

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN  
RESEARCH REPORT

# Aportes, alcances y limitaciones de los enfoques de resolución de problemas de George Pólya, Alan H. Schoenfeld y Frederick Reif en el aprendizaje de las matemáticas

*Contributions, Scope, and Limitations of the Problem-Solving Approaches of George Pólya, Alan H. Schoenfeld and Frederick Reif in Mathematics Learning*

**LORENZO JULIO MARTÍNEZ HERNÁNDEZ**

Candidato a doctor en Educación, magíster en Ciencias - Matemática Aplicada, magíster en Enseñanza de la Matemática, especialista en Estadística, especialista en Docencia Universitaria y licenciado en Matemáticas y Física. Profesor de Matemáticas Básicas y Diseño de Experimentos de la Universidad de Caldas (Colombia). Clasificado como Investigador Asociado por Colciencias en el año 2019 y como Investigador Junior en el año 2023. Sus principales líneas de investigación y en las que ha realizado publicaciones son el Análisis de Datos Experimentales y la Didáctica de la Matemática.

lorenzo.Martínez\_H@Ucaldas.edu.co

orcid: <https://orcid.org/0000-0001-5097-694X>.

**FRANCISCO JAVIER RUIZ ORTEGA**

Doctor en Didáctica de las Ciencias y las Matemáticas, magíster en Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas, magíster en Educación y Desarrollo Humano, licenciado en Biología y Química. Profesor titular de la Universidad de Caldas (Colombia) en el pregrado de Licenciatura en Biología y Química. Clasificado como Investigador Sénior por Colciencias. Director del Doctorado en Didáctica de la Universidad de Caldas. Sus principales líneas de investigación y en las que ha realizado publicaciones son la Didáctica de las ciencias Naturales y la Didáctica de las Matemáticas. .

francisco.ruiz@ucaldas.edu.co

Orcid: <http://orcid.org/0000-0003-1592-5535>.

CVLAC: [https://scienti.minciencias.gov.co/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod\\_rh=0000161993](https://scienti.minciencias.gov.co/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod_rh=0000161993).



## RESUMEN

Este artículo tiene como objeto analizar los aportes, alcances y limitaciones en el aprendizaje de las matemáticas de los enfoques de resolución de problemas de George Pólya, Alan H. Schoenfeld y Frederick Reif. Primeramente, se sintetizan las principales ideas de estos autores en sus obras atinentes a la resolución de problemas matemáticos, y también se abordan algunos procesos de orden metacognitivo en los estudiantes, principalmente la regulación metacognitiva. Lo anterior está orientado a que tanto docentes como estudiantes desarrollen procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de manera más consciente e intencionada. Entre los resultados obtenidos se tiene que George Pólya planteó cuatro etapas para la resolución de un problema; de forma similar, Alan H. Schoenfeld discriminó cuatro dimensiones; mientras que Frederick Reif aborda la resolución de problemas desde el contexto de la física a través de dos reglas generales, fusionadas en una estrategia de cinco fases.

**Palabras clave:** aprendizaje de las matemáticas, resolución de problemas, procesos metacognitivos.

## ABSTRACT

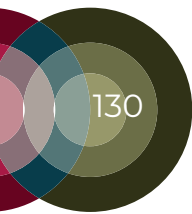
This article aims to analyze the contributions, scope and limitations in learning mathematics taking into account the problem-solving approaches of George Pólya, Alan H. Schoenfeld and Frederick Reif. First, the main ideas of these authors are synthesized in their works related to solving mathematical problems, and some metacognitive processes in students are also addressed, mainly metacognitive regulation. The foregoing is aimed at both teachers and students, develop teaching and learning processes of mathematics in a more conscious and intentional way. Among the results obtained, George Pólya proposed four stages to solve a problem; similarly, Alan H. Schoenfeld discriminated four dimensions; while Frederick Reif approaches problem solving from the context of physics through two general rules, merged into a five-phase strategy.

**Keywords:** learning mathematics, problem solving, metacognitive processes.

### Como citar este artículo:

Martínez Hernández, L. y Ruiz Ortega, F. (2023). Aportes, alcances y limitaciones de los enfoques de resolución de problemas de George Pólya, Alan H. Schoenfeld y Frederick Reif en el aprendizaje de las matemáticas. *Zona Proxima*, 39, 128-146.

Recibido: 29 de enero de 2022  
Aprobado: 16 de marzo de 2022



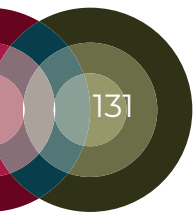
## INTRODUCCIÓN

La matemática es una de las áreas fundamentales que forma parte del currículo en los primeros años tanto en la escuela como en muchos programas de formación profesional; por ello, una preocupación recurrente en el ámbito de la didáctica está estrechamente ligada con la implementación de estrategias didácticas y de metodologías que optimicen los procesos de enseñanza y de aprendizaje de conceptos matemáticos; por ejemplo, en las últimas décadas la resolución de problemas se ha constituido en una herramienta didáctica muy significativa para el desarrollo de habilidades y de pensamiento matemático entre los estudiantes, puesto que permite al educando enfrentarse a situaciones y problemas que “en teoría como en la práctica” deberá resolver (Pérez y Ramírez, 2011).

Dado lo anterior, la resolución de problemas matemáticos es uno de los aspectos más valiosos de la educación matemática (Tzohar y Kramarski, 2014); desde el siglo XVII René Descartes ya había considerado la existencia de reglas básicas para la resolución de problemas (Santos, 1999), sin embargo, los trabajos en este contexto académico alcanzaron mayor grado de aceptación y refinación a partir de la última mitad del siglo XX, con los postulados de tres importantes teóricos que aún mantienen vigencia en el contexto del aprendizaje de las matemáticas: George Pólya, Alan H. Schoenfeld y Frederick Reif.

Se puede afirmar que, de estos tres, el precursor de la teoría de resolución de problemas matemáticos en el último siglo fue George Pólya, matemático húngaro, destacado por sus aportes en heurística y educación matemática, quien en su trabajo *¿Cómo plantear y resolver problemas?*, cuyo título original es *How to solve it?* (1965), publicado en años de la postguerra, planteó estrategias que contribuyeran no sólo a la solución de problemas matemáticos sino a problemas de la vida cotidiana. Posteriormente, Alan Henry Schoenfeld, investigador y diseñador estadounidense de educación matemática, publicó su libro *Mathematical Problem Solving* (1985), basado en sus trabajos realizados en los años 80 y refutando algunos de los postulados de la teoría de resolución de problemas de Pólya. Finalmente, Frederick Reif, físico estadounidense, abordó el enfoque de resolución de problemas desde el aprendizaje de la física, ciencia que necesariamente necesita de las matemáticas para existir.

En este artículo de reflexión teórica, además de sintetizar las principales ideas de los autores antes mencionados, teniendo en cuenta sus trabajos o principales obras sobre resolución de problemas, se intenta relacionar cómo cada una de sus propuestas puede reforzar la idea de que al resolver problemas también se promueve de manera implícita o explícita el desarrollo de procesos metacognitivos en el estudiante, específicamente, el desarrollo de regulación metacognitiva, que

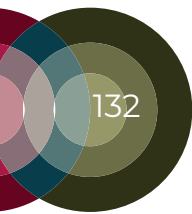


quisiéramos se dé siempre de manera explícita y permitir “una meditación y análisis más intenso de las operaciones mentales y pensamientos escudriñando una mayor certeza y validez al resolver problemas matemáticos” (Bolívar, 2016, p. 20). En este sentido, se presentará inicialmente, para cada uno de los autores mencionados, las reflexiones sobre los procesos de resolución de problemas y, al finalizar, se expondrá cómo dicho proceso puede estar articulado a la regulación de orden metacognitivo. Lograr esta articulación seguramente ayudará a que tanto docentes como estudiantes desarrollen procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de manera más consciente e intencionada.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

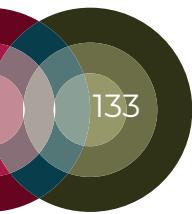
Según Soto (2019), “la historia de la resolución de problemas matemáticos puede dividirse en dos grandes etapas delimitadas por la aparición de los trabajos de Polya en 1945” (p. 921). A partir de sus experiencias como matemático y profesor, con la finalidad de bosquejar algunas recomendaciones para docentes y estudiantes de matemáticas (Barrera et al., 2021), George Pólya aportó a la teoría de resolución de problemas matemáticos, principalmente a través de la formulación de varios interrogantes que plantea en su obra *How To Solve It?* (Pólya, 1965), en la que señala que estas cuestiones son necesarias para estimular el pensamiento de quien confronta el problema, las cuales se sintetizan en 4 etapas:

- i. *Comprender el problema.* Esta etapa tiene gran relevancia, debido a que es imposible iniciar con la resolución de un problema sin haber comprendido el enunciado planteado (Amasifuén, 2022). Pólya (1965) manifiesta que en esta etapa se deben plantear algunos interrogantes, los cuales son: “¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos? ¿Cuáles son las condiciones?, ¿Podría enunciar el problema de otra forma?” (Oliveros et al., 2021, p. 3). Generalmente, esta etapa es una de las más complejas de superar; lo primero que el estudiante debe hacer es entender lo que se pide. Comprender qué se quiere resolver seguramente permitirá a los estudiantes proyectar su trabajo hacia el reto de satisfacer ese desconocimiento, duda o dificultad propuesta en el problema (Pérez y Ramírez, 2011). En esta primera etapa, muchas veces se cometen errores al abordar el problema cuando este no ha sido comprendido en su totalidad, lo que puede llevar a ejecutar un procedimiento de solución inadecuado. Es de considerar también que no todos los problemas revisten la misma complejidad en su comprensión, ya que en algunos, por ejemplo, se acentúa más la relación lenguaje-matemáticas y requieren mayores destrezas lingüísticas. Adicionalmente, la importancia de esta etapa se puede notar en el hecho de que algunos estudios sobre el tema muestran que “los expertos dedican más tiempo en la fase de entendimiento del problema que los estudiantes y esto repercute en el éxito al intentar resolverlo”



(Santos, 1999, p. 17). Teniendo en cuenta todo lo anterior y de acuerdo con Santos et al. (2018), “En esta fase es necesario utilizar un pensamiento lateral (divergente) mediante el cual se puede visualizar, conocer o comprender el problema” (p. 11).

- ii. *Concebir un plan.* En esta etapa se realiza un trabajo mental (intelectual) que se denomina proceso cognitivo (Santos et al., 2018). La aproximación a la concepción de un plan está asociada a la recordación de algún problema similar al planteado, o con una incógnita similar, que pueda sugerir algunos elementos metodológicos para encontrar una ruta hacia la resolución del problema. Según Pólya (1965), citado por May-Cen (2015, p. 1), “Esta es la forma en que se construye el conocimiento (...) sobre lo que alguien más ha realizado”. La concepción del plan para la resolución de un problema en sí misma es una habilidad que el estudiante puede fortalecer gradualmente con ayuda y guía del profesor durante los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas (Oliveros et al., 2021); esto se puede llevar a cabo “a través de preguntas y sugerencias para que el alumno se vaya formando alguna idea que poco a poco puede ir tomando forma hasta lograr completar el plan que le llevará a la solución del mismo” (Pérez y Ramírez, 2011, p. 180).
- iii. *Ejecución del plan.* Según Pólya (1984), citado por Pérez y Ramírez (2011, p. 180), la ejecución del plan “se refiere al proceso donde el estudiante deberá aplicar el plan que ha concebido, para ello hace falta que emplee los conocimientos ya adquiridos, haga uso de habilidades del pensamiento y de la concentración sobre el problema a resolver”. Aunque la ejecución del plan se da por parte del sujeto o estudiante, en el entorno de aprendizaje de las matemáticas es importante el acompañamiento por parte del profesor durante esta etapa, ya que, aunque exista un sendero definido para llegar a una solución, no se está libre de errores de procedimiento durante la ejecución; por lo que es importante “que se vaya verificando cada paso que se ejecute del plan” (Oliveros et al., 2021, p. 3).
- iv. *Examinar la solución obtenida.* En este último paso se evalúa el resultado o la solución del problema “con el fin de trascender o retroalimentar en la solución del mismo” (Santos et al., 2018, pp. 11-12); en esta instancia, según Pólya (1965, p. 19), citado por May-Cen (2015), cabe el interrogante “¿Puede emplear este resultado o el método en otro problema?”. También es pertinente la pregunta ¿se puede obtener este resultado en forma diferente? Este último cuestionamiento cobra mayor importancia en problemas en los que la ejecución del plan concebido lleva mucho tiempo o reviste mayor complejidad de la esperada; es entonces cuando se debe sugerir revisar de nuevo el problema a través de los pasos anteriores, a fin de agotar la posibilidad de otra solución más sencilla.



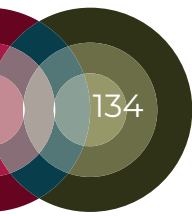
Es pertinente afirmar, entonces, que los pasos anteriormente mencionados configuran el principal aporte de George Pólya en el aprendizaje de las matemáticas desde el enfoque de resolución de problemas a través de su obra; por medio de la cual el autor inició la formación del profesor de matemáticas posmoderno que requieren las escuelas de hoy, que no sólo enseñe matemáticas de fórmulas y procedimientos, sino que utilice las ciencias exactas para estimular el pensamiento, el ingenio, la creatividad, para lograr la resolución de problemas reales (May-Cen, 2015).

Desde lo planteado hasta este punto, los cuatro momentos o etapas propuestas por Pólya innegablemente se pueden articular a un proceso de pensamiento indispensable en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas y de cualquier otra disciplina: la regulación. Referirnos a este proceso es hacer mención, primero, a la metacognición, entendida como el proceso reflexivo que lleva al conocimiento y comprensión de los propios procesos de orden cognitivo que conducen al aprendizaje, más que a la comprensión de lo que se aprende; además, es un mecanismo que brinda al sujeto herramientas para la selección de estrategias y recursos pertinentes para el desarrollo de las tareas propuestas (Efklides, 2009; Núñez et al., 2009).

Análogamente, en el contexto práctico de resolución de problemas, la metacognición, según Brown (1987), está asociada a aquellas habilidades ejecutivas que contribuyen a predecir, verificar, monitorear, probar la realidad y coordinar y controlar los intentos deliberados de aprender o resolver problemas, y su uso en el momento y lugar adecuados.

Dentro de la metacognición existe una dimensión macro que puede vincularse a las etapas de Pólya: la regulación (relacionada con el conocimiento, la conciencia del sujeto y las otras dimensiones metacognitivas), la cual desde la actividad de resolver un problema, según Tzohar y Kramarski (2014), se refiere a un conjunto de actividades que ayudan a los estudiantes a planificar, monitorear y evaluar su propio trabajo. En esta dimensión, la planeación, el monitoreo y la evaluación son acciones fundamentales, que permiten al sujeto concientizarse del porqué y el para qué de sus acciones y, con ello, seleccionar estrategias pertinentes para enfrentar el propósito de la tarea planteada.

En la *planificación* (comprensión del problema y concepción del plan, teniendo en cuenta los postulados de Pólya), el estudiante reflexiona sobre el alcance de la tarea, propone estrategias, para él pertinentes, y selecciona, de igual manera, recursos. En el *monitoreo y ejecución* (ejecución del plan para Pólya) se espera que cada estudiante mantenga la concentración y el interés al aplicar las estrategias y utilizar los recursos seleccionados en la etapa de planeación. En la etapa de *evaluación* (examinar la solución obtenida para Pólya) no sólo se verifica el logro obtenido, sino



también la pertinencia de las estrategias y recursos utilizados y la posibilidad de enfrentar nuevas problemáticas con nuevas estrategias si su balance así lo define.

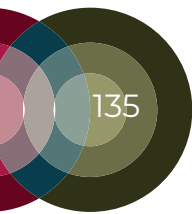
Así como se identifican similitudes, también es importante exponer puntos que pudieran considerarse adicionar a las etapas propuestas por Pólya y que exhiben oportunidades de enriquecimiento, más que como falencias, para quienes decidan utilizar la perspectiva de Pólya en los ambientes de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.

Las etapas de resolución de problemas propuestas por Pólya, como se viene ratificando, permiten establecer logros y metas para el problema propuesto, verificar la pertinencia de la estrategia y, muy posiblemente, establecer otras para próximas tareas, sin embargo, podrían enriquecerse con el desarrollo de los procesos metacognitivos y de autorregulación del aprendizaje actual. Primero, establecer junto a los logros y metas del desarrollo del problema, criterios claros y concretos de evaluación de los procesos; segundo, permitir la conciencia y, posiblemente, el control de aspectos de orden motivacional y emocional de los sujetos con el desarrollo de la tarea; y tercero, promover la autoobservación y autocontrol, mediante la expresión de los denominados juicios metacognitivos, que impactarían los procesos de transformación y mejora de los desempeños (Zimmerman y Moylan, 2009).

A partir del fundamento pedagógico de George Pólya, que se puede considerar uno de sus aportes de mayor trascendencia, es pertinente afirmar que este autor abrió camino para las teorías subsiguientes sobre resolución de problemas en el último siglo, ya que otros autores las han construido con base en la obra de Pólya, y si bien es cierto que en este proceso han surgido algunas diferencias conceptuales por parte de otros teóricos, quizás sin las bases cimentadas por Pólya en este contexto, el desarrollo actual de las teorías de resolución de problemas matemáticos no tendría hoy el mismo alcance. En este sentido, uno de esos autores críticos de los planteamientos de Pólya y enriquecedor de la teoría de resolución de problemas es Alan H. Schoenfeld, quien en su obra *Mathematical Problem Solving* señala cuatro dimensiones para considerar al momento de resolver un problema matemático; Schoenfeld en algunas de ellas refuta elementos planteados por Pólya para resolver un problema matemático.

Las dimensiones consideradas por Schoenfeld son las siguientes:

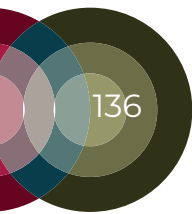
- i. *Recursos*. En el enfoque de resolución de problemas matemáticos, los recursos se definen como los conocimientos previos que posee el individuo; se refieren, entre otros, a conceptos, fórmulas, algoritmos, y en general, todos los conceptos que se consideren necesarios saber para enfrentarse a un problema (Barrantes, 2006; Plaza y González, 2019). Análogamente, Santos (1999) manifiesta que esta dimensión relacionada con



el dominio del conocimiento “incluye definiciones, hechos y procedimientos usados en el dominio matemático” (p. 22). Ahora bien, es fácil deducir que de la calidad de los recursos depende en gran medida el éxito en la resolución del problema, y aunque en el proceso de aprendizaje de las matemáticas enfocado en la resolución de problemas juega un papel importante la orientación del profesor, el estudiante debe tener una base de recursos propios para abordar el problema.

- ii. *Heurísticas*. Las heurísticas son técnicas o reglas muy generales que nos permiten avanzar en el proceso de resolución de problemas; pueden incluir métodos tales como descomponer el problema en simples casos, establecer metas relacionadas, invertir el problema, dibujar diagramas, entre otras (Santos, 1999); en otras palabras, según Schoenfeld (1985) citado por Pérez y Beltrán (2009, p. 111), “En esta dimensión se ubican las estrategias generales que pueden ser útiles en la resolución de un problema”. Adicionalmente, Schoenfeld considera que hay una problemática con las heurísticas en el trabajo de Pólya, y es que prácticamente cada tipo de problema necesita de ciertas heurísticas particulares (Barrantes, 2006; Plaza y González, 2019). Esta controversia se generó a partir del hecho de que algunos estudios realizados por Schoenfeld mostraron que las ideas de Pólya no estaban funcionando en el salón de clases. La razón obedece a que según Schoenfeld (1985), citado por Santos (1999), los métodos heurísticos propuestos por Pólya no son realmente coherentes.
- iii. *Control*. Esta dimensión se refiere a las estrategias metacognitivas o el monitoreo o autoevaluación donde el alumno controla el proceso utilizado al resolver un problema (Plaza y González, 2019). En palabras del autor, para Schoenfeld (1985), citado por De Faria (2006, p. 1), “el control trata sobre la forma en que el individuo usa la información que posee al resolver un problema (distribución de recursos) e incluye las decisiones importantes que se toman acerca de qué hacer en un problema”. Adicionalmente, la dimensión “control” involucra diferentes fases para tener en cuenta según De Faria (2006): 1) Tener claridad acerca de lo que trata el problema antes de empezar a resolverlo (fase de entendimiento del problema). 2) Considerar varias formas de resolver el problema y seleccionar un método específico (fase de diseño). 3) Monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar algún camino que no sea exitoso (fase de implantación). 4) Revisar el proceso de resolución y evaluar la respuesta obtenida (fase de revisión y comprobación).
- iv. *Sistema de creencias*. Las creencias afectan muchos aspectos de nuestras vidas, incluyendo la resolución de problemas matemáticos. Algunas de las creencias que Schoenfeld manifiesta que los estudiantes tienen sobre las matemáticas son: que los problemas matemáticos tienen una y solo una única respuesta correcta; la existencia de una única manera correcta para resolver cualquier problema; que las matemáticas





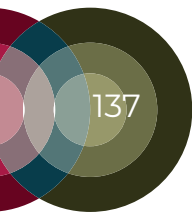
aprendidas en la escuela poco tienen que ver con el mundo real, entre otras. Sin embargo, las creencias en este contexto no son exclusivas de las estudiantes, ya que hasta los profesores tiene sus propias creencias, las cuales generalmente vienen interiorizadas desde su propio proceso de aprendizaje de las matemáticas en la formación docente o desde la escuela; también se deben tener en cuenta las creencias respecto al aprendizaje de las matemáticas y resolución de problemas de acuerdo con el contexto sociocultural (Barrantes, 2006, p. 6). Ahora bien, las creencias afectan considerablemente las formas en que los estudiantes y profesores abordan la resolución de problemas (Plaza y González, 2019); e inciden en las demás dimensiones planteadas por Schoenfeld, por ejemplo: “Los alumnos que tienen unas creencias rígidas y negativas de las matemáticas y su aprendizaje, fácilmente se convertirán en aprendices pasivos, ya que cuando aprenden, enfatizan la memoria sobre la comprensión” (De Faria, 2008, p. 12).

Adicional a estas dimensiones, otra consideración importante en el trabajo de Schoenfeld es que en el estudio de las matemáticas enfocado en la resolución de problemas, los estudiantes deben reconocer algunos principios epistemológicos, entre los cuales están:

- i. Encontrar la solución de un problema matemático no es el final de la empresa matemática, sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones, generalizaciones de ese problema (Santos, 1999, p. 22).
- ii. Aprender matemáticas es un proceso activo que requiere discusiones de conjeturas y pruebas, el cual puede guiar a los estudiantes al desarrollo de nuevas ideas; además, es necesario considerar actividades de aprendizaje que sean consistentes con los principios epistemológicos (Santos, 1999).

Las dimensiones propuestas por Schoenfeld a partir de su trabajo atinente al enfoque de resolución de problemas matemáticos, también son susceptibles de análisis desde la perspectiva de los procesos metacognitivos que se encuentran inmersos en un problema; en este escenario se pueden discriminar tres procesos en las operaciones de autorregulación de orden jerárquico en la metacognición; esto hace referencia a todas las actividades que el ser humano lleva a cabo de forma autónoma para controlar todo lo que realiza y aprende; estos procesos son: **planeación, monitoreo y evaluación**.

Primeramente es necesario tener en cuenta que los procesos metacognitivos son los que sistematizan las labores cognitivas, las cuales en un evento de resolución de problemas, por ejemplo, si la persona concibe, examina o monitorea mientras soluciona el problema, es factible que logre adicionar los procesos metacognitivos a esta solución, ya que son un elemento fundamental del

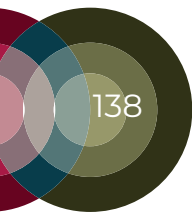


componente afectivo; forjando de las creencias de cada individuo posibles principios predominantes de sus pensamientos y actitudes, tal como lo testifica Schoenfeld (1992) en el momento de resolver problemas matemáticos (Bolívar, 2016).

Teniendo en cuenta lo anterior, y que la regulación metacognitiva se refiere al conjunto de actividades que ayudan al estudiante a controlar su aprendizaje (Tamayo, 2006), es pertinente afirmar que los procesos metacognitivos permiten a los estudiantes ser conscientes de qué técnicas o estrategias son más útiles al momento de resolver un problema; de esta forma, la **planeación** corresponde a las disposiciones y estrategias que se llevan a cabo para poder resolver el problema, es decir, búsqueda de estrategias para cumplir con la resolución del problema, una vez identifica la situación vinculada con este (López, 1992, citado por Bolívar, 2016). Es válido considerar, entonces, que dentro de un proceso de planeación se considere, en primer lugar, los *recursos* que se tienen para resolver un problema, siendo precisamente los recursos la primera dimensión que plantea Schoenfeld. Según Santos (1999), en esta primera fase de acercamiento hacia el problema es importante reflexionar en cuestiones tales como “qué se pide”, “qué se tiene” y “a donde se quiere llegar”. En segundo lugar, según Schoenfeld (1992), citado por De Jesús (2020), se deben considerar como factores que intervienen en el proceso de resolución de problemas: las estrategias cognitivas o *heurísticas*, que involucran formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución; las estrategias metacognitivas, que involucran conocimiento acerca del funcionamiento cognitivo propio del individuo (¿Qué necesito?, ¿cómo utilizo ese conocimiento?), y estrategias de monitoreo y control del propio proceso cognitivo (¿qué estoy haciendo?, ¿por qué lo hago?, ¿a dónde voy?).

Respecto a los procesos de **Monitoreo y evaluación**, se pueden asociar con la dimensión de *control*, en la cual la persona que está resolviendo el problema debe contar con la habilidad para monitorear y evaluar el proceso. Respecto a esta dimensión, Schoenfeld señala que es, también, conocimiento de sí mismo: la persona que está resolviendo el problema debe saber qué es capaz de hacer, con qué cuenta, o sea, conocerse en cuanto a la forma de reaccionar ante esas situaciones (Carreño et al., 2017).

El mismo Schoenfeld en sus trabajos prácticos atinentes a su enfoque sobre resolución de problemas matemáticos “incluyó un conjunto de estrategias de monitoreo. (...) Estas contienen preguntas en las cuales los estudiantes tienen que evaluar las decisiones tomadas en el proceso de resolver problemas” (Santos, 1999, p. 21). Además de los anterior, según Santos (1999), en los trabajos de Schoenfeld, este plantea que “estrategias metacognitivas se relacionan con el monitoreo empleado



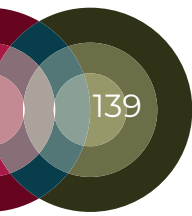
al resolver el problema, por ejemplo, el proceso de selección de una estrategia y la necesidad de cambiar de dirección como resultado de una evaluación permanente del proceso” (p. 22).

Finalmente, la evaluación, realizada al final de la tarea, se refiere a la naturaleza de las acciones y decisiones tomadas por el aprendiz; evalúa los resultados de las estrategias seguidas en términos de eficacia (De Jesús, 2020). Respecto a este proceso, algunos autores distinguen y diferencian las estrategias de evaluación de las demás estrategias cognitivas y las consideran como estrategias metacognitivas que controlan la eficiencia de las acciones cognitivas en los procesos de resolución de problemas (Rocha-Silva, 2006).

Ahora, sobre la dimensión: sistema de creencias de Schoenfeld, no la ubicamos de manera específica en una de las tres etapas de regulación metacognitiva. La razón que nos lleva a este planteamiento es que “las creencias establecen el contexto en el cual los recursos matemáticos y metacognitivos y las heurísticas operarán” (Hidalgo et al., 2015, p. 69); en otras palabras, las creencias condicionan el porqué y el para qué del uso de los recursos y de las heurísticas que el sujeto identifica como necesarias para la resolución del problema. En el campo metacognitivo, las creencias podrían llamarse conocimiento estratégico del individuo, una dimensión que sobrepasa la regulación metacognitiva y se ubica en la dimensión de la conciencia metacognitiva, pues requiere, además del dominio de estrategias y procedimientos, su uso intencional y consciente articulado a las metas y demandas de la tarea (Pozo, Monereo y Castelló, 2001).

El tercer autor que decidimos poner en contraste para los procesos de resolución de problemas es Frederick Reif, quien en sus trabajos sobre este tema describe un estudio sistemático de habilidades para resolver problemas en física básica. También analiza cómo se utilizan observaciones detalladas de individuos para formular modelos para los procesos de resolución de problemas en mecánica y aplicaciones para la enseñanza universitaria básica de física o cursos de ingeniería.

Reif (2008) en su libro “Applying Cognitive Science to Education – Thinking and learning and other Complex Domain” manifiesta que resolver un problema puede ser difícil y requiere de la toma cuidadosa de decisiones; por ello propone una estrategia ventajosa para la solución de problemas basada en dos reglas generales que facilitan resolver tareas más complejas. La primera regla consiste en “divide y vencerás”, es decir, cualquier tarea compleja se puede realizar más fácilmente si se descompone en partes más sencillas de manejar o de manipular; más exactamente, es muy útil descomponer un problema en subproblemas, entendido un subproblema como aquel cuya solución aporta a la solución del problema original; este proceso de descomposición se puede llevar a cabo de manera iterada hasta donde se considere pertinente. La segunda regla denominada, “aproximaciones sucesivas”, plantea que a menudo es difícil lograr una meta como



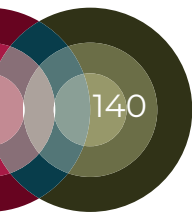
resultado de un solo esfuerzo mayor. En cambio, un problema puede abordarse más gradualmente mediante un proceso de aproximaciones sucesivas, en el que cada aproximación obtenida se acerca gradualmente a la solución deseada.

Las dos anteriores reglas son fusionadas en la siguiente estrategia básica, que consta de cinco pasos, para solución de problemas:

- i. *Descripción del problema*, esta fase inicial de la estrategia permite producir una descripción clara del problema; aunque sea algo relativamente fácil, es un prerequisite esencial para los pasos posteriores.
- ii. *Análisis del problema*, esta segunda fase de la estrategia ubica el problema en una forma que facilite las subsecuentes construcciones de su solución. Respectivamente, en esta fase se intenta identificar el conocimiento útil para resolver el problema, analizando más teóricamente y, finalmente, proveyendo una descripción más analítica del mismo.
- iii. *Construcción de una solución*, esta tercera fase es crítica y algo compleja, puesto que se intenta obtener la solución real del problema; en este punto es necesario la partición del problema en subproblemas cuidadosamente escogidos.
- iv. *Comprobación del resultado*, esta fase de la estrategia permite verificar si la solución obtenida en la fase precedente es o no es correcta y además útil. Respectivamente, suministra criterios más generales para chequear la solución, si la solución de alguna manera es insatisfactoria, deben revisarse los pasos anteriores.
- v. *Aprovechamiento de la solución*, esta fase de la estrategia no es necesaria para la solución de un problema particular, sin embargo, es probable que se tengan objetivos ulteriores más allá de la solución del problema.

Además de esto, según Guisasola et al. (2007) para facilitar la resolución de problemas desde la perspectiva de Reif, se consideran de gran interés los siguientes factores: una organización jerárquica del conocimiento que facilite la elección de la vía de resolución y la adquisición previa de una serie de habilidades de interpretación y representación del conocimiento.

De forma similar a las comparaciones establecidas entre las ideas de Pólya y Schoenfeld en cuanto a la resolución de problemas frente a los procesos de orden metacognitivos, los planteamientos de Reif también se pueden vincular a los procesos de planeación, monitoreo y evaluación, comparación que se sintetiza en la tabla 1.



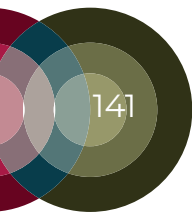
**Tabla 1.** Pasos para solución de problemas según Reif vs. Procesos metacognitivos

Pasos para la solución de problemas según Reif	Procesos de orden metacognitivos	Tipos de procesos
Descripción del problema	Planeación	En el proceso de planeación es razonable abarcar la identificación y análisis del problema aquí se incluyen procesos metacognitivos para clarificar las estrategias o técnicas más convenientes para resolver el problema.
Análisis del problema		
Construcción de una solución	Monitoreo	En esta instancia, el estudiante examina constantemente cómo está solucionando el problema; y esto lo logra por medio de la autorregulación y autochequeo durante el desarrollo del mismo (Bolívar, 2016).
Comprobación del resultado	Evaluación	En este proceso, el estudiante reflexiona sobre las actividades que implementó para solucionar el problema; y esto lo logra por medio de autorregulación y autoevaluación (Bolívar, 2016). Por otro lado, el aprovechamiento de la solución es opcional, y no necesariamente implica este tipo de procesos.
Aprovechamiento de la solución		

**Nota:** esta tabla muestra los pasos para solución de problemas según Frederick Reif, teniendo en cuenta procesos de orden metacognitivos.

Al igual que Schoenfeld, Reif va más allá de los procesos de regulación metacognitiva en su fase “aprovechamiento de la solución”; esto porque, además de aportar al desarrollo de acciones conscientes al resolver un problema, también promueve, para nuevas situaciones, el uso consciente e intencionado de los procedimientos utilizados, desde la evaluación de la eficacia y eficiencia que tuvo al resolver la tarea.

Al comparar las teorías, postulados, dimensiones o componentes referidas a la resolución de problemas, planteados por George Pólya, Alan H. Schoenfeld y Frederick Reif, se debe considerar primeramente que el trabajo de Pólya en este ámbito influyó en gran medida todos los modelos de resolución de problemas que se publicaron posteriormente, entre ellos el de Schoenfeld, que si bien es cierto que basó parte de sus teorías en el libro de Pólya “How to solve it”, tomó distancia



de algunos aspectos pertinentes a los métodos heurísticos planteados en esta obra, al considerar que sus alcances son limitados.

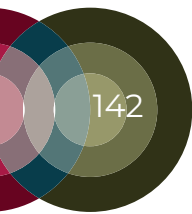
George Pólya planteó cuatro etapas para la resolución de un problema: comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y examinar la solución obtenida. Aunque estas etapas han sido asumidas por distintos modelos de resolución de problemas planteados por otros autores, sólo convergen, desde un punto de vista formal, en el sentido que señalan, esencialmente, consideraciones básicas y comunes a todos ellos (Ceberio et al., 2008).

Por su parte, Alan H. Schoenfeld discriminó cuatro dimensiones: Recursos, Heurísticas, Control y Sistema de creencias; aunque también concluyó que en el trabajo de resolución de problemas hay que tener en cuenta situaciones más allá de las puras heurísticas; de lo contrario no funciona, no tanto porque las heurísticas no sirvan, sino porque hay que tomar en cuenta otros factores (Barrantes, 2006); siendo este aspecto el que marca diferencias fundamentales entre la teoría de este autor frente a los postulados de Pólya. De forma general, según Santos (1999), el trabajo de Schoenfeld, visto desde el enfoque de resolución de problemas, incorpora un punto de vista de las matemáticas en la cual los estudiantes son motivados a discutir el sentido de las ideas matemáticas.

Mientras que Frederick Reif aborda la resolución de problemas desde el contexto de la física a través de dos reglas generales, fusionadas en una estrategia de cinco fases: descripción, análisis inicial del problema, construcción de una solución, comprobación del resultado y aprovechamiento del mismo. Lo anterior considerando además factores pertinentes a la organización del conocimiento y a la adquisición de habilidades de interpretación y representación del conocimiento.

Aunque los aportes de Reif en el enfoque de la resolución de problemas gozan de gran aceptación en las ciencias básicas, su aplicabilidad tiende a ser mayor en el aprendizaje de la física más que en las matemáticas; además, sus teorías en este contexto han sido menos documentadas que las de Pólya y Schoenfeld, por lo menos en investigaciones en habla hispana.

Un elemento de gran importancia para tener en cuenta en las teorías de resolución de problemas de los tres autores mencionados son los procesos de orden metacognitivos, de los cuales se asume que la regulación metacognitiva mejora el rendimiento en diferentes formas: mejora el uso de la atención, proporciona una mayor conciencia de las dificultades en la comprensión y mejora las estrategias ya existentes; respecto a esto se ha encontrado un incremento significativo del aprendizaje cuando se incluyen como parte de la enseñanza, la regulación y la comprensión de las actividades (De Jesús, 2020).



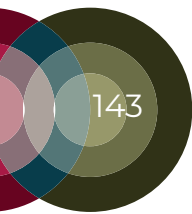
Teniendo en cuenta lo anterior, es de destacar que los procesos de planeación, monitoreo y evaluación están vinculados de manera concreta con las etapas de Pólya, Schoenfeld y Reif; sin embargo, los dos últimos logran trascender la dimensión de la regulación metacognitiva y proponer (implícita o explícitamente) una articulación con la dimensión de la conciencia y conocimiento del sujeto, indispensable para hacer más eficiente los desempeños.

Sin embargo, cabe resaltar que según Garofalo y Lester (1985), aunque los procesos de orden metacognitivos revisten considerable importancia y se asumen en varios modelos de resolución de problemas desde los mismos postulados de Pólya, los educadores matemáticos no los han estudiado sistemáticamente; esta falta de atención a la metacognición se atribuye a las siguientes razones:

- i. El comportamiento encubierto de cualquier tipo es extremadamente difícil de observar y analizar.
- ii. Los investigadores que aceptan los autoinformes como datos legítimos reconocen que pedirle a una persona que verbalice información mientras realiza una tarea puede afectar el proceso cognitivo que se lleva a cabo en el momento.
- iii. Muchos psicólogos han considerado que los fenómenos relacionados con la metacognición están demasiado mal definidos para ser investigados.

Lo antes mencionado tiene que ver también con el hecho de que aunque existen diferentes métodos de resolución de problemas matemáticos como los descritos anteriormente, los estudiantes generalmente tienen dificultades al resolver problemas de mayores niveles de dificultad, ya que esos problemas no solo exigen el dominio de habilidades matemáticas básicas, sino que también requieren procesos cognitivos superiores o metacognición como transformaciones o una serie de formulación y reformulaciones para resolverlos (Duncker, 1945).

En esto coinciden diferentes autores, quienes afirman que además de la capacitación en estrategias y tácticas de resolución de problemas, los estudiantes necesitan capacitación en direccionamiento y control, así como también en autorregulación y desarrollo mental (Desoete et al., 2003; Ginsburg y Fantuzzo, 1998; Pape y Smith, 2002).

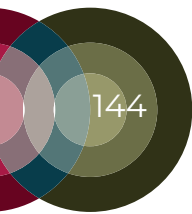


## CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados de este artículo y de su discusión, de la comparación con resultados de otros autores y del detallado análisis presentado, se pueden extraer las siguientes tres conclusiones principales:

- i. A partir de la importancia de la matemática como una de las áreas fundamentales que integran los currículos tanto en la escuela como en las universidades, se ha convertido esta asignatura en el principal medio de resolución de problemas cuantitativos, llegando inclusive a abordar elementos cualitativos; es, por tanto, lógico que existan aportes a aspectos de su campo provenientes de autores prestigiosos como George Pólya, Alan H. Schoenfeld y Frederick Reif, quienes de una u otra forma han considerado algunos alcances y limitaciones en el aprendizaje de las matemáticas desde el enfoque de resolución de problemas; estos aportes han sido desde diferentes enfoques pero coincidentes en el desarrollo que deben tener en el marco de los procesos de aprendizaje.
- ii. Es pertinente afirmar que los planteamientos de Pólya derivados de sus trabajos enfocados en resolución de problemas de alguna forma forjaron los cimientos para el desarrollo y el estado actual de la literatura sobre el tema, sin embargo: “La trascendencia del trabajo de Pólya radica en hacer evidente la importancia de resolver problemas como medio de crear conocimiento en matemáticas y sus posibilidades en el aprendizaje de esta disciplina” (Barrantes, 2006, pp. 1-2).
- iii. Schoenfeld desarrolló su propuesta sobre resolución de problemas a partir de los trabajos de Pólya, aunque toma distancia en algunos aspectos; a su vez considera la importancia decisiva que tienen los recursos como mediadores en la solución de problemas, a los que considera herramientas indispensables, sin las cuales la persona no podría encontrar la solución y el método no funcionaría, ya que carecería de las herramientas requeridas (Schoenfeld et al., 2000). Por su parte, Frederick Reif aporta al cambio conceptual en 1991, sosteniendo en esa época de primacía aun de los conductistas, que es necesario previamente modificar las ideas previas de los estudiantes, construyendo saberes sobre las metas de dominio, por ser este el escenario donde se realizan esos cambios conceptuales y en donde influyen en los recursos cognitivos, donde la única manera de alcanzar estos cambios es mediante la implementación de estrategias de aprendizaje eficientes y adecuadas (Orlando, 2014). Cada uno de estos tres autores aportó sus experiencias, sus conocimientos y sus respectivos enfoques en la búsqueda de estas necesarias estrategias

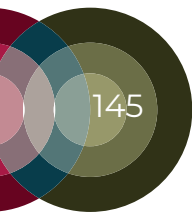




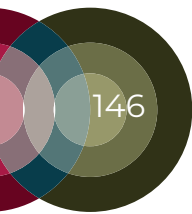
que permitieran optimizar los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos.

## REFERENCIAS

- Amasifuén, J. (2022). *Diseño de una unidad didáctica basada en la metodología Polya para desarrollar la competencia de resolución de problemas del área de Matemática en estudiantes de 1.er grado de Educación Secundaria*. Piura: Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Piura.
- Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El Trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 1(1), 1-6.
- Barrera, F., Reyes, A., Campos, M. y Rodríguez, C. (2021). Resolución de problemas en el aprendizaje enseñanza de las matemáticas. *Publicación Semestral Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 9 (nº especial), 10-17.
- Bolívar, C. (2016). *Procesos cognitivos y metacognitivos que emplean los niños de tercer grado durante la resolución de problemas matemáticos*. (Maestría en Educación y Cognición), Universidad del Norte, Barranquilla (Colombia).
- Brown, A. (1987). Knowing when, where and how to remember: A problem of metacognition. *Advances in Instructional Psychology*, 1, 77-165.
- Carreño, L., Vergara, R. y Sevillano, Y. (2017). *Efecto de una Estrategia Metodológica de Resolución de Problemas para el desarrollo del pensamiento aleatorio-sistema de datos y procesos metacognitivos*. (Maestría en Educación), Universidad del Norte, Barranquilla (Colombia).
- Ceberio, M., Guisasola, J. y Almudí, J. (2008). ¿Cuáles son las innovaciones didácticas que propone la investigación en resolución de problemas de física y qué resultados alcanzan? *Enseñanza de las ciencias*, 26(3), 419-430.
- De Faria, E. (2008). Creencias y matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 3(4), 9-27.
- De Faria, F. (2006). Control en la resolución de problemas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 1(1), 1-7.
- De Jesús, A. (2020). Caracterización de la Regulación Metacognitiva en la Resolución de Problemas sobre Medidas de Tendencia Central. *Ciência & Educação*, 26, 2-15.
- Desoete, A., Roeyers, H. y De Clerq, A. (2003). Can Offline Metacognition Enhance Mathematical Problem Solving. *Journal of Educational Psychology*, 95(1), 188-200.
- Duncker, K. (1945). On Problem Solving. *Psychological Monographs*, 58(5), 1-113.
- Efklides, A. (2009). The role of metacognitive experiences in the learning process. *Psicothema*, 21, 76-82.
- Garofalo, J. y Lester, F. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring and Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 163 - 176.



- Ginsburg, M. y Fantuzzo, J. (1998). An Evaluation of the Relative Effectiveness of NCTM Standards-Based Interventions for LowAchieving Urban Elementary Students. *Journal of Educational Psychology*, 90(3), 560-569.
- Guisasola, J., Solbes, J., Barragués, J., M. A. y Morentin, M. (2007). Comprensión de los estudiantes de la teoría especial de la relatividad y diseño de una visita guiada a un museo de la ciencia. *Revista Eureka sobre enseñanza y divulgación de las ciencias*, 4(1), 2-20.
- Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2015). Una aproximación al sistema de creencias matemáticas en futuros maestros. *Educación Matemática*, 27(1), 65-90.
- May-Cen, I. (2015). Reseña Crítica: Cómo plantear y resolver problemas. *Entreciencias: Diálogos en la Sociedad del Conocimiento*, 3(8), 419-420.
- Núñez, J., Solano, P., González-Pienda, J. y Rosário, P. (2009). Evaluación de los procesos de autorregulación mediante autoinforme. *Psicothema*, 18, 353-358.
- Oliveros, D., Martínez, L. y Barrios, A. (2021). Método de Pólya: una alternativa en la resolución de problemas matemáticos. *Revista Interdisciplinaria de Estudios en Ciencias Básicas e Ingenierías*, 8(2), 1-13.
- Orlando, M. (2014). *Razonamiento, solución de problemas matemáticos y rendimiento académico*. Doctorado en Educación, Universidad de San Andrés, Buenos Aires.
- Pape, S. y Smith, C. (2002). Self-Regulating Mathematics Skills. *Theory Into Practice*, 41(2), 93-101.
- Pérez, Y. y Beltrán, C. (2009). Las estrategias heurísticas en la solución de problemas matemáticos. *EduSol*, 9(26), 107-116.
- Pérez, Y. y Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación*, 35(73), 169-193.
- Plaza, L. y González, J. (2019). Evolución de la resolución de problemas matemáticos. análisis histórico a partir del siglo XVI. *Acta Lationamericana de Matemática Educativa*, 32(2), 168-176.
- Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas [título original: How To Solve It?]*. México: Trillas.
- Pozo, J. I.; Monereo, C. y Castelló, M. (2001). El uso estratégico del conocimiento. En C. Coll, J. Palacios y Á. Marchesi (comps.), *Desarrollo psicológico y educación* (pp. 211-258). Madrid, España: Alianza.
- Rocha-Silva, T. (2006). *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica*. Santiago de Compostela: Universidad de Santiago de Compostela.
- Santos, L. (1999). Resolución de problemas; El trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación matemática*, 4(2), 16-24.
- Santos, R., Chuc, F., Cadena, S. y Silva, H. (2018). El método heurístico de Pólya en un escenario de investigación. Aplicación en un caso específico. *Revista electrónica multidisciplinaria de investigación y docencia*, 4, 9-21 .



- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). NY: Macmillan.
- Schoenfeld, A., Minstrell, J. y Van Zee, E. (2000). The detailed analysis of an established teacher carrying out a non-traditional lesson. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 281-325.
- Soto, M. (2019). La resolución de problemas matemáticos para lograr un aprendizaje de los alumnos de primer grado de secundaria. *Maestro y Sociedad*, 16(4), 915-928.
- Tzohar, M. y Kramarski, V. (2014). Metacognition, Motivation, and Emotions: Contribution of Self-Regulated Learning to Solving Mathematical Problems. *Global Education Review*, 1(4), 76-95.
- Zimmerman, B. y Moylan, A. (2009). Self-regulation: where metacognition and motivation intersect. En D.J. Hacker, J. Dunlosky y A.C. Graesser (Eds.), *Handbook of Metacognition in Education*. Routledge: NY.