



HISTORIA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Víctor Manuel Hernández Suárez

María Celia Ríos Villar

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Rosa María Hernández Suárez

CEIP Alfredo Kraus - Las Palmas GC

Resumen

La Historia de las Matemáticas proporciona al profesorado una visión más completa de la materia y una formación científica más amplia. La utilización de problemas históricos en el aula ofrece al alumnado una perspectiva más global de las Matemáticas y puede mejorar la enseñanza y aprendizaje de determinados conceptos matemáticos. Las aportaciones que la Historia de las Matemáticas puede hacer a la enseñanza de éstas son múltiples y dependen de muchos factores. Por un lado, es necesario que los profesores se formen e investiguen en Historia de la matemática; por otro, se requieren materiales adecuados para no caer en la anécdota fácil sin contenido matemático. Sin embargo, las variadas posibilidades de utilización de la Historia de la Matemática, como recurso implícito y explícito, nos muestran que es una herramienta útil para mejorar la enseñanza de las Matemáticas y la formación integral del alumnado. Es importante la selección de textos históricos relevantes en la Historia de la Matemática que ayuden al estudiante a adquirir los conceptos con más facilidad. El uso de cuestiones históricas es una de las técnicas que se puede utilizar para mejorar la transmisión y adquisición de los contenidos matemáticos y también para actuar de revulsivo en aquellos casos en los que el estudiante no esté suficientemente motivado.

Abstract

The history of Mathematics provides teachers a more complete vision of the subject and a wider scientific formation. The use of historical problems in the classroom offers pupils a more global perspective of Mathematics and it can improve the teaching and learning of certain mathematical concepts. The contributions that the history of Mathematics can make to its teaching are

multiple and depend on many factors. On the one hand, it is necessary that the professors are prepared and investigate the history of Mathematics; on the other hand, appropriate materials are required for not falling into the easy anecdote without mathematical content. However, the varied possibilities of the use of the history of Mathematics, as an implicit and explicit resource, show us that it is a useful tool to improve the teaching of Mathematics and the complete formation of the pupil. The selection of excellent historical texts in the history of Mathematics is important because it helps the student to acquire the concepts more easily. The use of historical questions is one of the techniques that you can use to improve the transmission and acquisition of mathematical contents and also to act as a revulsive in those cases in which the student is not sufficiently motivated.

Contextos históricos de la ciencia en clase

¿Para qué conocer la historia de una disciplina en la escuela? Frecuentemente se concibe que el docente pueda usar algunos elementos de la historia de la disciplina que imparte, es decir, añadir anécdotas y comentarios para hacer más amena una clase, o proporcionar una "introducción" histórica del tema o materia que se va a tratar, pero que a la vez es completamente independiente del desarrollo mismo del curso. En otras palabras, utilizar los conocimientos históricos para rellenar y amenizar las clases, pero de una manera ajena a la metodología y conceptos propios del curso.

Algunas ocasiones se ha planteado que existen similitudes entre el desarrollo cultural y científico que ha mostrado el ser humano como especie y el desarrollo cultural y científico que muestra un ser humano a lo largo de su vida, concretamente durante su etapa de niñez y juventud. ¿Tiene algo que ver con el conocimiento de la historia de una disciplina?, es decir, ¿el conocer el desarrollo histórico de una disciplina proporciona al docente una pista de cómo, posiblemente, se desarrolla el conocimiento de tal disciplina en la mente de un alumno? Existen planteamientos al respecto que así lo afirman.



Pero, más que nada, el conocimiento de la historia de una disciplina y su relación directa con los conocimientos que se imparten proporciona al docente, y de hecho también al alumno, la posibilidad de comprender la naturaleza de tales conocimientos, su razón de ser, los motivos por los que se desarrollaron en un momento dado de su historia, la explicación de por qué se desarrollaron de esa manera y el impacto que tuvieron en el entorno socio-histórico y cultural que rodeaba a los seres humanos que lo hicieron.

Recapitemos especialmente en Matemáticas. El saber cómo se ha desarrollado esta área del conocimiento humano permite obtener una visión de su filosofía y las razones inherentes de su evolución. Al igual que en otros campos las preocupaciones principales, las concepciones de los objetos matemáticos, y la concepción misma de las Matemáticas ha variado notablemente a lo largo de la historia.

¿Por qué se le reconoce a René Descartes (1596-1650) tanto mérito? Se le atribuye la invención de la Geometría Analítica, mas en su ensayo *La Geometría* (obra publicada originariamente en el año 1637, que marcó el renacimiento de la



Matemática en el siglo XVIII, y constituyó el primer tratado impreso que contiene los fundamentos de la Geometría Analítica; esta valiosa obra influyó en mentes tan notables como la de Isaac Newton, quien la leyó en 1663.) no presenta sistemas de coordenadas cartesianas, que es lo que consideramos necesario para desarrollar esta geometría. Hay que entender el ambiente de racionalismo que imperaba en el siglo XVII, y que este ensayo no es más que una aplicación, un ejemplo, del método que describe en su obra *Discurso del Método*. Lo brillante en sí es la posibilidad de estudiar con otro método, no el geométrico, objetos que pertenecen al ámbito geométrico. En otras palabras, Descartes posibilitó la

descripción y estudio de objetos geométricos, por ejemplo, no en términos de pertenencia y no pertenencia, sino en términos de relaciones numéricas o algebraicas. Así, en lugar de analizar los objetos geométricos, se analizan las propiedades algebraicas de las expresiones asociadas a dichos objetos. Es el método, el cambio en la visión, lo que le otorgó el mérito al matemático francés.

Otro ejemplo sobre este desarrollo es el Cálculo mismo, cuyo origen está en el estudio del movimiento, hecho que no se había dado con anterioridad a ese nivel, aunque con antecedentes en el mismo desarrollo de Descartes y Viète. Newton y Leibniz comenzaron a desarrollar el Cálculo, pero ambos con serios "huecos" en cuestiones de rigor: no había definiciones precisas y eran más bien los métodos lo que estaba mejor definido. Estos puntos fueron criticados por otros hombres de ciencia, entre ellos filósofos, como por ejemplo el Obispo de Berkeley. Más eso no detuvo el desarrollo del Cálculo, ni su aplicación exitosa en el estudio del movimiento, ni su desenvolvimiento en lo que conocemos como el Análisis. Han habido intentos de axiomatizar esta rama, mas no se ha logrado.

Se presentaron en el siglo pasado más problemas en la fundamentación matemática, en la posibilidad de axiomatizarla, añadiéndose como unos de los resultados el estudio de las geometrías no euclidianas y finalizando ese siglo con la presentación del *Programa de Hilbert*, en el que se buscaba un estructuralismo de la Matemática por medio de una axiomatización de sus diversas ramas. Sin embargo, en el caso de la Aritmética que propuso el italiano Peano, el alemán Gödel mostró ya en nuestro siglo que tal axiomatización no es posible. Hay que mencionar que los antecedentes de tal estructuralismo los podemos encontrar en el trabajo de Galois que escribió también en el siglo pasado, y que derivó en la Teoría de grupos.



De nuevo la pregunta, ¿para qué saber estos detalles? Podríamos decir que los conceptos de la Aritmética y el Álgebra estuvieron varios siglos aplicándose y sin embargo los esfuerzos por sistematizarlos y axiomatizarlos, sin un completo éxito, sólo tienen siglo y medio. El Cálculo se ha desarrollado también sin esta axiomatización y derivando fórmulas y procedimientos que permiten su estudio y aplicación más sencilla, evitando así recurrir a las definiciones de cada objeto cada vez que se utilizan.

¿Por qué los cursos de Geometría en Bachillerato, a pesar de llamarse "euclidiana" y comenzar con las definiciones, los axiomas y los postulados de Euclides continúan en un orden y con una metodología diferente a la del matemático griego? El enfoque que persiste en nuestros actuales cursos tiene sus orígenes en una crisis de los fundamentos y los sucesivos intentos de darle una fundamentación sólida a la Matemática, en este caso la Geometría, que existieron en el siglo pasado.

Si volvemos nuevamente a la pregunta inicial, no sólo el conocer la historia de la disciplina sirve para amenizar la clase, también permite ofrecer una visión de su desarrollo como producto social, cultural, inmerso en un entorno cambiante, que permitió incluso mostrar caminos hacia la libertad intelectual. Además, al docente, le proporciona un esbozo de su filosofía, sus métodos, sus objetos, y le permite aplicar esta información, con una capacidad de discriminación fundamentada, al momento de impartir clases, conceptos y métodos de una forma acorde con el nivel en el que se mueve.

El papel de la historia de la matemática en la enseñanza

Desde el establecimiento de los sistemas nacionales de educación, en cada generación se han levantado voces a favor de una aproximación histórica en la

Enseñanza de las Matemáticas y, en particular, del uso de la Historia de las Matemáticas en su Enseñanza.

Como señaló Fauvel en 1991, un fuerte argumento para ello, sobre todo al comenzar nuestro siglo, fue el punto de vista genético, debido a Herbert Spencer, según el cual la génesis del conocimiento en cada niño debe seguir el mismo camino que la génesis del conocimiento en la raza.

El principio genético postula que el desarrollo de la inteligencia humana reproduce desde la infancia los pasos que ha seguido la evolución histórica de los conceptos matemáticos.

En la Educación Matemática este punto de vista alcanzó su apogeo con las ideas de Branford, en los primeros años del siglo pasado. Branford publicó un esquema de la evolución de la Matemática desde la antigüedad, acompañado de las etapas del desarrollo escolar.

Se puede ensayar en algunos temas, la aplicación del método genético. Este método, extraído de la Biología, intenta reconstruir el clima psicológico que envuelve a cada momento creador que haya supuesto un salto cualitativo en la Historia de las Matemáticas. La aplicación de este método en la Enseñanza, que ha sido reivindicado por grandes matemáticos y profesores de Matemáticas, pretende demostrar que, para la perfecta comprensión de un concepto determinado, el alumno ha de repetir a grandes rasgos el proceso histórico que se ha desarrollado hasta su formulación actual. Félix Klein (1849-1925), en su obra en dos volúmenes, *“Matemática elemental desde un punto de vista superior”*, destinada a la formación de los aspirantes al Magisterio, desarrolla una argumentación genética. Así, al final del primer volumen Klein señala: *“Para precisar bien mi opinión en este punto (el punto de vista*



pedagógico-matemático que aconseja no dar demasiado pronto al alumno cosas demasiado abstractas y difíciles), he de recordar la ley fundamental biogenética, según la cual el individuo en su desarrollo recorre en rápida sucesión todos los estados del desarrollo de la especie a que pertenece. Este principio, creo yo, debiera ser seguido también, al menos en sus líneas generales, en la Enseñanza de la Matemática lo mismo que en cualquier otra Enseñanza; se debería conducir a la juventud, teniendo en cuenta su natural capacidad y disposición, lentamente hasta llegar a las materias elevadas y, finalmente, a las formulaciones abstractas, siguiendo el mismo camino por el que la humanidad ha ascendido desde su estado primitivo a las altas cumbres del conocimiento científico. Un inconveniente fundamental para la propagación de tal método de enseñanza, adecuado al alumno y verdaderamente científico es, seguramente, la falta de conocimientos históricos que se nota con sobrada frecuencia”.

La aplicación del método consiste en contextualizar históricamente, realizando una reconstrucción de la Historia que haga patente el conocimiento de las preguntas y necesidades que motivaron en un momento histórico la introducción de un concepto nuevo, así como las dificultades intrínsecas inherentes al alumbramiento de algunos conceptos y a la resolución de algunos problemas, dificultades que, como señalaba Kline en 1908, se manifiestan asimismo de forma rotunda en el aprendizaje de los mismos conceptos y en la resolución de los mismos problemas. Por ejemplo: si los números negativos no aparecieron hasta el milenio de Historia Matemática, y si fueron necesarios otros mil años hasta que fueron aceptados por los matemáticos, podemos estar seguros de que los estudiantes tendrán dificultades con los números negativos. Veamos también lo significativo del ejemplo siguiente, en el campo del Álgebra. Si contemplamos la Historia del Álgebra, podremos comprender los problemas que

suelen tener nuestros alumnos de Educación Primaria y Secundaria con las letras que representan las incógnitas: son las mismas dificultades que han sufrido los matemáticos durante más de 20 siglos, en la transición desde el Álgebra Retórica de los griegos de la época clásica al Álgebra Simbólica de Vieta, pasando por las etapas intermedias del Álgebra Sincopada de Diofanto, por los desarrollos de los árabes y por el famoso “*Arte de la cosa*” de los algebristas renacentistas italianos.

Matemáticos de gran prestigio como Julio Rey Pastor y Pedro Puig Adam, entre otros, impulsaron esta aproximación histórica, incluyendo en sus libros de texto notas de Historia de las Matemáticas adaptadas a los alumnos.



J. Rey Pastor (1888-1962)



P. Puig Adam (1900-1960)

En nuestra práctica didáctica, debemos procurar ajustarnos al máximo posible al "Decálogo de la Didáctica de la Matemática Media" formulado por D. Pedro Puig Adam en 1955. A saber:

- ✓ No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.
- ✓ No olvidar el origen de las Matemáticas ni los procesos históricos de su evolución.
- ✓ Presentar las Matemáticas como una unidad en relación con la vida natural y social.

- ✓ Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.
- ✓ Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.
- ✓ Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.
- ✓ Promover en todo lo posible la autocorrección.
- ✓ Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.
- ✓ Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.
- ✓ Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento.

Estas ideas formuladas hace 50 años conservan todo su vigor y creemos que deben ser el objetivo en su práctica docente de cualquier profesor de Matemáticas.

La Historia debería ser un potente auxiliar para objetivos tales como:

- Hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en Matemáticas.
- Enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación, precedentes.
- Señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente.
- Apuntar las conexiones históricas de la Matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes.

A partir de la década de los setenta se ha fomentado de nuevo el interés por los aspectos históricos en la Educación Matemática. Schubring en 1983, señalaba algunas muestras de este florecimiento:

- Fundación del Grupo Inter-IREMS de Historia de las Matemáticas, cuyo objetivo es la utilización de la Historia de las Matemáticas en su enseñanza.
- Aparición del Grupo Internacional de Estudio sobre las relaciones entre la Historia y la Pedagogía de las Matemáticas.
- Numerosos trabajos que estudian las relaciones entre Historia de las Matemáticas y Enseñanza desde puntos de vista diferentes, realizados por autores como Janke, Otte y Schubring (los tres en Bielefeld, Alemania), Pyenson (Montreal), Dhombres (Nantes), Eccarius (Eisenach, Alemania) y Filloy (México), entre otros.
- Publicación de trabajos acerca de la Enseñanza de las Matemáticas desde el punto de vista de los enseñantes, como los realizados por Howson en Southampton.
- Publicación de trabajos acerca de la historia del desarrollo de la Didáctica de las Matemáticas, como los de Glaeser (Estrasburgo) y Schmidt (Colonia).

Debemos resaltar las siguientes iniciativas, referentes al uso de la Historia de las Matemáticas en el Aula:

1. La publicación en 1969 por el NCTM de la obra: “*Historical Topics for the Mathematical Classroom*”, en la que se detalla una serie de materiales históricos para la educación matemática.



2. La obra colectiva de los IREM franceses: “*Mathematiques au fil des ages*”, en la que, previa selección de una serie de tópicos, se ofrece una selección de textos que muestran cómo ha evolucionado históricamente.

3. Los Congresos del HPM, entre los que destacan las dos Conferencias Internacionales sobre Historia y Epistemología en la Educación Matemática, celebrados en Montpellier (Francia, 1993) y en Braga (Portugal, 1996).

Es muy interesante el número monográfico que la revista “*For the Learning of Mathematics*” publicó en junio de 1991, culminando el interés de esta publicación periódica por fomentar en sus páginas el debate acerca del uso de la Historia de la Matemática en su aprendizaje.

En España también ha aumentado de manera notable la preocupación por los aspectos históricos en Educación Matemática desde diversas perspectivas, como lo atestiguan las numerosas ponencias y comunicaciones presentadas en congresos nacionales e internacionales, tesis doctorales, artículos y monografías, así como por la organización de seminarios especializados y cursos de doctorado.

Algunas de las razones que se esgrimen para la integración de la Historia de las Matemáticas en su Enseñanza son las siguientes:

1. Para el profesor constituye un antídoto contra el formalismo y el aislamiento del conocimiento matemático y un conjunto de medios que le permiten apropiarse mejor de dicho conocimiento, a la vez que le ayudan a ordenar la presentación de los temas en el currículo. La exploración de la Historia le ayudará también a descubrir los obstáculos y dificultades que se han presentado, los errores cometidos por los propios matemáticos, así como el papel de las Matemáticas como actividad humana.

2. Para los alumnos, las Matemáticas dejarán de representar el papel de edificio terminado, restableciéndose su estatus de actividad cultural, de actividad humana, a la vez que les ayuda en su motivación para el aprendizaje.

J. Fauvel en 1991, proponía, las siguientes líneas de actuación por parte de los docentes en el aula:

1. Mencionar anécdotas Matemáticas del pasado.
2. Presentar introducciones históricas de los conceptos que son nuevos para los alumnos.
3. Fomentar en los alumnos la comprensión de los problemas históricos cuya solución ha dado lugar a los distintos conceptos que aprenden en clase.
4. Impartir lecciones de Historia de las Matemáticas.
5. Idear ejercicios utilizando textos matemáticos del pasado.
6. Fomentar la creación de pósteres, exposiciones u otros proyectos sobre un tema histórico.
7. Usar ejemplos del pasado para ilustrar técnicas o métodos.
8. Realizar proyectos en torno a una actividad matemática local del pasado.
9. Explorar errores del pasado para ayudar a comprender y resolver dificultades de aprendizaje.
10. Idear aproximaciones pedagógicas al tópico de acuerdo con su desarrollo histórico.
11. Idear el orden y estructura de los temas dentro del programa de acuerdo con su desarrollo histórico.

Para actuar en esta línea es imprescindible, por parte del profesorado, realizar ciertos estudios sobre Historia de las Matemáticas. Existen muchas maneras de elaborar estos estudios:

- Obtener simplemente una cronología de nombres, citas, fechas y aspectos más importantes. Esta posibilidad no requiere mucho esfuerzo de estudio, pero debemos ser conscientes que nos proporciona una panorámica parcial de la Historia de las Matemáticas.
- Profundizar en la evolución del pensamiento y en el quehacer matemático. Es una vía altamente interesante. Sin embargo, requiere una sólida formación matemática y humanística. Entre los temas de investigación señalaremos los siguientes:
 1. Las diferentes culturas científico-Matemáticas.
 2. Evolución de los principales conceptos matemáticos.
 3. Nacimiento y Evolución de las distintas Ramas de las Matemáticas: Aritmética, Geometría, Álgebra, Estadística, Análisis Matemático y Cálculo de Probabilidades.
 4. Los hitos más importantes del pensamiento matemático.
 5. Los problemas más interesantes.
 6. Los diversos procedimientos de resolución.
 7. Las Escuelas y Tendencias en Matemáticas.
- Existe también la posibilidad de estudiar la Historia de la Matemática tomando como referencia a sus creadores. Una cuidadosa elección de personajes es esencial para poder ilustrar los momentos matemáticos más

relevantes. Es, sin duda, un camino productivo y, en muchas ocasiones, motivador, ya que conecta con la parte humana de los actores de esa gran obra colectiva del espíritu humano que es la Matemática. Sin embargo, podemos dejar fuera de nuestra selección a muchos personajes cruciales en la Historia de las Matemáticas, lo que puede constituir una dificultad.

- Otro centro de interés es seguir la evolución y desenlace de determinados “problemas matemáticos”. Algunas de las cuestiones que pueden investigarse son las siguientes: a) ¿Cuándo se planteó el problema? b) ¿Quién o quiénes lo plantearon? c) ¿Quiénes lo resolvieron? d) ¿Qué dificultades encontraron en la resolución del problema? e) ¿Se publicaron las soluciones?
- Podríamos profundizar en ciertas ramas de las Matemáticas:
 - ✓ Aritmética.
 - ✓ Álgebra.
 - ✓ Análisis.
 - ✓ Geometría.
 - ✓ Estadística.
 - ✓ Probabilidad.
- Finalmente, nuestro interés se podría centrar en un personaje, en una determinada cultura o en cierto periodo de tiempo. Así, por ejemplo, podríamos tratar: La figura de Euler, las culturas Matemáticas griega, maya o egipcia, el período comprendido entre los siglos XVII y XVIII.



- Cualquiera que sea la opción elegida, se dispondrá de una serie de personajes, hechos, problemas, culturas, que paulatinamente nos ayudarán a comprender mejor la Historia de las Matemáticas.

Sobre el papel de la historia en el proceso de formación del matemático



En este apartado seguimos las directrices de Miguel de Guzmán Ozámiz (1936-2004), matemático universal, el último de los pitagóricos. Es célebre su frase: *El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las matemáticas. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza?*

Un cierto conocimiento de la Historia de la Matemática, debería formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del matemático en general y del profesor de cualquier nivel, primario, secundario o terciario, en particular. Y, en el caso de este último, no sólo con la intención de que lo pueda utilizar como instrumento en su propia enseñanza, sino primariamente porque la historia le puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática.

La perspectiva histórica nos acerca a la Matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante y en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores. Nos aproxima a las interesantes personalidades de los hombres que han ayudado a impulsarlas a lo largo de muchos siglos, por motivaciones muy distintas.

Desde el punto de vista del conocimiento más profundo de la propia Matemática, la Historia nos proporciona un cuadro en el que los elementos aparecen en su verdadera perspectiva, lo que redundaría en un gran enriquecimiento tanto para el matemático técnico, como para el que enseña. El orden lógico no es necesariamente el orden histórico, ni tampoco el orden didáctico coincide con ninguno de los dos. Pero el profesor debería saber cómo han ocurrido las cosas, para:

- Comprender mejor las dificultades del hombre genérico, de la humanidad, en la elaboración de las ideas Matemáticas, y a través de ello las de sus propios alumnos.
- Entender mejor la ilación de las ideas, de los motivos y variaciones de la sinfonía matemática.
- Utilizar este conocimiento como guía saludable para su propia pedagogía.

El conocimiento de la Historia proporciona una visión dinámica de la evolución de la Matemática. Tal visión dinámica nos capacitaría para muchas tareas interesantes en nuestro trabajo educativo:

- Posibilidad de extrapolación hacia el futuro;
- Inmersión creativa en las dificultades del pasado;
- Comprobación de lo tortuoso de los caminos de la invención, con la percepción de la ambigüedad y confusión iniciales.

Por otra parte, el conocimiento de la Historia de la Matemática y de la biografía de sus creadores más importantes nos hace plenamente conscientes del carácter profundamente histórico, es decir, dependiente del momento y de las circunstancias sociales, ambientales del momento, así como de los mutuos



y fuertes impactos que la cultura en general, la Filosofía, la Matemática, la Tecnología, las diversas ciencias han ejercido unas sobre otras.

Desgraciadamente, tanto para el estudiante que desea sumergirse en la investigación matemática como para el que quiere dedicarse a sus aplicaciones a la enseñanza, la Historia de la Matemática suele estar totalmente ausente de la formación universitaria en nuestro país. Sería conveniente que las diversas materias que enseñamos se beneficiaran de la visión histórica, y que a todos nuestros estudiantes se les proporcionara, al menos, un breve panorama global del desarrollo histórico de la ciencia que les va a ocupar toda su vida, así podríamos aconsejar:

- La lectura comprensiva de algunos excelentes tratados de historia que hay en español.
- Acudir, a las fuentes originales, especialmente de los clásicos.
- Leer las biografías de los grandes matemáticos.

Etapas Educativas e Historia de las Matemáticas

Podemos asociar los contenidos matemáticos de las diferentes etapas educativas a un periodo determinado de la Historia de las Matemáticas.

Si se adopta un enfoque muy general, cabe distinguir en la Historia de las Matemáticas cuatro etapas fundamentales, cualitativamente distintas, aunque como es obvio, no es posible trazar fronteras exactas entre ellas ya que sus rasgos fundamentales aparecen de forma gradual.

- La primera etapa es la del Nacimiento de la Matemática como ciencia teórica e independiente, y se extiende desde los albores de la humanidad hasta, aproximadamente, el siglo V a. C. En ella se construyen y dan sus primeros

pasos la Aritmética y la Geometría, que no aparecen separadas, sino íntimamente relacionadas. Las Matemáticas eran entonces un conjunto de reglas aisladas en conexión con la vida real y deducidas de la experiencia; no formaban aún un sistema lógicamente unificado, pues no se hacían demostraciones, aunque se fue evolucionando lentamente hacia ello.

- La segunda etapa puede ser considerada como la de la Matemática Elemental, pero ya construida sobre un sistema lógico, pues cada proposición tiene su demostración correspondiente, y está muy lejos de las recetas que se nos ofrecen en los documentos de los egipcios y babilonios. Este período duró casi 2000 años, y terminó hacia el siglo XVII.

- El tercer período se extiende aproximadamente a lo largo de la segunda mitad del siglo XVII y todo el siglo XVIII, y se caracteriza por el nacimiento y desarrollo del Análisis Matemático.

- La cuarta etapa es la de la Matemática Contemporánea (siglos XIX y XX), que surge tras el desarrollo impresionante de la Matemática en el siglo anterior, y en la que los matemáticos empiezan a encontrar defectos en los fundamentos de un edificio en constante crecimiento, y tratan de analizar con espíritu crítico conceptos que hasta entonces eran considerados como intuitivos. Esta fase podría resumirse en tres puntos: análisis profundo y crítico de todas las nociones, afán sistematizador y fecundidad.

La primera etapa podría resumirse diciendo que comprende los resultados elementales de la Aritmética y de la Geometría y que, a grandes rasgos, constituyen el objeto de la Enseñanza Primaria y parte de la Secundaria Obligatoria. Los más importantes descubrimientos del segundo período y parte del tercero: Geometría Analítica y los inicios del Cálculo Infinitesimal y del Cálculo de Probabilidades, cubren los contenidos de la parte final de la

secundaria obligatoria y del bachillerato. Los resultados básicos del tercer periodo: desarrollo del Análisis Matemático, Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Superior y algunas cuestiones del cuarto periodo, como las Estructuras algebraicas, componen los conocimientos matemáticos de un ingeniero y el primer ciclo de una licenciatura en Matemáticas o en Física. Por último, las ideas y resultados del cuarto período corresponden, fundamentalmente, a las licenciaturas en Matemáticas y, en parte, a Físicas.

Principios didácticos que se derivan del estudio de la Historia de la Matemática

El análisis de la Historia de las Matemáticas puede sugerirnos algunas directrices para el desempeño de nuestra labor docente.

Si nos fijamos, por ejemplo, en el desarrollo del Cálculo Infinitesimal, que nació en el último tercio del siglo XVII de la mano de Newton y Leibniz, y durante todo el siglo XVIII evolucionó de modo espectacular, observamos que los hermanos Bernouilli, D'Alembert, y Lagrange, entre otros, fueron construyendo la teoría mediante un proceso de resolución de problemas en buena parte proporcionados por la Física, para los que crearon métodos particulares.

Se pueden hacer asimismo consideraciones parecidas sobre otras muchas ramas de las Matemáticas en las que se ha ido de lo particular a lo general, de lo concreto a lo abstracto. Sin embargo, en la Enseñanza de las Matemáticas no suele ocurrir así y solemos proceder al revés, como se observa en el ejemplo siguiente.

En muchas ocasiones se presentan a los estudiantes las fórmulas y sus demostraciones antes que ejemplos numéricos de aquéllas, por lo que es bastante

frecuente que algunos pidan explicar “con números” en vez de “con letras”, o nos soliciten poner ejemplos antes de definir un concepto o enunciar una proposición.

Así, en “**Métricas**” de Herón de Alejandría (siglo I d. C.), se actúa de la siguiente forma: “*Hay un método general para encontrar, sin medir perpendiculares (esto es, alturas), el área de un triángulo cualquiera dados sus tres lados*”. Luego, se realiza un ejemplo numérico: el triángulo de lados 7, 8 y 9 y se prueba que el área es $\sqrt{720}$. Después, se realiza la demostración geométrica de que el área del triángulo es:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde a, b, c son las medidas de sus lados y p el semiperímetro. Por último, se concluye con otro ejemplo diferente: el triángulo de lados 13, 14 y 15, cuya área es 84.

La Historia de la Matemática puede contribuir, a que esta se presente de una forma más humana, ya que puede ayudar a:

—Dejar constancia de que lo que se está aprendiendo es fruto de una actividad humana que tiene sus raíces, bien en preocupaciones ligadas a la subsistencia o modo de organización de la sociedad, bien en el intento de dar respuesta a preguntas surgidas en el seno de las Ciencias en general.

—Resaltar las dificultades, anécdotas y ciertos rasgos personales de algunos matemáticos.

—Constatar la cooperación entre los matemáticos para llegar a buenos resultados, y hacer ver que los descubrimientos no son siempre fruto de mentes deslumbrantes de personas aisladas. Por el contrario, han sido obtenidos, con



frecuencia, como consecuencia de la colaboración de muchos, y como fruto de avances sucesivos a lo largo de muchos siglos.

Sin la perspectiva crítica dada por la Historia, los conceptos matemáticos se desnaturalizan, se desconceptualizan y se alejan de la problemática de donde nacieron: se está entonces en presencia del fenómeno que los pedagogos denominan la “**transposición didáctica**”.

De este proceso de “deshistorización”, de “despersonalización” del saber, escribe Chevallard en 1982: *“El saber toma entonces el aspecto de una realidad antihistórica, intemporal, que se impone por sí misma; que no teniendo creador, aparece libre con relación a todo el proceso de génesis, no pudiéndose hacer constar el origen, la utilidad, la pertinencia...”*.

El saber que forma parte del sistema didáctico no es idéntico al saber científico, y su legitimidad depende de la relación que éste establezca desde el punto intermedio en el que se encuentra respecto de los académicos y del saber común de los padres.

Esta distancia, entre el saber a enseñar y el saber científico, es negada porque de dicha negación depende, en parte, la legitimación. La transformación de los conocimientos en su proceso de adaptación supone la delimitación de conocimientos parciales, la descontextualización y finalmente una despersonalización.

A propósito de la despersonalización del saber, señala Chevallard que todo saber, está conectado originalmente con su productor puesto que se encarna en él. Compartir ese saber, aún en el interior de la comunidad académica, supone cierto grado de despersonalización, que constituye un requisito para la publicidad del saber. Por ejemplo, menciona que lo que hoy conocemos como "Mecánica clásica", fue en principio un saber personal (casi esotérico, agrega)

de Isaac Newton. Fueron las presiones de su entorno las que produjeron el nacimiento de los "Principia". Pero sin duda, este proceso que se inicia dentro de la misma comunidad académica, completa su ciclo en el momento de la enseñanza.

El conocer cómo se han forjado poco a poco los conceptos y las notaciones Matemáticas ayuda a veces a comprender mejor ciertos errores de los alumnos, así como a crear situaciones didácticas más adecuadas para un aprendizaje progresivo y fructífero de determinados conceptos matemáticos.

Asimismo, la Historia de las Matemáticas puede suministrar algunos recursos para que los alumnos no cometan errores. Así, en los “*Elementos*” de Euclides aparecen muchas igualdades algebraicas a partir de construcciones geométricas, que nos pueden ayudar a comprender mejor los problemas planteados. En la figura siguiente se muestra un esquema de la obra.

Libro		Contenido	Procedencia
I	Libros de planimetría	Del punto hasta el teorema de Pitágoras	Periodo jónico, principalmente pitagórica
II		Álgebra geométrica	
III		Teoría del Círculo	
IV		Polígonos regulares inscritos y circunscritos	
V	Libros de teoría de números	Extensión de la teoría de las magnitudes a los irracionales	Eudoxo
VI		Proporciones aplicadas a la planimetría	
VII	Libros de teoría de números	Teoría de la divisibilidad, números primos	Pitagóricos
VIII		Números cuadrados y cúbicos, series geométricas	
IX		Teoría de lo par y lo impar	
X	Irracionales	Clases de irracionales cuadráticos Anexión de áreas	Teeteto
XI	Libros estereométricos	Estereometría elemental	Periodo Jónico
XII		Método de exhaustión: pirámide, cono, esfera	Eudoxo
XIII		Poliedros regulares	Teeteto



Arquímedes empleaba un nuevo método: “**el método heurístico**”, que también fue utilizado a lo largo de la historia por otros matemáticos famosos, como Descartes, Leibniz y Bolzano. La Historia de las Matemáticas nos muestra cómo algunos matemáticos importantes usaron este método para hacer sus descubrimientos. Sería conveniente que también se empleara para el aprendizaje de los alumnos. En Geometría sus escritos más importantes fueron:

- *De la Esfera y el Cilindro*, donde introduce el concepto de concavidad, que Euclides no había utilizado, así como ciertos postulados referentes a la línea recta.
- *De los Conoides y Esferoides*, en donde define las figuras engendradas por la rotación de distintas secciones planas de un cono.
- *De las Espirales*, en donde analiza estas importantes curvas y estudia sus elementos más representativos.

En Aritmética son, fundamentalmente, dos los escritos más interesantes:

- *El Arenario*, en el que expone un método para escribir números muy largos dando a cada cifra un orden diferente según su posición.
- *De la medida del Círculo*, una de sus obras fundamentales, donde demuestra que la razón entre la circunferencia y el diámetro está comprendida entre $3 \frac{10}{7}$ y $3 \frac{1}{7}$; dicha relación es conocida en la actualidad por π . Demuestra además, la equivalencia entre el área del círculo y un triángulo rectángulo cuyos catetos son el radio y el perímetro (longitud) de la circunferencia.

Sin embargo, sería prácticamente imposible, recorrer con exactitud la evolución histórica de los conceptos. La ayuda que puede encontrar el profesor en la Historia de la Matemática, no debe convertirse en la realización de un planteamiento historicista regido por criterios de fidelidad histórica. Lo que se debe hacer es extraer de la Historia la problemática que permita redescubrir a los alumnos, a través de su actividad investigadora, los conocimientos que suelen darse con frecuencia totalmente elaborados. La tarea del profesor debe consistir en una reelaboración del material histórico para preparar guías de trabajo asequibles al nivel del grupo, lo que conllevará a simplificaciones y alteraciones del proceso histórico.

Las Matemáticas deben enseñarse relacionándola con la evolución cultural general y con las demás ciencias, haciendo ver que forma parte de la cultura. El conocimiento de la Historia de las Matemáticas, puede contribuir a proporcionar al alumno la conciencia de que la Matemática es uno de los factores de la evolución cultural, y a favorecer el desarrollo de su cultura general.

Esa cultura general, enciclopédica, a la que debe tender la Enseñanza Secundaria, ya fue catalogada durante la Edad Media dentro de las llamadas “Artes Liberales”. Éstas se caracterizaban por requerir principalmente el ejercicio del entendimiento, y eran siete.

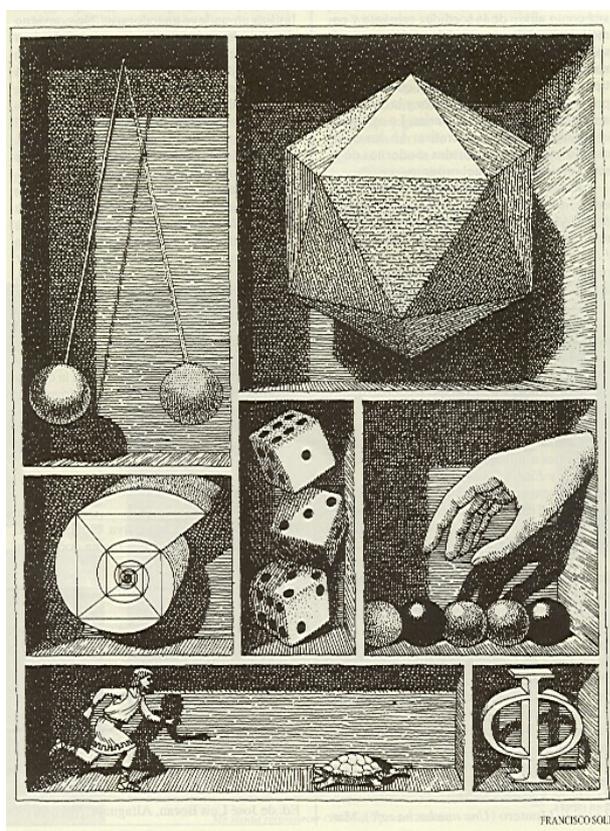
En esa época se hablaba de las “Artes Liberales”, conocimientos a los que debía acceder de manera gradual todo ser humano básicamente instruido. Éstas se dividían en dos grupos: “el *Trivium* (la triple vía) y el *Cuadrivium* (la cuádruple vía).



Al *Trivium* correspondían: La Gramática, la Dialéctica y la Retórica, y al *Cuadrivium*: La Aritmética (estudio de los “números en reposo”), la Geometría, la Música y la Astronomía (“magnitudes en movimiento”).

Con las tres primeras se aprendía a pensar y razonar debidamente por medio del conocimiento y significado de la lengua (Gramática), la coherencia lógica de la misma (Dialéctica), y finalmente, por su aplicación al discurso y la palabra (Retórica), verdaderos soportes y vehículos todos ellos del pensamiento. Sólo a través del *Trivium*, de las palabras, voces y nombres de las cosas, podía accederse a las Ciencias del *Cuadrivium*, que eran superiores a aquéllas por cuanto que expresaban, y expresan, un conocimiento más esencial y profundo.

Las cuatro Ciencias del *Cuadrivium* se referían directamente al estudio de los ritmos y de los ciclos, de la proporción y la medida, que como sabemos conforman la estructura prototípica de todas las cosas.



Se trataba entonces de dar una formación integral y generalista, algo cada vez más en desuso; la Historia de la Matemática, sin embargo, puede ser uno de los elementos que contribuyan a renacer ese ideal.

Las dos ramas iniciales de la Matemática: Aritmética y Geometría, nacieron para resolver problemas de la vida ordinaria; la primera por la necesidad del empleo de los números para contar y efectuar transacciones comerciales, y la segunda para realizar

todo tipo de mediciones. Sin embargo, las Matemáticas se desarrollaron inicialmente, y así transcurrieron a lo largo de los siglos, por dos razones fundamentales: Para resolver necesidades sociales o de la vida cotidiana y como ayuda o complemento en otras ciencias.

Para finalizar, del artículo “*Matemáticas y Sociedad. Acortando distancias*”, de Miguel de Guzmán Ozámiz, extraemos las siguientes reflexiones sobre la Matemática.

Es una actividad creadora de belleza, en la que se busca una cierta clase de belleza intelectual, solamente accesible, como Platón afirmaba, a los ojos del alma, y en esto consiste en el fondo la fuerza motivadora y conductora siempre presente en los esfuerzos de los grandes creadores de la matemática.

Es un potente instrumento de intervención en las estructuras de la realidad a nuestro alrededor, ayudando en la aplicación de modelos fidedignos al mundo tanto físico como mental. En realidad bien se puede afirmar que la mayor parte de los logros de nuestra tecnología no son sino matemática encarnada con la mediación de otras ciencias.

Es una actividad profundamente lúdica, tanto que en los orígenes de muchas de las porciones más interesantes de la matemática el juego ha estado presente de forma muy activa (teoría de números, combinatoria, probabilidad, topología,...).

Esta intensa presencia de la matemática en nuestra cultura no es algo que vaya a menos, sino todo lo contrario. A juzgar por las tendencias que se manifiestan cada vez con más fuerza, parece claro que el predominio de la intuición matemática va a ser un distintivo bien patente de la civilización futura.

Referencias Bibliográficas

- Aleksandrov, A. y otros (1979). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. V.1. Madrid: Alianza Universidad.
- Baumgart, J. y otros (1969, 1989). *Historical Topics for the Mathematics Classroom*. Reston, Virginia: NCTM.
- Boero, P. (1989). Utilización de la Historia de las Matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años. *Suma*, vol. 1(2), 17-28.
- De Guzmán, M. (2002). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. <http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/tendencia/ensen.htm>.
- De Guzmán, M. *Matemáticas y Sociedad. Acortando distancias*. <http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/cipra.htm>.
- De Guzmán, M. <http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman>.
- Fernández, S. (2001). *La Historia de las Matemáticas en el aula*. Uno, vol. 26, 9-27.
- González, P. (1991). Historia de la Matemática: Integración cultural de las Matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 9 / n° 3, 281-289.
- <http://www.arrakis.es/~mcj/arquimed.htm>. Gacetilla Matemática. Historias. Arquímedes de Siracusa.
- Kilpatrick, J.; Rico, L.; Sierra, M. (1994). *Educación Matemática e Investigación*, Madrid: Síntesis.
- Larios, V. (1999). Contextos históricos de la ciencia en clase. *Revista Gaceta COBAQ*. Año XVI, 137, páginas 7-9.
- Massa, M. R.; Romero, F.; Casals, M. A. (2004). La Historia de las Matemáticas en la Enseñanza de la Trigonometría. El Teorema de Pitágoras. <http://www.ma1.upc.edu/recerca/reportsre/0304/rep030402massa.pdf>
- Maza, C. (1994). Historia de las Matemáticas y su enseñanza: Un análisis. *Suma*, n° 17, 17-26.
- Méndez, J. (2003). *Las Matemáticas: su historia, evolución y aplicaciones*. Serie Lecciones Inaugurales / 6. Universidad de La Laguna.
- Peralta, J. (1995). *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática*. Madrid: Huerga y Fierro.
- Rey, J.; Babini, J. (1986). *Historia de la Matemática*, V. I-II, Barcelona: Gedisa.

- Rico, L. y Sierra, M (1994). *Educación Matemática en la España del siglo XX*. En: J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra, *Educación Matemática e Investigación*, 99-207, Madrid. Síntesis.
- Rodríguez, R. (1985). Notas históricas y lúdicas en la clase de Matemáticas. *Aspectos didácticos de Matemáticas*, *Educación Abierta* 57, ICE Universidad de Zaragoza, 91-104.
- Sancho, J. (1990). Posibles usos de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas. *Aspectos Didácticos de Matemáticas*. 3, *Educación Abierta* 86, ICE Universidad de Zaragoza, 77-101.
- Sierra, M. (1997). *Notas de Historia de las Matemáticas para el currículo de Secundaria*. En: L. Rico (ed.): *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria*, pp. 179-194, Horsori-ICE, Universitat de Barcelona.
- Sierra, M. (2000). *El papel de la Historia de la Matemática en la enseñanza*. En: A. Martínón (ed.): *Las Matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos*, 93-96. Madrid: Monografías de Editorial Nívola sobre Historia de las Matemáticas.
- Wussing, H; Arnold, W. (1989). *Biografías de grandes matemáticos*. Prensas Universitarias, Universidad de Zaragoza.
- Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Madrid: Siglo XXI de España Editores.

