casihomogéneos (ver [Ku1998, pág. 132]).

Teorema 4.10. *El espectro de un germen de singularidad aislada de curva plana casihomogénea $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es invariante bajo una deformación μ -constante de f .*

5. Secciones geométricas del haz vectorial cohomológico

5.1. Residuo de Leray

Para los resultados presentados en este apartado, seguiremos [We1998] y [We2005] (cf. [Zo2006, pág. 123]). Sea W una hipersuperficie no singular en \mathbb{C}^2 dada por

$$W = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : h(z_0, z_1) = 0\},$$

donde h es una función holomorfa y su diferencial satisface la condición $dh(z) \neq 0$, para todo $z \in W$. Por otra parte, consideremos una 2-forma holomorfa con un polo simple (de a lo más de orden 1) a lo largo de W , $\tilde{\omega} \in \Omega^2(\mathbb{C}^2 \setminus W)$. Esto es, la forma diferencial que se obtiene al multiplicar $\tilde{\omega}$ por h , $h \cdot \tilde{\omega}$, es holomorfa en el germen $(\mathbb{C}^2, 0)$. Entonces, se tiene el siguiente resultado, que es una generalización del “lema de división de de Rham” para el caso de singularidades aisladas (ver [de-Rham1954], [KSaito1976], y cf. [Ku1998, pág. 18]).

Proposición 5.1. *Si $\tilde{\omega}$ es cerrada, entonces existe una representación en coordenadas locales para $\tilde{\omega}$, dada por*

$$\tilde{\omega} = \frac{dh}{h} \wedge \eta + \theta,$$

donde η y θ son una 1-forma y una 2-forma holomorfas en W , respectivamente. Además, la clase $[\eta]$ está bien definida en $H^1(W, \mathbb{C})$.

Definición 5.2. La 1-forma η dada en la proposición 5.1 se llamará residuo de Leray de la forma ω y será denotado por $Res_W \omega$. En notación clásica se denota este residuo como $\frac{\omega}{dh} \Big|_W$.

Ejemplo 5.3. Sea $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen de singularidad aislada de curva plana. Consideremos $F := f - t$, con $t \in \mathbb{C}$ constante. Por lo tanto, la diferencial de F está dada por

$$dF = df = f_{x_0} dx_0 + f_{x_1} dx_1,$$

donde $f_{x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}$, $0 \leq k \leq 1$. Supongamos que $f_{x_1} \neq 0$. Entonces,

$$dx_1 = \frac{1}{f_{x_1}} f_{x_1} dx_1 + \frac{1}{f_{x_1}} (f_{x_0} dx_0 - f_{x_0} dx_0) = \frac{1}{f_{x_1}} (df - f_{x_0} dx_0).$$

Consideremos la 2-forma $\omega = \frac{1}{F} dx_0 \wedge dx_1$. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{F} dx_0 \wedge \left(\frac{1}{f_{x_1}} (df - f_{x_0} dx_0) \right) \\ &= -\frac{1}{F} \left(\frac{1}{f_{x_1}} df \right) \wedge dx_0 + \frac{1}{F} \left(\frac{1}{f_{x_1}} f_{x_0} dx_0 \right) \wedge dx_0 \\ &= \frac{dF}{F} \wedge \left(-\frac{1}{f_{x_1}} \right) dx_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el residuo de Leray de la 2-forma ω es $Res \omega = -\frac{1}{f_{x_1}} dx_0$. Siguiendo un procedimiento análogo, si $f_{x_0} \neq 0$, entonces se tiene que $Res \omega = \frac{1}{f_{x_0}} dx_1$. De acuerdo con la proposición 5.1, estos dos residuos determinan una única clase de cohomología en $H^1(W, \mathbb{C})$, que es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión $\mu = \mu(f)$, donde $W = V_t$, con $V_t := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : F(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = t\}$, para $0 < |t| \ll 1$, lo cual es factible de acuerdo con el teorema⁵ 3.1.

Ejemplo 5.4. En el tenor del ejemplo anterior, sea $f = y^2 - x^3$ y $F = f - t$, con $t \in \mathbb{C} - \{0\}$ constante. Consideremos $\omega = \frac{1}{f} dx \wedge dy$. Notemos que

$$df = -3x^2 dx + 2y dy = 0 \text{ si y solo si } (x, y) = 0.$$

i) Si $x \neq 0$, entonces $f_x = -3x^2 \neq 0$. Por lo tanto, $Res \omega = -\frac{1}{3x^2} dy$, ya que

$$\omega = \frac{1}{f} dx \wedge dy = \frac{df}{f} \wedge \left(-\frac{1}{3x^2} \right) dy.$$

ii) Si $y \neq 0$, entonces $f_y = 2y \neq 0$. Por lo tanto, $Res \omega = -\frac{1}{2y} dx$.

$$\omega = \frac{1}{f} dx \wedge dy = \frac{df}{f} \wedge \left(-\frac{1}{2y} \right) dx.$$

De acuerdo con la proposición 5.1, estos dos residuos determinan una única clase de cohomología en $H^1(W, \mathbb{C})$, que es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión $\mu = 2$, donde

⁵En efecto, pues este teorema se puede combinar con la proposición 3.3 vía el teorema 2.8 de determinación finita.

$W = C_t$, con $C_t := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x^3 + t\}$ la parte afín (es decir, un toro sin un punto, ver figura 1) de una curva elíptica⁶ pues $t \neq 0$.

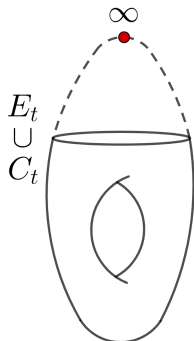


Figura 1. C_t como la parte afín de una curva elíptica.

5.2. Haz vectorial (co)homológico asociado a la fibración de Milnor

Los resultados presentados en esta sección se pueden consultar en las referencias clásicas [AVG2012] y [Her2002-2] en un contexto más general al de singularidades aisladas de curva plana, aunque en el presente manuscrito, nos basamos principalmente en [Zo2006, pág. 140].

En efecto, consideremos $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen de singularidad aislada en el origen, cuya fibración de Milnor está dada como en el teorema 3.1. Definimos las curvas de nivel para f como $V_t := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z, w) = t\}$ para cada $t \neq 0$ en un disco agujerado suficientemente pequeño que de aquí en adelante denotaremos como $\Delta^* := D_\delta(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Notamos que las hipersuperficies V_t son variedades \mathcal{C}^∞ con frontera regular.

⁶En efecto, se tiene que $E_t := \{(x : y : z) : \tilde{F}(x : y : z) = 0\}$ es una variedad proyectiva (compleja) 1-dimensional (cf. [Varčenko1982]). Aquí \tilde{F} es la homogeneización del polinomio $F = f - t$:

$$\tilde{F}(x, y, z) := z^3 \left(f \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) - t \right) = zy^2 - x^3 - z^3t.$$

Por lo tanto, dado $t \neq 0$, consideramos el abierto $U_2 = \{(x : y : z) \in \mathbb{CP}^2 : z \neq 0\}$ de \mathbb{CP}^2 , tal que

$$E_t \cap U_2 \approx \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : F(x, y, 1) = f(x, y) - t = 0\} = C_t.$$

Luego, se tiene que $C_t \hookrightarrow E_t \hookrightarrow \mathbb{CP}^2$.

Ahora bien, se tienen dos haces vectoriales holomorfos de rango μ con funciones de transición localmente constantes. A decir, los *haces vectoriales homológico y cohomológico*⁷, $\pi_1: \underline{H} \rightarrow \Delta^*$ y $\pi_2: \underline{H}^* \rightarrow \Delta^*$, donde

$$\underline{H} = \bigsqcup_{t \in \Delta^*} H_1(V_t, \mathbb{C}) \text{ y } \underline{H}^* = \bigsqcup_{t \in \Delta^*} H^1(V_t, \mathbb{C}),$$

respectivamente, los cuales tienen como fibras a los \mathbb{C} -espacios vectoriales dados por el primer grupo de homología $\underline{H}_t = H_1(V_t, \mathbb{C})$, $t \in \Delta^*$ y de cohomología $\underline{H}_t^* = H^1(V_t, \mathbb{C})$, $t \in \Delta^*$, respectivamente. Las aplicaciones π_j están dadas por las proyecciones canónicas.

5.3. Lema de Morse

Sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en una vecindad $U \subset \mathbb{C}^2$ de w_* .

Definición 5.5. El punto w_* es un *punto crítico no degenerado* si y solo si las derivadas parciales de f satisfacen

$$\frac{\partial f(z_0, z_1)}{\partial z_j}(w_*) = 0, \quad j = 0, 1$$

y el determinante de la matriz Hessiana evaluada en w_* , $\det(\text{Hess}f(w_*))$, es distinto de cero.

El siguiente resultado se puede consultar en [Zo2006, pág. 4].

Proposición 5.6 (Lema de Morse). *Si z_0 es un punto crítico no degenerado de la función f , entonces existe un cambio de coordenadas holomorfas $(w_1, w_2) = w = \phi(z)$, con $\phi(0) = z_0$, tal que f es R -equivalente a un polinomio cuadrático:*

$$f(\phi(w)) = f(z_0) + w_1^2 + w_2^2.$$

5.4. Sistema de ciclos evanescentes

Dado un germen $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ con singularidad aislada en 0, podemos considerar una perturbación de Morse para f (*morsificación*) $\tilde{f} := f + \varepsilon L$, con L una transformación lineal, cuyos puntos críticos son todos de tipo Morse, los cuales denotaremos por $z_1, \dots, z_{\mu(f)}$ y sus valores críticos por $t_1, \dots, t_{\mu(f)}$, respectivamente. A continuación, se elige $t' \neq t_1, \dots, t_{\mu(f)}$ y consideramos trayectorias $\phi_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, tales que $\phi_i(0) = z_i$, $\phi_i(1) = t'$, con $i = 1, \dots, \mu(f)$, y ϕ_i no interseca a ϕ_k , para $i \neq k$.

Sea $B_\varepsilon \subset \mathbb{C}^2$ la bola de Milnor como en el teorema 3.1. El siguiente resultado puede consultarse en [Zo2006, pág. 62].

Proposición 5.7. *Sean $V_{t'} := f^{-1}(t') \cap B_\varepsilon$ y $\tilde{V}_{t'} := \tilde{f}^{-1}(t') \cap B_\varepsilon$. Entonces, $H_1(V_{t'}, \mathbb{C}) \simeq H_1(\tilde{V}_{t'}, \mathbb{C})$.*

⁷Este hecho se sigue indirectamente del teorema 3.1 y la proposición 3.3, vía el teorema de determinación finita 2.8.

Ahora bien, aplicando el lema de Morse para cada z_i , se tiene que existen vecindades U_i de cada punto crítico z_i en las cuales \tilde{f} se escribe como:

$$\tilde{f}(x, y) = t_i + x^2 + y^2.$$

Para r cercano a 0, definimos los ciclos $\Delta_i(r) = \sqrt{\phi_i(r) - z_i} S^1 \subset \tilde{V}_{\phi(r)}$, donde $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, \text{Im } x = \text{Im } y = 0\}$. Por la propiedad de prolongación de homotopía (ver [Zo2006, Lema en pág. 56]), podemos prolongar las esferas $\Delta_i(r) \subset V_{\phi(r)}$ sobre la trayectoria $\phi_i(r)$, de lo cual en particular se tiene un ciclo dado por $\Delta_i(1) \subset V_{t'}$, ver [Zo2006, pág. 62] y cf. [AVG2012, pág. 31].

Definición 5.8. Las clases de homología $\delta_i = \delta_{\phi_i} \in H_1(V_{t'}, \mathbb{C})$ definidas por las esferas $\Delta_i(1)$ son llamadas sistema distinguido de ciclos evanescentes (ver figura 2).

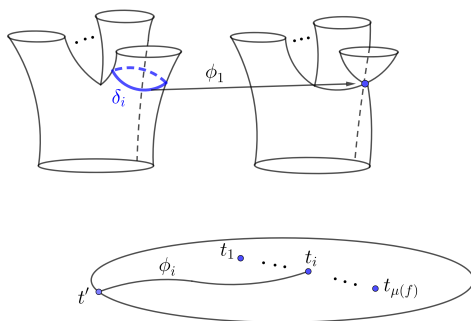


Figura 2. Trayectorias ϕ_i .

El siguiente resultado se puede consultar en [Zo2006, pág. 63].

Proposición 5.9 (Teorema de Milnor). *El sistema distinguido de ciclos evanescentes genera una base del grupo de homología $H_1(\tilde{V}_{t'}, \mathbb{C})$ y determina una base para el grupo de homología $H_1(V_{t'}, \mathbb{C})$.*

Ahora bien, sea $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}^2, 0}^2$ una 2-forma holomorfa y considérese t variando en una vecindad pequeña en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ centrada en cero. Consideremos la familia de formas diferenciales $\omega_t := \frac{\omega}{f - t}$ que tienen un polo simple a lo largo de V_t cuyo residuo de Leray esta dado por $\eta_t := \text{Res}_{V_t} \omega_t = \frac{\omega_t}{df} \Big|_{V_t}$, ver proposición 5.1 y definición 5.2. Denotemos por $[\eta_t]$ la clase de cohomología de la 1-forma residuo de Leray en $H^1(V_t, \mathbb{C})$.

Siguiendo [Zo2006, págs. 144–147] tenemos la siguiente definición.

Definición 5.10.

1. La familia de clases de cohomología $[\eta_t]$ definen una sección $s[\omega] : t \mapsto [\eta_t]$ del haz de cohomología de Milnor y es llamada sección geométrica para ω .

2. Las secciones geométricas $s[\omega]$ inducen una función analítica multivaluada con valores en ciclos evanescentes $\sigma(t)$ dada por:

$$t \mapsto \langle s[\omega](t), \sigma(t) \rangle = \int_{\sigma(t)} \eta|_{V_t}. \quad (10)$$

Por otra parte, se tiene que en cada sector de la forma $a < \arg(t) < b$, el apareamiento (periodos de integrales de “Malgrange”, cf. [Mal1974, pág. 415]) dado por (10) tiene una expansión asintótica de la forma

$$\langle s[\omega](t), \sigma(t) \rangle = \sum_{\alpha > -1} a_\alpha t^\alpha, \quad (11)$$

la cual, para cada α , determina una clase de cohomología $A_\alpha^\omega(t)$ en $H^1(V_t, \mathbb{C})$. En efecto, de la expansión (11) notamos que el mapeo

$$\langle A_\alpha^\omega(t), \bullet \rangle : H_1(V_t, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \sigma(t) \mapsto \langle A_\alpha^\omega(t), \sigma(t) \rangle := a_\alpha$$

es un funcional lineal, es decir, $\langle A_\alpha^\omega(t), \bullet \rangle \in \text{Hom}(H_1(V_t, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \approx H^1(V_t, \mathbb{C})$ que se corresponde con una sección del haz cohomológico de Milnor,

$$A_\alpha^\omega : \Delta^* \longrightarrow \underline{H}^*, \quad t \mapsto \langle A_\alpha^\omega(t), \bullet \rangle.$$

De esta manera, se tiene que la expansión (11) determina una sección

$$A_\alpha^\omega : \Delta^* \longrightarrow \underline{H}^*, \quad t \mapsto \langle A_\alpha^\omega(t), \bullet \rangle.$$

Por lo tanto, se tiene que la sección $s[\omega]$ tiene la forma “asintótica” explícita

$$s[\omega](t) = \sum_{\alpha} t^\alpha A_\alpha^\omega(t). \quad (12)$$

De forma general, para recuperar esta construcción, tenemos que dada una sección $A_\alpha : \Delta^* \longrightarrow \underline{H}_{\lambda_\alpha}^*$, definimos⁸ la *sección elemental* asociada (monovaluada)

$$s(A_\alpha, \alpha) : t \in \Delta_\delta^* \mapsto t^\alpha A_\alpha(t). \quad (13)$$

Entonces es así como se consiguen “ $\mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ -generadores” que expanden los elementos de la retícula de Brieskorn. En efecto, siguiendo [Her2002-2, pág. 171] se define el conjunto de gérmenes bajo el mapeo de tomar el germen de los residuos de Leray, los cuales tienen una condición de convergencia en sectores finitos de la forma $a < \arg(t) < b$:

$$H_0'' := \{s[\omega]_0 : [\omega] \in \mathcal{H}^{(0)}\}. \quad (14)$$

Por construcción, el mapeo $s[\bullet] : [\omega] \in \mathcal{H}^{(0)} \mapsto s[\omega]_0 \in H_0''$ es un isomorfismo.

⁸Aquí $\underline{H}_{\lambda_\alpha}^*$ denota el haz vectorial tal que para $t \in \Delta^*$, su fibra es el espacio propio para la transformación de Monodromía T en definición 5.11, $H^1(V_t, \mathbb{C})_{\lambda_\alpha}$ con $\lambda_\alpha = e^{-2\pi i \alpha}$.

5.5. Subespacios propios del Mapeo de Monodromía en cohomología

Consideremos un lazo $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Delta^*$ con $\gamma(0) = \gamma(1) = t'$ para algún $t' \in \Delta^*$ fijo, que recorre la circunferencia de radio $|t'| \ll 1$ en sentido antihorario. Por la propiedad cubriente de homotopía, γ genera una familia de difeomorfismos $\Gamma_s : V_{t'} \rightarrow V_{\gamma(s)}$ ($\Gamma : [0, 1] \times V_{t'} \rightarrow f^{-1}(\Delta^*) \cap B_\epsilon$) tal que $\Gamma_0 = id : V_{t'} \rightarrow V_{t'}$ y $\Gamma_s|_{\partial V_{t'}}$ es compatible con la estructura de producto cartesiano, es decir, $\Gamma_s(t', z_0) = (\gamma(s), z_0) \in \Delta^* \times \partial V_{t'}$. Así, podemos asumir que $h_\gamma := \Gamma_1 : V_{t'} \rightarrow V_{t'}$ es la identidad en la frontera de $V_{t'}$.

Definición 5.11. El mapeo $T = (h_\gamma^*)^{-1} = H^1(V_{t'}, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(V_{t'}, \mathbb{C})$ es llamado el operador de monodromía en cohomología de la singularidad f el cual es único salvo isomorfismo.

5.5.1. Subespacios propios de T y secciones elementales

Se tiene que para cada $t \in \Delta^*$, las fibras del haz cohomológico son $H^1(V_t, \mathbb{C}) \approx \mathbb{C}^\mu$. Por otra parte, la transformación de monodromía $T : H^1(V_t, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(V_t, \mathbb{C})$ es semisimple, es decir, diagonalizable, y sus valores propios tienen la forma $e^{-2\pi i \alpha}$, donde $\alpha \in sp(f)$, ver [Her2002-1, pág. 121]. Por otra parte, del lema 4.1 por cada básico η_{m_j} , $j = 1, \dots, \mu$ del espacio \mathcal{C} , existe un número racional $\alpha(m_j) \in (-1, 0]$ tal que $e^{-2\pi i \alpha(m_j)} = e^{-2\pi i \alpha_j}$ para algún $\alpha_j \in sp(f)$. De esta manera se tienen μ -números racionales $-1 < \beta_1, \dots, \beta_\mu < 0$, los cuales generan progresiones aritméticas:

$$\mathbf{L}_j = \{\beta_j + k : k \in \mathbb{Z}\}, \quad j = 1, \dots, \mu.$$

Ahora bien, dados $\lambda_\alpha = e^{-2\pi i \alpha} = e^{-2\pi i \beta}$ con $\alpha, \beta \in \mathbf{L} := \bigcup_{j=1}^\mu \mathbf{L}_j$, se tiene que $H_{\lambda_\alpha}^1 = H_{\lambda_\beta}^1$ y $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}$. Además, para cada $\alpha \in \mathbf{L}$:

$$\begin{aligned} H^1(V_t, \mathbb{C})_{\lambda_\alpha} &= H_{\lambda_\alpha}^1 \approx \{A_\alpha : \Delta^* \rightarrow \underline{\mathbf{H}}^*, t \mapsto \langle A_\alpha(t), \bullet \rangle\} \\ &\subset Hom(H_1(V_t, \mathbb{C}), \mathbb{C}) = H^1(V_t, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Es así como llegamos a la definición de los espacios de secciones elementales. En efecto, sea C^α el espacio generado por las secciones $s(A_\alpha, \alpha)$, variando los α y las secciones $A_\alpha \in H_{\lambda_\alpha}^1$.

5.5.2. Retícula de Brieskorn vía secciones geométricas

Asumimos que f es un germen de singularidad aislada casihomogénea como antes con pesos $w = (w_0, w_1)$. Sean $\mathbf{B} = \{[x^\beta] : x^\beta = x_0^{\beta_0} x_1^{\beta_1}, \beta \in I\}$ y $\mathcal{B} = \{[x^\beta dx] : \beta \in I\}$ bases del álgebra de Milnor y la retícula de Brienkorn, como en el teorema 3.6, respectivamente. En esta notación, tenemos que dado $[x^\beta] \in \mathbf{B}$, tenemos $a(\beta) = w_0(\beta_0 + 1) + w_1(\beta_1 + 1) - 1$, ver proposición 3.9.

El siguiente resultado permite caracterizar la retícula de Brieskorn a través de una base de secciones elementales, lo cual es una consecuencia del Lema de Nakayama⁹

⁹Resultados paralelos y más generales para gérmenes no necesariamente casihomogéneos, usando una base de Saito-Hertling, se pueden consultar en [DR-GM2023] y cf. [DR2018].

(ver demostración del teorema 3.6) y las propiedades dadas por (13) y (14). Para su demostración se puede consultar [Varčenko1982, pág. 495].

Lema 5.12. *Sea $\omega_\beta := x^\beta dx_0 \wedge dx_1$ una 2-forma monomial, con $[x^\beta] \in \mathbf{B}$. Entonces, para todo $t \in \Delta^*$ se tiene que*

$$s[\omega_\beta](t) = t^{\alpha(\beta)} A_{\alpha(\beta)}^{\omega_\beta}(t).$$

Usando el lema 5.12, se sigue que si $\alpha \in \mathbf{L}_j$, entonces cada C_{β_j} se puede ver como un subespacio de C^α tomando secciones geométricas vía el mapeo inyectivo:

$$s_j[\bullet] : C_{\beta_j} \hookrightarrow C^\alpha, [\omega_{\beta_j}] \mapsto s[\omega_{\beta_j}].$$

Por lo tanto, si definimos $\mathbf{l}_\alpha = \{\beta_j : -1 < \beta_j \leq 0, \lambda_{\beta_j} = \lambda_\alpha\}$ y $C_\alpha = \bigoplus_{\beta_j \in \mathbf{l}_\alpha} C_{\beta_j}$, entonces se tiene un isomorfismo de \mathbb{C} -espacios vectoriales

$$s_\alpha := \bigoplus_{\beta_j \in \mathbf{l}_\alpha} s_j[\bullet] : C_\alpha \longrightarrow C^\alpha, [\omega_{\beta_j}] \mapsto s[\omega_{\beta_j}]. \quad (15)$$

Ahora bien, se tienen \mathbb{C} -isomorfismos (ver [Her2002-1, pág. 123])

$$\psi_\alpha : C^\alpha \longrightarrow H_{\lambda_\alpha}^1, s(A_\alpha, \alpha) \mapsto A_\alpha. \quad (16)$$

5.53. Elección de una base para los espacios propios de Monodromía

Usando los isomorfismos en (15) y (16) se obtiene una base para cada espacio $H_{\lambda_\alpha}^1$ cuyos elementos se eligen de acuerdo con los siguientes criterios: sea $a(m) \in sp(f)$,

- si $a(m)$ tiene multiplicidad d (aparece d veces), entonces existen secciones del haz de cohomología A_1, \dots, A_d , las cuales forman parte de una base para $H_{\lambda_\alpha}^1$.
- si $a(m), a(m) + 1, \dots, a(m) + (r - 1) \in sp(f)$, entonces $e^{-2\pi i(a(m)+l)} = \lambda_{a(m)}$ ($l = 0, \dots, r - 1$) y existen secciones del haz de cohomología A_1, A_2, \dots, A_r , las cuales forman parte de una base para $H_{\lambda_{a(m)}}^1$.

Usando los incisos a) y b), se tiene un algoritmo para generar una base para $H_{\lambda_{\alpha(m)}}^1$.

Nota 5.13. De los isomorfismos dados por (15), y abusando de la notación, se escribirá C_α en lugar de poner el espacio C^α .

El siguiente resultado, esencialmente, se puede consultar en [AVG2012, pág. 291] (ver también [Zo2006, pág. 147]).

Lema 5.14. *Las clases $A_\alpha(t) \in H^1(V_t, \mathbb{C})$ definen secciones horizontales con respecto a la conexión de Gauss-Maninn, esto es, pertenecen al kernel de ∂_t . Más aún, las clases $A_\alpha(t) \in H^1(V_t, \mathbb{C})$ pertenecen a los espacios propios del operador monodromía dado por definición 5.11, correspondientes a los valores propios $\{\lambda_\alpha := e^{-2\pi i\alpha}\}$.*

6. Mapeo de periodos para una deformación μ -constante

Sea $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de singularidad aislada de curva plana casihomogéneo. Supongamos que $F(x, y)$ es la deformación μ -constante para f con base $M \subset \mathbb{C}^k$ dada por (8) con buen representante como en apéndice B.1.

Ahora bien, se tiene el hecho de que existe una identificación canónica $\iota_y: \mathcal{M}(y) \approx \mathcal{M}(y_0)$, variando los puntos $y \in \mathbf{T}_\delta$, y asumiendo que y_0 es un punto “base” elegido, ver [Ku1998, pág. 152]. Asimismo, como comentamos en el apartado B.4, podemos asumir que “los objetos $C_\beta, \mathcal{V}^\beta, \mathcal{V}^{>-1}$ son canónicamente isomorfos”, lo que nos permite considerar un espacio fijo salvo isomorfismo:

$$C_\beta := C_\beta(y_0), \mathcal{V}^\beta := \mathcal{V}^\beta(y_0), \mathcal{V}^{>-1} := \mathcal{V}^{>-1}(y_0) \text{ y } \mathcal{M} := \mathcal{M}(y_0).$$

Así, sin perder generalidad, para cada $y \in \mathbf{T}_\delta$, consideramos la retícula de Brieskorn inmersa en \mathcal{M} :

$$H_0''(y) \subset \mathcal{M}(y) \approx \iota_y(\mathcal{M}(y)) = \mathcal{M}$$

asociada al germe F_y . De esta manera obtenemos una familia de retículas $\{H_0''(y) \subset \mathcal{M}\}_{y \in \mathbf{T}_\delta \subset \mathbb{C}^k}$.

Los resultados aquí presentados están basados en [Ku1998, pág. 153].

Lema 6.1. *Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

- i) $\mathcal{V}^0 \approx \mathcal{V}^0(y) \subset H_0''(y) \approx H_0''(y_0) \subset \mathcal{V}^{>-1}$.
- ii) Si $\mu_1 = \dim_{\mathbb{C}} C_1$, entonces

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{H_0''(y_0)}{\mathcal{V}^0} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{H_0''(y)}{\mathcal{V}^0(y)} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{V}^{>-1}}{\mathcal{V}^0} = \frac{1}{2}(\mu - \mu_1).$$

Ahora bien, sea $\mathcal{V} := \frac{\mathcal{V}^{>-1}}{\mathcal{V}^0}$. Entonces, del lema 6.1 i) se tienen los encajamientos lineales (inducidos por los isomorfismos ι_y): $\frac{H_0''(y)}{\mathcal{V}^0(y)} \hookrightarrow \frac{\mathcal{V}^{>-1}}{\mathcal{V}^0}$. Además, del lema 6.1

ii), si $k_0 = \frac{1}{2}(\mu - \mu_1)$, salvo un isomorfismo, los cocientes de la forma $\frac{H_0''(y)}{\mathcal{V}^0(y)}$ permiten considerar la variedad Grassmaniana¹⁰ $\Pi' := \text{Grass}(k_0, \mathcal{V})$ de k_0 -subespacios de \mathcal{V} . En este sentido Π' es llamado el “*espacio de periodos*” para la familia de deformación μ -constante F_y .

Definición 6.2. El mapeo de periodos asociado con la deformación F_y de la singularidad f es definido como

$$\Phi: Y := \mathbf{T}_\delta \longrightarrow \Pi', \quad y \mapsto \frac{H_0''(y)}{\mathcal{V}^0(y)} \approx \frac{H_0''(y_0)}{\mathcal{V}^0(y_0)}.$$

¹⁰Para el desarrollo preciso de la estructura de variedades de Gassman, ver [GH1978, pág. 193].

Es posible encontrar un espacio $\Pi \subset \Pi'$ que también contiene estos cocientes de todas las retículas. Para ello, consideremos ahora a $sp(f) \subset (-1, 1)$ el conjunto de números espectrales asociado a la singularidad f . Sean

$$\alpha_1 := \min\{\alpha : \alpha \in sp(f)\}, \quad \beta_0 := \max\{\alpha : \alpha \in sp(f)\} \text{ y } \beta_1 := \beta_0 - 1. \quad (17)$$

Se tiene el siguiente resultado que refina el contenido del lema 6.1 i).

Lema 6.3. Si $y \in \mathbf{T}_\delta$, entonces $\mathcal{V}^0 \subset \mathcal{V}^{>\beta_0-1} \subset H_0''(y) \subset \mathcal{V}^{\alpha_1} \subset \mathcal{V}^{>-1}$.

Por el lema anterior, si $k_1 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{H_0''(y_0)}{\mathcal{V}^{>\beta_0-1}(y_0)}$, entonces podemos considerar la Grassmaniana $\Pi := Grass\left(k_1, \frac{\mathcal{V}^{\alpha_1}}{\mathcal{V}^{>\beta_0-1}}\right) \subset \Pi'$.

6.01. Algoritmo para determinar explícitamente el mapeo de periodos

De acuerdo con el apartado anterior, el mapeo de periodos $\Phi : \mathbf{T}_\delta \rightarrow \Pi$ puede ser determinado de forma explícita¹¹, con el siguiente proceso:

- i) Calcular $sp(f)$ y considerar $\alpha_1, \beta_0, \beta_1$ como en (17).
- ii) Considerar el \mathbb{C} -espacio vectorial $V := \frac{\mathcal{V}^{\alpha_1}}{\mathcal{V}^{>\beta_1}} = \bigoplus_{\alpha_1 \leq \alpha \leq \beta_1} C_\alpha$.
- iii) Dado $y \in \mathbf{T}_\delta$, elegir 2-formas holomorfas $\omega_1(y), \omega_2(y), \dots, \omega_{k_0}(y)$ y tomar sus secciones geométricas correspondientes $s[\omega_1](y), s[\omega_2](y), \dots, s[\omega_{k_0}](y)$ tales que

$$\frac{H_0''(y)}{\mathcal{V}^{>\beta_1}(y)} = \langle s[\omega_1](y), s[\omega_2](y), \dots, s[\omega_{k_0}](y) \rangle.$$

[iii].1] Encontrar ecuaciones diferenciales tales que las funciones vectoriales $s[\omega_j](y)$ son sus soluciones y resolviendo dichas ecuaciones, obtener las funciones vectoriales $s[\omega_j](y)$.

- iv) Si se tienen las formas diferenciales como en el punto iii), entonces las coordenadas de Plücker¹² asociadas a los puntos que corresponden a los espacios cociente $\frac{H_0''(y)}{\mathcal{V}^{>\beta_1}(y)}$ como puntos en Π , se deben expresar como funciones de $y \in \mathbf{T}_\delta$, lo cual determinará una fórmula explícita para el mapeo de periodos.

En el caso casihomogéneo, tenemos el siguiente resultado (cf. [Ku1998, pág. 120] para un resultado en varias variables):

¹¹El algoritmo es más general (ver [Ku1998, pág. 154]), sin embargo, en este manuscrito, estamos en el supuesto de una deformación μ -constante para un germen de singularidad aislada casihomogénea de curva plana.

¹²Para una revisión puntual de las coordenadas de Plücker ver por ejemplo [GH1978, págs. 209 y 354].

Proposición 6.4. Sea $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen de singularidad aislada casihomogéneo de tipo (w_0, w_1) . Si $\{[z^\ell] = z^\ell + J_f := z_0^{\ell_0} z_1^{\ell_1} + J_f : \ell \in A\}$ donde $|A| = \mu(f)$, forman una base para el álgebra de Milnor \mathcal{O}_f , entonces $\{z^\ell dz_0 \wedge dz_1 + df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}, \ell \in A\}$ forman una base para H_0'' . Más aún, los números espectrales de f están dados por

$$\nu([z^\ell]) = \sum_{j=0}^1 w_j(\ell_j + 1) - 1, \quad \ell \in A, \tag{18}$$

donde ν denota el orden de Newton¹³.

6.02. Mapeo de periodos para una familia de curvas elípticas simples

Vamos a considerar una familia de superficies o singularidades dos dimensionales determinadas por la familia polinomial de Legendre $h_a(x, y, z) = z^2 - yx(y - x)(y - ax)$, las cuales son conocidas como “singularidades de tipo \tilde{E}_7 o singularidades unimodales¹⁴ $X_9 = T_{2,4,4}$ ” y que tienen gran relevancia para otros aspectos de estudio en teoría de singularidades¹⁵. Notemos que si consideramos $x = 1$, entonces recuperamos la familia de curvas elípticas

$$E_a: h_a(1, y, z) = z^2 - y(y - 1)(y - a), \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\},$$

cuyo j -invariante es $j(a) = \frac{4}{27} \frac{(a^2 - a + 1)^3}{a^2(a - 1)^2}$. El principal objetivo de este apartado es asociar con esta familia, un mapeo de periodos de acuerdo con el algoritmo anteriormente explicado en sección 6.01. Para poder llevar acabo esto, se hará uso de otra forma normal para la familia f_a , la cual es dada por la parte “estable” de esta familia que consiste de la familia de curvas planas $f_a = yx(y - x)(y - ax)$.

El siguiente resultado se puede consultar en [Ku1998, pág. 160].

Lema 6.5. La familia $f_a(x, y) = yx(y - x)(y - ax)$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ es R -equivalente a $F_\lambda(x, y) = x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-2, 2\}$, para $\lambda = 4a - 2$.

Usando el lema 6.5 tenemos que el mapeo de periodos asociado a la familia de curvas elípticas simples f_a será, por definición, el mapeo de periodos que se determinará enseguida para la deformación $\mu(f)$ -constante F_λ .

Por el ejemplo 4.9, una deformación $\mu(f)$ -constante para $f = x^4 + y^4$ está dada por

$$F_\lambda(x, y) = x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2.$$

También vimos que una base para el álgebra de Milnor es

$$\mathcal{B} = \{1, x, y, xy, x^2, y^2, xy^2, x^2y, x^2y^2\},$$

¹³Se tiene que ν es una función orden inducida por la filtración dada por el poliedro de Newton asociado a f , para mayores detalles ver [F2021] y cf. [Ku1998, pág. 120]

¹⁴Aquí usamos el teorema de clasificación de Arnold [AVG1985, Thm 2, pág. 185], en este caso, $T_{2,4,4}$ indica que el germen de singularidad es de superficie, es decir, de tipo parabólico que está determinado por una función polinomial dada por $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^2 + ax^2y^2$, $a^2 \neq 4$.

¹⁵cf. [Ku1998, pág. 159] para apreciar la relación con resolución de singularidades.

la cual nos induce una base de la retícula de Brieskorn dada por:

$$\mathcal{B}' = \{x^k y^l dx \wedge dy : 0 \leq k, l \leq 2\}.$$

Usando la ecuación (18) los números espectrales de f son:

$$\begin{aligned} sp(f) &= \left\{ \nu(x^k y^l dx \wedge dy) = \frac{1}{4}(k+1) + \frac{1}{4}(l+1) - 1 : x^k y^l dx \wedge dy \in \mathcal{B}' \right\} \\ &= \left\{ \frac{k+l-2}{4} : 0 \leq k, l \leq 2 \right\} = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

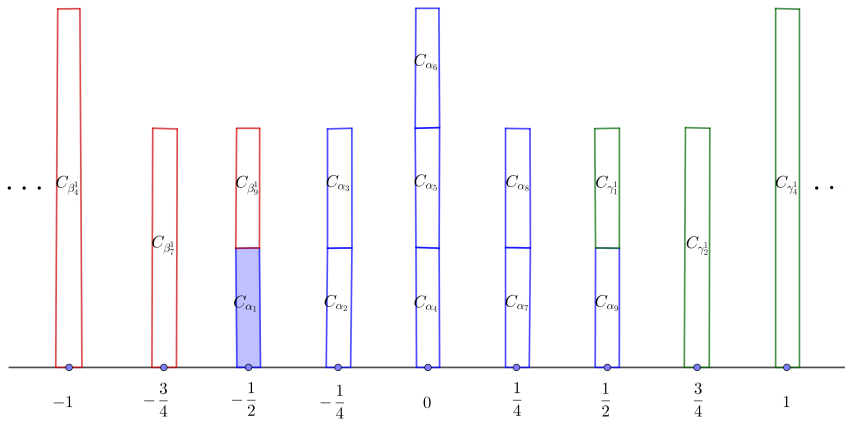


Figura 3. Números espectrales de f (Diagramas de C. Hertling, cf. [Her2002-2])

Denotemos por $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{1}{4}$, $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$, $\alpha_7 = \alpha_8 = \frac{1}{4}$ y $\alpha_9 = \frac{1}{2}$ los números espectrales ordenados de menor a mayor. Entonces, el mínimo y máximo número espectral son: $\alpha_1 := -\frac{1}{2}$ y $\alpha_9 = \frac{1}{2}$. Sean $\beta_i^k := \alpha_i - k$ y $\gamma_i^k := \alpha_i + k$, con $i = 1, \dots, 9$ y $k \in \mathbb{N}$.

Notemos que en este caso α_1 y $\beta_1 = \beta_1^1 = \alpha_9 - 1 = -\frac{1}{2} = \alpha_1$ coinciden (y no hay algún otro número espectral entre ellos), es decir, $\alpha_1 = \beta_1$. Por lo cual,

$$V = \frac{V^{\alpha_1}}{V^{>\beta_1}} = \frac{V^{\alpha_1}}{V^{>\alpha_1}} = \frac{\bigoplus_{\alpha_1 \leq \alpha} C_\alpha}{\bigoplus_{\alpha_1 < \alpha} C_\alpha} = C_{\alpha_1}.$$

De donde, $dim V = dim C_{\alpha_1} = 2 \Rightarrow dim_{\mathbb{C}} \frac{H_0''(\lambda)}{V^{n-1}(\lambda)} = \frac{1}{2} dim_{\mathbb{C}} V = 1$. Del lema 6.3 tenemos que $V^{>\alpha_1} \subset H_0''(\lambda) \subset V^{\alpha_1}$. Por lo cual $H_0''(\lambda) = \mathbb{C} \cdot s[\omega_0](\lambda) \oplus V^{>\alpha_1}$, con $\omega_0 = dx \wedge dy$. Entonces $Grass(1, V) \approx \mathbb{C}P^1$.

El mapeo de periodos para $F_\lambda = x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2$ es:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C} \setminus \{-2, 2\} &\longrightarrow \\ \lambda &\longmapsto \mathbb{C} \cdot [s[\omega_0](\lambda)] \in \frac{\prod H_0''(\lambda)}{V^{>\alpha_1}(\lambda)} \approx \frac{H_0''(\lambda_0)}{V^{>\alpha_1}(\lambda_0)}. \end{aligned}$$

Como el número espectral $-\frac{1}{2}$ es de multiplicidad $d = 1$ y es tal que $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \in \text{sp}(f)$ se tiene que $H_{-1}^1 = \mathbb{C} \langle A_1, A_2 \rangle$. Por lo cual,

$$C_{-\frac{1}{2}} = \mathbb{C} \left\langle t^{-\frac{1}{2}} A_1(t), t^{-\frac{1}{2}} A_2(t) \right\rangle (\lambda).$$

Sean $e_1 := t^{-\frac{1}{2}} A_1(t)$ y $e_2 := t^{-\frac{1}{2}} A_2(t)$. Dado que $s[\omega_0](\lambda) \in C_{-\frac{1}{2}}$, se tiene que

$$s[\omega_0](\lambda) = I_1(\lambda)e_1 + I_2(\lambda)e_2,$$

donde I_1 e I_2 son funciones holomorfas multivaluadas sobre $\mathbb{C} \setminus \{-2, 2\}$.

Por lo tanto, el mapeo de periodos está dado por

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C} \setminus \{-2, 2\} &\longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \\ \lambda &\longmapsto (I_1(\lambda) : I_2(\lambda)). \end{aligned}$$

Para determinar la función vectorial $s[\omega_0](\lambda)$ debemos encontrar ecuaciones diferenciales tales que $s[\omega_0](\lambda)$ sean soluciones de estas. Para tal caso, consideremos la 2-forma monomial $\omega = (x^2 y^2)^i dx \wedge dy = x^{2i} y^{2i} dx \wedge dy$, donde

$$\frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda} = x^2 y^2 \quad \nu(\omega) = \frac{1}{4}(2i+1) + \frac{1}{4}(2i+1) - \frac{4}{4} = \frac{4i+2}{4} - \frac{2}{2} = i + \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = i - \frac{1}{2}.$$

Notar que $s \left[(x^k y^l)^i dx \wedge dy \right]$ es *homogénea* (ver [Ku1998, pág. 148]), esto es, $s[\omega] = s(\omega, \nu(\omega)) \in C_{i-\frac{1}{2}}$.

Por otro lado, $\partial_t^i : C_\alpha \longrightarrow C_{\alpha-i}$. Entonces,

$$\partial_t^i \left(s \left[(x^2 y^2)^i dx \wedge dy \right] \right) \in C_{i-\frac{1}{2}-i} = C_{-\frac{1}{2}},$$

para todo $i \geq 0$.

Las secciones geométricas $s[\omega_0](\lambda)$ tienen una expansión alrededor del cero de la forma (ver [Ku1998, pág. 149]):

$$s[\omega_0](\lambda) = \sum_{i \geq 0} (-\partial_t)^i s[(x^2 y^2)^i \omega_0](0) \frac{\lambda^i}{i!},$$

donde $(-\partial_t)^i s[(x^2 y^2)^i \omega_0](0) \in C_{-\frac{1}{2}}$, para toda $i \geq 0$. Entonces, las secciones geométricas $s[\omega_0]$ son homogéneas, esto es, $s[\omega_0](\lambda) = s(\omega_0, \nu(dx \wedge dy)) = s(\omega_0, -\frac{1}{2}) \in C_{-\frac{1}{2}}$. Además, como las formas $\omega_0 = dx \wedge dy$ no dependen de λ , entonces se cumplen las ecuaciones (ver [Ku1998, pág. 147]):

$$\partial_\lambda s(\omega_0, \alpha) = -\partial_t s \left[\frac{\partial F}{\partial \lambda} \omega_0 \right] = -\partial_t s [x^2 y^2 \omega_0] \quad \text{y} \quad \partial_\lambda^2 s(\omega_0, \alpha) = \partial_t^2 s [(x^2 y^2)^2 \omega_0]. \quad (19)$$

Recordemos que $H_0''(\lambda) \approx \frac{\Omega_{\mathbb{C}^2, 0}^2}{df_\lambda \wedge d\mathcal{O}}$, ver (14). Por lo cual, $df_\lambda \wedge dg = (f_{\lambda, x} \cdot g_y - f_{\lambda, y} \cdot g_x) \omega_0 = 0 \in H_0''(\lambda)$, para toda función holomorfa g . En particular, apliquemos esto para las funciones $g = x^5 y$ y $h = x y^5$. Veamos: $F_{\lambda, x} = 4x^3 + 2\lambda x y^2$, $F_{\lambda, y} = 4y^3 + 2\lambda x^2 y$, $g_x = 5x^4 y$, $g_y = x^5$, $h_x = y^5$ y $h_y = 5x y^4$. Por lo tanto, se tiene que $(F_{\lambda, x} \cdot g_y - F_{\lambda, y} \cdot g_x) \omega_0 = 0$ y $(F_{\lambda, x} \cdot h_y - F_{\lambda, y} \cdot h_x) \omega_0 = 0$, si y solo si se cumplen las siguientes condiciones

$$(x^8 - 5x^4 y^4 - 2\lambda x^6 y^2) \omega_0 = 0 \quad \text{y} \quad (5x^4 y^4 + 2\lambda x^2 y^6 - x^8) \omega_0 = 0.$$

Restando la segunda ecuación de la primera se obtiene

$$(x^8 + y^8 - 10x^4 y^4 - 2\lambda x^2 y^2 (x^4 + y^4)) \omega_0 = 0.$$

O bien,

$$\left[\left((x^4 + y^4)^2 + 2\lambda x^2 y^2 (x^4 + y^4) + \lambda^2 x^4 y^4 \right) - 4\lambda x^2 y^2 (x^4 + y^4) - (12 + \lambda^2) x^4 y^4 \right] \omega_0 = 0. \quad (20)$$

Ahora, usando $F_\lambda - \lambda x^2 y^2 = x^4 + y^4$ y $F_\lambda^2 = (x^4 + y^4)^2 + 2\lambda(x^4 + y^4)x^2 y^2 + \lambda^2 x^4 y^4$ en la ecuación (20), obtenemos que $x^4 y^4 \omega_0 - \left(\frac{F_\lambda^2}{(12-3\lambda^2)} \omega_0 - \frac{4\lambda F_\lambda}{(12-3\lambda^2)} x^2 y^2 \omega_0 \right) = 0$ si y solo si

$$x^4 y^4 \omega_0 = \frac{F_\lambda^2}{(12-3\lambda^2)} \omega_0 - \frac{4\lambda F_\lambda}{(12-3\lambda^2)} x^2 y^2 \omega_0 \quad \text{mód} \quad df_\lambda \wedge d\mathcal{O}. \quad (21)$$

Sustituyendo la ecuación (21) en la (19), y además, usando los operadores restricción $\partial_t^2 t^2 = \frac{3}{4} Id$ en $C_{-\frac{1}{2}}$; $\partial_t^2 t = \frac{3}{2} \partial_t$ en $C_{\frac{1}{2}}$; y la linealidad de los operadores ∂_t y $s[\cdot]$ tenemos lo siguiente:

$$s[\omega_0](\lambda) = -\partial_t s[x^2 y^2 \omega_0](\lambda)$$

y

$$\begin{aligned} \partial_\lambda^2 s[\omega_0](\lambda) &= \partial_t^2 s[x^4 y^4 \omega_0](\lambda) \\ &= \partial_t^2 s \left[\frac{1}{(12-3\lambda^2)} F_\lambda^2 s[\omega_0] - \frac{4\lambda}{(12-3\lambda^2)} F_\lambda x^2 y^2 \omega_0 \right] (\lambda) \\ &= \frac{1}{(12-3\lambda^2)} \partial_t^2 t^2 s[\omega_0](\lambda) - \frac{4\lambda}{(12-3\lambda^2)} \partial_t^2 t s[x^2 y^2 \omega_0](\lambda), \quad (\text{aquí } F_\lambda = t) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{(4-\lambda^2)} s[\omega_0](\lambda) + \frac{2\lambda}{(4-\lambda^2)} (-\partial_t s[x^2 y^2 \omega_0](\lambda)) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{(4-\lambda^2)} s[\omega_0](\lambda) + \frac{2\lambda}{(4-\lambda^2)} \partial_\lambda s[\omega_0](\lambda). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$-(4 - \lambda^2)\partial_\lambda^2 s[\omega_0](\lambda) + 2\lambda\partial_\lambda s[\omega_0](\lambda) + \frac{1}{4}s[\omega_0](\lambda) = 0. \quad (22)$$

Recordemos que $\lambda = 4a - 2$, entonces

$$\partial_\lambda^2 = 4\partial_a \quad \text{y} \quad 4 - \lambda^2 = 4 - (4a - 2)^2 = 4 - 16a^2 + 16a - 4 = -16a(a - 1).$$

Definiendo $s[\omega_0](\lambda) = s[\omega_0](4a - 2) =: u(a)$, la ecuación (22) se convierte en:

$$a(a - 1)\partial_a^2 u(a) + \frac{1}{24}(2a - 1)\partial_a u(a) + \frac{1}{210}u(a) = 0. \quad (23)$$

Por lo cual, las funciones vectoriales $s[\omega_0](\lambda) = s[\omega_0](4a - 2) = u(a)$ son soluciones de la ecuación diferencial dada por (23).

Observación 6.6. La ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden

$$a(a - 1)\partial_a^2 u(a) + \frac{1}{24}(2a - 1)\partial_a u(a) + \frac{1}{210}u(a) = 0$$

es un caso particular de la *ecuación hipergeométrica de Gauss* (ver [SST2000, pág. 16]) dada por

$$z(z - 1)\partial^2 f(z) + ((\theta + \rho + 1)z - \tau)\partial f(z) + \theta\rho u(a) = 0.$$

En nuestro caso,

$$\theta = \frac{-14 + \sqrt{195}}{32}, \quad \rho = \frac{-14 - \sqrt{195}}{32}$$

y

$$\tau = \frac{1}{24} \left(\text{ó bien, } \theta = \frac{-14 - \sqrt{195}}{32}, \quad \rho = \frac{-14 + \sqrt{195}}{32} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{1}{24} \right).$$

Conclusiones

Para un germe de singularidad aislada casihomogéneo, se demostró que existe una base, con representantes monomiales, de A_f . Usando el lema de Nakayama, dicha base induce una base para la retícula de Brieskorn.

Usando el hecho de que f satisface la identidad de Euler, a través de un enfoque algebraico, se definió explícitamente la conexión meromorfa de Gauss-Manin ∂_t para el caso de dos variables complejas, la cual nos permitió descomponer el espacio localización de la retícula de Brieskorn, $\mathcal{M} = H_0'' \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$, en espacios propios $\mathcal{C}_{a(m)}$ del operador $t\partial_t$. A su vez, estos espacios permitieron definir la \mathcal{V}^\bullet -filtración ($\mathcal{V}^{\gt\bullet}$ -filtración) de submódulos de \mathcal{M} . Asimismo, estos objetos se pudieron describir analíticamente, en el lenguaje de las secciones geométricas sobre el haz cohomológico de Milnor y el operador monodromía asociados a la fibración de Milnor del germe f . Estos mismos objetos se tienen para una deformación $\mu(f)$ -constante del germe f .

Se definió también el espectro $sp(f) = \{\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_\mu(f)\}$ para el caso casihomogéneo, el cual es un invariante discreto del germe f que ayudó, vía la retícula, para considerar los espacios \mathcal{V}^{α_1} , $\mathcal{V}^{>\beta_1}$ (con α_1 y β_1 como en (17)) y por ende, definir el mapeo de periodos, $\Phi: y \mapsto \Phi(y)$, considerando una deformación $\mu(f)$ -constante del germe f , f_y , cuyas imágenes son elementos de una variedad Grassmaniana del cociente $\frac{\mathcal{V}^{\alpha_1}}{\mathcal{V}^{>\beta_1}}$.

Se dio un ejemplo de la definición y construcción de dicho mapeo de periodos (comparar con el enfoque dado por la construcción de Brieskorn y Knorrer en [Br-Kn2012] para el caso de curvas elípticas simples), para la familia de curvas elípticas simples $F_a(x, y, z) = z^2 - yx(y - x)(y - ax)$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ usando la R -equivalencia de la parte estable $f_a = yx(y - x)(y - ax)$ con la deformación μ -constante $F_\lambda(x, y) = x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-2, 2\}$ del germe $f = x^4 + y^4$, donde la relación de los parámetros es $\lambda = 4a - 2$. Concluimos que el mapeo de periodos es analítico multivaluado, lo cual nos dice que bajo una deformación $\mu(f)$ -constante del germe f los objetos invariantes asociados (y por tanto, a la familia de curvas elípticas simples) varían de manera analítica. Más aún, el proceso de construcción del mapeo de periodos dado en el apartado 6.01 permite obtener soluciones de un caso particular de la ecuación hipergeométrica de Gauss¹⁶ cuando uno se centra en el análisis de la familia de curvas elípticas simples.

Agradecimientos

El primer autor agradece el apoyo económico por parte del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) a través de la beca No. 774698 para cursar la Maestría en Ciencias Matemáticas en la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. El segundo autor fue parcialmente apoyado por el CONACyT grant A1-S-47710.

A. Lema de Nakayama

El siguiente resultado de álgebra conmutativa se puede consultar en [M2006, pág. 8].

Teorema A.1 (Lema de Nakayama). *Sean $(A, \mathfrak{m}, \mathbb{K} = A/\mathfrak{m})$ un anillo local y M un A -módulo finitamente generado. Sea $\bar{M} = \frac{M}{\mathfrak{m}M}$. Supongamos que \bar{M} es un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita $n = \dim_{\mathbb{K}} \bar{M}$. Entonces,*

- a) *Si $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset \bar{M}$ es una \mathbb{K} -base para \bar{M} , donde $\bar{v}_j = v_j + \mathfrak{m}M$, $j = 1, \dots, n$, entonces el conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base minimal de M .*
- b) *Recíprocamente: cada base minimal de M es obtenida de esta manera, y por lo tanto, tiene n elementos.*

¹⁶Esta ecuación tiene una gran importancia por su aparición y utilidad en varias áreas de las matemáticas, tales como geometría algebraica, teoría de números, combinatoria y física matemática, además que cualquier ecuación con tres puntos singulares regulares puede escribirse como una ecuación hipergeométrica, ver [SST2000, pág. 16].

c) Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ son ambas bases minimales de M , y $v_i = \sum b_{i,j}u_j$ con $b_{i,j} \in A$, entonces $\det(b_{i,j})$ es una unidad en A de tal manera que la matriz $(b_{i,j})$ de $n \times n$ es invertible.

B. Pegado de objetos asociados a una deformación μ -constante

Los resultados que se presentan en este apartado se pueden consultar en [Ku1998].

Recordemos que para un germen de singularidad aislada casihomogéneo de curva plana $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ se tienen los siguientes objetos:

- La retícula de Brieskorn H_0'' .
- El espacio de localización $\mathcal{M} := H_0'' \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$.
- La conexión de Gauss-Manin ∂_t .
- El operador multiplicación por t .
- Las filtraciones \mathcal{V}^\bullet y $\mathcal{V}^{>\bullet}$.
- El haz homológico $\underline{H} = \bigsqcup_{t \in \Delta^*} H_1(V_t, \mathbb{C})$.
- El haz cohomológico $\underline{H}^* = \bigsqcup_{t \in \Delta^*} H^1(V_t, \mathbb{C})$.
- Los espacios propios de la transformación de monodromía que son isomorfos al espacio de secciones elementales: $H_{\lambda_\alpha}^1 \approx C_\alpha$.

Asimismo, se tienen objetos asociados para las singularidades $F_y, y \in M$ de la deformación μ -constante $F(x, y)$ de $f: \mathcal{M}(y), \mathcal{V}^\bullet(y), \mathcal{V}^{>\bullet}(y), \underline{H}(y), \underline{H}^*(y), H_{\lambda_\alpha}^1(y), C_\alpha(y), H_0''(y)$, etc. Una tarea que nos interesa es “pegar” dichos objetos para formar familias unificadas.

B.1. Pegado de fibraciones de Milnor

Un primer paso que es la base de los “pegados subsecuentes” y que a continuación se muestra, es cómo conseguir un *buen representante* de la deformación de $F(x, y)$ y relacionarlo con la fibración de Milnor.

Sea $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen de singularidad aislada en 0. De acuerdo con (8), consideremos la deformación F_y de f parametrizada por $M \subset \mathbb{C}^k$.

Ahora bien, sea $F: (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0), t = F(x, y) =: F_y(x), y = (y_1, \dots, y_k)$ una deformación $\mu(f)$ -constante para la singularidad $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ con espacio base $M \subset \mathbb{C}^k$ suave. Tenemos por lo tanto una familia k -paramétrica de gérmenes de singularidad aislada de funciones holomorfas dadas por:

$$\begin{aligned} F_y: (\mathbb{C}^2 \times \{y\}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (x, y) &\longmapsto F_y(x), \end{aligned}$$

con número de Milnor $\mu(F_y) = \mu(f) =: \mu$ para toda y en una vecindad de 0, $\mathbf{T} \subset M$, donde $F(x, 0) = F_0(x) = f(x)$ (esto es, f está inmersa en la familia $\{F_y\}_{y \in M}$).

Ahora bien, $(0, y)$ es una singularidad aislada para F_y . Por lo tanto, por el teorema 3.1, para cada $y \in \mathbf{T} \subset M$, existen $\epsilon(y), \eta(y) > 0$, los cuales se eligen por separado, tales que el germen de singularidad aislada F_y tiene una fibración de Milnor

$$F_y := F_y|_{X(y)} : X(y) \longrightarrow D_{\eta(y)}^*,$$

con bola de Milnor $X(y)$.

Sin perder generalidad, se elige el mismo disco agujereado $D := \Delta^*$ independientemente de $y \in \mathbf{T}$.

Una tarea fundamental es pegar las variedades $X(y)$, (y en general, los espacios $\underline{H}(y)$, etc.) para formar una fibración (o bien haces vectoriales) uniforme sobre $D^* \times \mathbf{T} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^k$. Veamos lo que enmarca el pegado de fibraciones de Milnor.

Bien, considérese la fibración de Milnor de cada germen F_y mediante la elección de $\eta := \eta(y)$ (por lo anterior, que sea el mismo, es decir, independiente de y) y $\epsilon := \epsilon(y)$ (el cual depende de y) suficientemente pequeños. En estos términos, preservamos la siguiente notación:

$$B_{\epsilon(y)} = \{x \in \mathbb{C}^2 : |x| \leq \epsilon(y)\}, D_{\eta}^* = \{t \in \mathbb{C} : |t| \leq \eta, t \neq 0\}, \mathbf{T}_{\delta} = \{y \in \mathbb{C}^k : |y| \leq \delta\}.$$

A continuación, se precisa en qué sentido pegaremos las fibraciones de Milnor de cada F_y , salvo homotopía (o bien desde un enfoque cohomológico, si se consideran los espacios $H(y)$). Para comenzar, se tienen las siguientes observaciones:

- a) Las fibras de F_y se denotan por $X_t(y) := \{x : F_y(x) = t\}$. Se elige $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\epsilon' \in (0, \epsilon)$, la frontera $\partial B_{\epsilon'}$ interseca transversalmente a la hipersuperficie $X_0(y)$ y 0 es el único punto singular de $f(x)$ en $B_{\epsilon'}$.
- b) Se eligen $\eta > 0$ y $\delta > 0$ tales que:
 1. Para cualquier $y_0 \in D_{\delta}$ la función F_{y_0} no tiene puntos críticos en B_{ϵ} distintos del 0, lo cual es posible debido a que F_{y_0} es un germen de singularidad aislada de curva plana.
 2. Para cada $y_0 \in D_{\delta}$ y $t \in D_{\eta}^*$, la esfera S_{ϵ} interseca transversalmente a la hipersuperficie $X_t(y_0)$, es decir, para cualquier punto $x \in S_{\epsilon} \cap F_{y_0}^{-1}(t)$ los vectores tangentes de S_{ϵ} y $F_{y_0}^{-1}(t)$ en x generan a \mathbb{C}^2 (ver figura 4). Aquí $0 < \epsilon \ll 1$ no depende de y_0 , i.e., $S_{\epsilon} \pitchfork F_{y_0}^{-1}(t)$ para todo $y_0 \in \mathbf{T}_{\delta}$ y para todo $t \in D_{\eta}^*$.
 3. Definimos $\chi = F^{-1}(D_{\eta}^* \times \mathbf{T}_{\delta}) \cap (B_{\epsilon} \times \mathbf{T}_{\delta})$. Tenemos que

$$B_{\epsilon} \times \mathbf{T}_{\delta} = \bigsqcup_{y \in \mathbf{T}_{\delta}} B_{\epsilon} \times \{y\}.$$

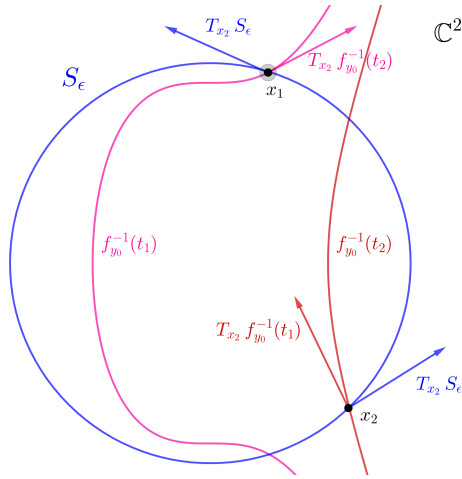
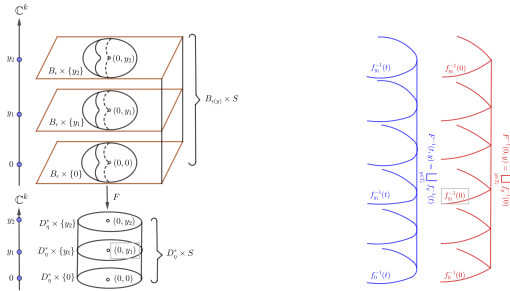


Figura 4. Cada esfera S_ϵ interseca transversalmente a la hipersuperficie $X_t(y_0)$.



a) Pegado de bolas de Milnor. b) Pegado de fibras no singulares y singulares.

Figura 5. Pegado de fibraciones de Milnor.

4. Para el mapeo holomorfo

$$F : \chi \longrightarrow D_\eta^* \times \mathbf{T}_\delta \tag{24}$$

tenemos una fibación C^∞ localmente trivial sobre $D_{\eta y_0}^* \times \mathbf{T}_\delta$

$$F' : \chi^* \longrightarrow D_\eta^* \times \mathbf{T}_\delta.$$

Por lo tanto, tenemos la familia de fibraciones

$$F_y : \chi(y) \longrightarrow D_{\eta y_0}^* \times \{y\}, \tag{25}$$

donde $\chi(y) := \bigsqcup_{t \in D_{\eta y_0}^*} F^{-1}(t, y), y \in \mathbf{T}_\delta.$

Finalmente, para construir la fibrición de Milnor $X(y) \rightarrow D_\eta^*$ del germen de singularidad aislada $f_y : (\mathbb{C}^2 \times \{y\}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, por el teorema de la fibrición de Milnor, tomamos $0 < \delta(y) \ll \epsilon(y) \ll 1$ y consideramos la restricció de F :

$$F_1 : F^{-1} \left(D_{\eta(y)}^* \times \{y\} \right) \cap (B_{\epsilon(y)} \times \{y\}) \cap \chi(y) \rightarrow D_{\eta(y)}^* \times \{y\} \rightarrow D_{\eta(y)}^*.$$

Así, recuperamos un buen representante para cada germen de singularidad aislada $F_y : (\mathbb{C}^2 \times \{y\}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $y \in \mathbf{T}_\delta$.

Para cada $(t, y) \in D_\eta^* \times \mathbf{T}_\delta$ definimos

$$X_t(y) = f_y^{-1}(t), \quad \chi_t(y) = F^{-1}(t, y).$$

Lo anterior se puede resumir en el siguiente resultado (cf. [Lo1984]).

Proposición B.1. *Existe un buen representante*

$$\begin{aligned} \tilde{F} : \quad \chi &\longrightarrow D \times \mathbf{T} \\ (x, y) &\longmapsto (F_y(x), y) \end{aligned}$$

de la deformación para la hipersuperficie $(f^{-1}(0), 0)$, donde

$$D = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \eta\}, \quad \mathbf{T} = \{y \in \mathbb{C}^k : |y| < \delta\},$$

$$\chi = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \times Y : |x| < \epsilon, \quad |F_y(x)| < \delta\},$$

con $\eta, \delta, \epsilon > 0$ suficientemente pequeños.

El siguiente resultado se puede consultar en [Ku1998, pág. 141].

Teorema B.2. *Se tienen encajes de fibras $X_t(y) \hookrightarrow \chi_t(y)$ que son equivalencias homotópicas. En particular, se tiene que los grupos de homología y cohomología de las fibras $X_t(y)$ y $\chi_t(y)$ son isomorfos.*

Observación B.3. La proposición B.1 permite “pegar” las fibriciones de Milnor de cada germen de singularidad aislada dado por los mapeos holomorfos F_y , ya que del teorema B.2 se sigue que desde un punto de vista tanto homotópico, y por ende, (co)homológico, se puede considerar a F , dado en la ecuación (24), como una familia de fibriciones de Milnor $\{X(y) \rightarrow D_\eta^*\}$ (variando holomórficamente) de las singularidades aisladas F_y .

B.2. Pegado de fibriciones cohomológicas

Usando la fibrición \mathcal{C}^∞ localmente trivial $F_1 : \chi^* \rightarrow D_{\eta_y}^* \times \mathbf{T}_\delta$ construida en la sección anterior, podemos definir una fibrición cohomológica sobre $D_{\eta_y}^* \times \mathbf{T}_\delta$. En efecto,

$$\mathcal{H} := \bigsqcup_{(t,y) \in D_{\eta_y}^* \times \mathbf{T}_\delta} H^1(\chi_t(y), \mathbb{C}),$$

donde $\chi_t(y) = F^{-1}(t, y)$ es la fibra del mapeo F , de acuerdo con el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \chi_t(y) \hookrightarrow & \longrightarrow & \chi(y) \\
 \downarrow & & \downarrow F \\
 & & D_{\eta(y)}^* \times \{y\} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \{t\} \hookrightarrow & \longrightarrow & D_{\eta(y)}^* .
 \end{array}$$

Por el teorema B.2, como las fibras $X_t(y)$ y $\chi_t(y)$ son homotópicamente equivalentes, se sigue que

$$H^1(\chi_t(y), \mathbb{C}) \approx H^1(X_t(y), \mathbb{C}),$$

$\forall y \in \mathbf{T}_\delta$ y $\forall t \in D_{\eta_y}^*$. Luego, $\underline{\mathcal{H}}|_{D_{\eta_y}^* \times \{y\}} \approx \underline{\mathcal{H}}(y)$.

Aquí, $\underline{\mathcal{H}}(y) = \bigsqcup_{t \in D_{\eta(y)}^*} H^n(X_t(y), \mathbb{C})$ es la fibración cohomológica para la singularidad F_y .

Análogamente se construye el fibrado vectorial holomorfo en homología

$$\underline{\mathcal{H}}_* := \bigsqcup_{(t,y) \in D_{\eta_y}^* \times \mathbf{T}_\delta} H_1(\chi_t(y), \mathbb{C}),$$

tal que $\underline{\mathcal{H}}_*|_{\eta_y} \approx \underline{\mathcal{H}}_*(y)$.

De lo anterior, por la observación B.3 tenemos el “pegado” de los haces vectoriales en (co)homología de Milnor asociados con cada germen F_y .

B.3. Pegado de conexiones de Gauss-Manin y secciones elementales

Un hecho importante para lo que sigue, es la noción de la conexión meromorfa de Gauss-Manin para la familia dada por la deformación μ -constante de f y su relación de “pegado” con las conexiones, por separado, de Gauss Manin para cada uno de los gérmenes F_y . Para no extender la exposición, nos limitamos a describir el punto central de partida. En efecto, los espacios de secciones asociadas a los fibrados vectoriales $\underline{\mathcal{H}}$ y $\underline{\mathcal{H}}(y)$, $y \in M$, son isomorfos:

$$\Gamma(D_{\eta_y}^* \times \mathbf{T}_\delta, \underline{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(D_{\eta_y}^*, \underline{\mathcal{H}}(y)),$$

donde el isomorfismo se obtiene por extensión de las secciones. Asimismo, el fibrado vectorial $\underline{\mathcal{H}}$ es el kernel de una conexión, la conexión meromorfa de Gauss-Manin asociada a F_1 , la cual denotamos por ∇ . Entonces, se tienen varias direcciones para tomar la

derivada covariante, una dirección dada por la carta holomorfa en el disco $D_\eta^* \subset \mathbb{C}$ y μ -direcciones con respecto a las coordenadas homolorfas en \mathbf{T}_δ , y se satisfacen las siguientes propiedades:

$$(t\partial_t - \beta Id)^2 s(A, \beta) = 0, \quad \partial_j s(A, \beta) = 0,$$

donde $\partial_t := \nabla_{\frac{d}{dt}}$ y $\partial_j := \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_j}}$, $j = 1, \dots, \mu$. Aquí los mapeos

$$(t, y) \in D_\eta^* \times \mathbf{T}_\delta \mapsto s(A, \beta)(t, y) := t^\beta A(t, y),$$

son secciones monovaluadas de \mathcal{H} (lo cual se obtiene de forma análoga a como se detalló en el caso para un único germen, ver apartado 5.52) que se corresponden con las secciones planas $(t, y) \mapsto A(t, y) \in H^1(\chi_t(y), \mathbb{C})$. De hecho, β es un número racional tal que $\lambda_\beta := e^{-2\pi i \beta}$ es un valor propio de la transformación de monodromía cohomológica asociada a F_1 , y por ende, $A(t, y)$ es un vector propio en $H^1(\chi_t(y), \mathbb{C})_{\lambda_\beta}$. Cada λ_β determina una secuencia aritmética de forma análoga a como se hizo en el apartado 5.51.

B.4. Pegado de secciones geométricas

Para simplificar la exposición, en este apartado abordaremos las propiedades necesarias para describir cómo varían las secciones geométricas cuyos gérmenes forman las retículas de Brieskorn para las singularidades $F_y(x)$, con respecto al parámetro $y \in \mathbb{C}^\mu$. Comenzamos por describir las secciones geométricas del fibrado vectorial \mathcal{H} para una 2-forma holomorfa de la forma

$$\omega = g(x, y) dx_0 \wedge dx_1, \quad x = (x_0, x_1),$$

donde $g(x, y)$ es una función holomorfa. Por lo tanto, si $y \in \mathbf{T}_\delta$, entonces tomando residuos de Leray con respecto al germen que determina $F_1 : \chi^* \rightarrow D_{\eta_y}^* \times \mathbf{T}_\delta$, se tiene que $\omega_y := \omega|_{\chi(y)}$ define una sección del fibrado vectorial $\pi_y : \mathcal{H}(y) \rightarrow D_{\eta(y)}^* \times \{y\} \rightarrow D_{\eta(y)}^*$. En efecto, dado $y \in \mathbf{T}_\delta$ tenemos las clases de cohomología

$$t \in D_\eta^* \mapsto s[\omega_y](t) := \left[\frac{\omega}{dF_y}(t) \right] = \left[\text{Res}_{\chi_t(y)} \left(\frac{\omega}{F_y - t} \right) \right] \in H^1(\chi_t(y), \mathbb{C}). \quad (26)$$

Variamos $y \in \mathbf{T}_\delta$ para obtener una sección holomorfa del fibrado vectorial \mathcal{H} :

$$(t, y) \in D_\eta^* \times \mathbf{T}_\delta \mapsto s[\omega](t, y) := \left[\frac{\omega}{dF_y} \Big|_{\chi_t(y)} \right] \in H^1(\chi_t(y), \mathbb{C}). \quad (27)$$

De este modo obtenemos el “pegado” de secciones geométricas asociadas a las singularidades F_y .

Notar la diferencia entre las secciones individuales $s[\omega_y](t)$ y la sección de pegado $s[\omega](t, y)$. De manera precisa, en este manuscrito solo estaremos interesados en las propiedades de diferenciabilidad de la sección $s[\omega_y] \in H_0''(y) \subset \mathcal{V}^{>-1}(y)$, con respecto al parámetro $y \in \mathbf{T}_\delta$, con expansión asintótica en secciones elementales, ver (12) y (14):

$$s[\omega_y] = \sum_{\beta > -1} s_\beta^\omega(y), \quad (28)$$

donde $s_\beta^\omega(y) \in C_\beta(y)$. Además, se tienen secciones de haces vectoriales $\overline{C_\beta} \rightarrow \mathbf{T}_\delta$ con fibras $C_\beta(y)$. Las propiedades de interés sobre diferenciación de las secciones (y sus componentes dadas por secciones elementales) dadas por (28), son tratadas de manera concreta en la aplicación para el caso de un parámetro, ver el apartado 6. La justificación técnica de éstas propiedades, se basa en un hecho importante, que por falta de espacio en este manuscrito y del cual haremos uso exhaustivo: “los objetos $C_\beta, \mathcal{V}^\beta, \mathcal{V}^{\beta^{-1}}$ son canónicamente isomorfos” (cf. [Her2002-1]).

C. Superficies de Riemann

Los resultados dados en esta sección son basados en [Da2013] y [Mir1995].

Definición C.1. Sea M un espacio topológico.

1. Sean U y V subconjuntos abiertos de M y de \mathbb{C}^n , respectivamente. Una *carta compleja* sobre M (o simplemente una *carta*) es un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$.
2. Un *atlas* de M es una colección de cartas $\mathcal{A} := \{\phi : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{C}^{n_\alpha} \mid \forall \alpha \in I\}$, $I \subset \mathbb{N}$, con la propiedad $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

Dado $\phi : U \rightarrow V$ una carta compleja sobre un espacio topológico M , a cualquier punto $p \in U$ le corresponde una única n -ada de números complejos $\phi(p) = (z_1(p), \dots, z_n(p))$. A $(z_1(p), \dots, z_n(p))$ se le llama *coordenadas complejas sobre U* .

Definición C.2. Dos cartas $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha, \phi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ se dirán *analíticas compatibles* si el mapeo $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es holomorfo (ver Figura 6).

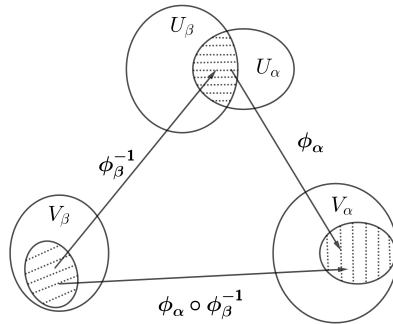


Figura 6. Cartas compatibles.

Definición C.3. Sea M un espacio topológico.

1. Decimos que un atlas \mathcal{A} de M es *analítico* si sus cartas son analíticas compatibles por pares.

2. Un espacio topológico Hausdorff M , equipado con un atlas analítico \mathcal{A} , es llamado una *variedad compleja*.

Definición C.4. Dos atlas analíticos \mathcal{A} y \mathcal{B} son compatibles, si cualquier carta de \mathcal{A} es analítica compatible con cualquier carta de \mathcal{B} .

Se tiene la siguiente equivalencia a la definición anterior:

Proposición C.5. (ver [Da2013] pág. 17) Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} atlas analíticos. Entonces, \mathcal{A} y \mathcal{B} son compatibles $\Leftrightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un atlas analítico.

La unión de todas las cartas analíticas compatibles sobre M es un atlas maximal, este es llamado una *estructura analíticas compleja* sobre M .

Llamaremos *dimensión* de una carta $\phi : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{C}^{n_\alpha}$ al número n_α . Para una variedad compleja conexa M la dimensión de las cartas de su atlas es la misma para todas. Así, para una variedad compleja conexa M , la dimensión de una de sus cartas (cualquiera) es llamada la *dimensión* de M .

Definición C.6. Una *superficie de Riemann* es una variedad analítica compleja conexa M de dimensión 1.

C.1. Superficies de Riemann Hiperelípticas

Antes de dar la construcción de una superficie de Riemann para una función algebraica, definiremos el pegado de superficies de Riemann. Para esto, nos basaremos en [Mir1995, pág. 60].

Sean X y Y dos espacios topológicos. Supongamos que existe un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, donde $U \subset X$ y $V \subset Y$ son abiertos. Tomemos $Z = \{\{x\}, \{y\}, \{u, \phi(u)\} : x \in X - U, y \in Y - V, u \in U\}$ y definamos el mapeo $\pi : X \sqcup Y \rightarrow Z$ dado por:

$$\pi(z) = \begin{cases} \{z\} & \text{si } z \in X - U \\ \{z\} & \text{si } z \in Y - V \\ \{z, \phi(z)\} & \text{si } z \in U. \end{cases}$$

Definición C.7. Z con la topología cociente es llamado el pegado de X con Y a lo largo de U y V via ϕ , el cual denotamos como $Z = X \sqcup Y / \phi$.

Ejemplo C.8. Tomemos $X = Y = \mathbb{C}$, $U = V = \mathbb{C} - \{0\}$ y $\phi(z) = \frac{1}{z}$. El pegado $Z = \mathbb{C} \sqcup \mathbb{C} / \phi$ es $Z = \{\{0\}, \{0\}, \{z, \frac{1}{z}\}\}$. Para hacerlo más explícito, hagamos $U = U_1 \cup U_2 \cup S^1$, donde U_1 es el exterior de S^1 y U_2 es el interior de S^1 (sin el origen). Análogamente, hacemos $V = V_1 \cup V_2 \cup S^1$, con V_1 el interior de S^1 (sin el origen) y V_2 el exterior de S^1 . Así, a través de ϕ estamos identificando: U_1 con V_1 , U_2 con V_2 y S^1 consigo mismo. Por último, pegamos los ceros de cada copia de \mathbb{C} para obtener, Z , la esfera de Riemann (ver figura 7).

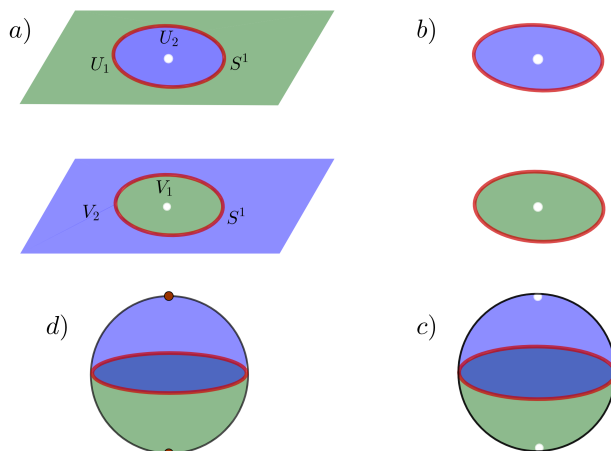


Figura 7. Esfera de Riemann por pegado.

Proposición C.9. Sean X y Y superficies de Riemann. Supongamos que existe un isomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, con $U \subset X$, $V \subset Y$ abiertos no vacíos. Entonces, existe una estructura compleja sobre el pegado $Z = X \sqcup Y / \phi$ tal que las inclusiones naturales de X y Y en Z son holomorfas. En particular, si Z es Hausdorff, Z es una superficie de Riemann.

Consideremos $h(x)$ un polinomio con raíces distintas y de grado $2g + \epsilon + 1$, $\epsilon = 0, 1$. Tomemos la curva plana afín X definida por la ecuación $y^2 = h(x)$ y consideremos $U := \{(x, y) \in X : x \neq 0\}$ subconjunto abierto de X .

Ahora, consideramos el polinomio homogeneizado de h dado por $k(z) = z^{2g+2}h(\frac{1}{z})$. Dado que h tiene raíces distintas, k también tiene raíces distintas. Tomemos la curva plana afín Y definida por la ecuación $w^2 = k(z)$ y consideremos a $V := \{(z, w) \in Y : z \neq 0\}$ subconjunto abierto de Y .

Definamos el isomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ dado por $\phi(x, y) = (\frac{1}{x}, \frac{y}{x^{g+1}})$.

Lema C.10. Considerando X , Y y ϕ dado como en el párrafo anterior. El pegado $Z = X \sqcup Y / \phi$ es una superficie de Riemann compacta de género g .

Definición C.11. Una superficie de Riemann compacta construida por una ecuación de la forma $y^2 = h(x)$, donde h es un polinomio con raíces distintas, es llamada una *superficie de Riemann hiperelíptica*.

Referencias

[AVG1985] Arnol'd, V. I., Varchenko, A. N., & Gusein-Zade, S. M. (1985). Singularities of differentiable maps 1 Birkhäuser. Basel/Stuttgart.

- [AVG2012] Arnol'd, V. I., Varchenko, A. N., & Gusein-Zade, S. M. (2012). *Singularities of Differentiable Maps: Volume II Monodromy and Asymptotic Integrals* (vol. 83). Springer Science & Business Media.
- [AGLV1998] Arnol'd, V. I., Goryunov, V. V., Lyashko, O. V., & Vasilev, V. A. (2012). *Singularity theory I* (vol. 6). Springer Science & Business Media.
- [Br-Kn2012] E. Brieskorn, H. Knörrer. *Plane Algebraic Curves*. Translated by J. Stillwell, Modern Birkhäuser Classics, Springer Science & Business Media, 2012, Reprint of 1986 ed.
- [DR2018] Dela-Rosa, M.A., (2018). On a Lemma of Varchenko and Higher Bilinear Forms Induced by Grothendieck Duality on the Milnor Algebra of an Isolated Hypersurface Singularity. *Bull Braz Math Soc, New Series* 49, 715-741.
- [DR-GM2023] Dela-Rosa, M. A., & Gómez-Mont, X. (2023). Bilinear forms in the Jacobian module and binding of N-spectral chains of a hypersurface with an isolated singularity. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 29 (Suppl 1), 101.
- [Da2013] Danilov, V. I., & Shokurov, V. V. (2013). *Algebraic Geometry I: Algebraic Curves, Algebraic Manifolds and Schemes* (vol. 23). Springer Science & Business Media.
- [de-Rham1954] de Rham, G. (1954). Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire. *Comment. Math. Helv.*, 28(1), 346-352.
- [F2021] Flores-Vivas, F. J. (2021). Aspectos analítico algebraicos del poliedro de Newton [Tesis de Licenciatura]. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
- [F2023] Flores-Vivas, F. J. (2023). Mapeo de periodos para una deformación μ -constante de curvas elípticas [Tesis de Maestría]. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
- [GH1978] Griffiths, P., & Harris, J. (1978). *Principles of algebraic geometry* (vol. 19, No. 8). New York: Wiley.
- [Her2002-1] Hertling, C. (2002). Generic Torelli for semiquasihomogeneous singularities. *Trends in Singularities*, 115-140.
- [Her2002-2] Hertling, C. (2002). *Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities* (vol. 151). Cambridge University Press.
- [Ku1998] Kulikov, V. S. (1998). *Mixed Hodge structures and singularities* (vol. 132). Cambridge University Press.
- [Mal1974] Malgrange, B. (1974). Integrales Asymptotiques et Monodromie. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4^e serie*, t.7, 405-430.
- [Mi1968] Milnor J. (1968). *Singular points of complex hypersurfaces*. Princeton University Press and the University of Tokyo Press.
- [Mir1995] Miranda, R. (1995). *Algebraic curves and Riemann surfaces* (vol. 5). American Mathematical Soc.
- [M2006] Matsumura, H, Reid, M. (Translator) (1986). *Commutative ring theory* (Cambridge studies in advanced mathematics 8, Cambridge University Press).

- [Lo1984] Looijenga, E. (1984). Isolated singular points on complete intersections (No. 77). Cambridge University Press.
- [KSaito1976] Saito, K. (1976). On a generalization of de Rham lemma. In *Annales de l'institut Fourier* (vol. 26, No. 2, pp. 165-170).
- [SST2000] Saito, M., Sturmfels, B., & Takayama, N. (2013). Gröbner deformations of hypergeometric differential equations (vol. 6). Springer Science & Business Media.
- [Sch2010] Schlichenmaier, M. (2010). An introduction to Riemann surfaces, algebraic curves and moduli spaces. Springer Science & Business Media.
- [Varčenko1982] Varčenko, A. N. (1982). Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 18(3), 469.
- [Wall2004] Wall, C. T. C. (2004). Singular points of plane curves (no. 63). Cambridge University Press.
- [We1998] Weber, A. (1998). Leray residue for singular varieties. *Banach Center Publications*, 44(1), 247-256.
- [We2005] Weber, A. (2005). Residue forms on singular hypersurfaces. *Michigan Mathematical Journal*, 53(3), 553-569.
- [Zo2006] Zoladek, H. (2006). The monodromy group (vol. 67). Springer Science & Business Media.

Recibido en noviembre de 2022. Aceptado para publicación septiembre de 2023.

FRANCISCO JESUS FLORES-VIVAS
DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
TABASCO, MÉXICO
e-mail: 202A21001@egresados.ujat.mx

MIGUEL ANGEL DELA-ROSA
DIVISIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS BÁSICAS
CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA (CONACYT)
UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
TABASCO, MÉXICO
e-mail: madelarosaca@conacyt.mx