EL PENSAMIENTO OPERACIONAL EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS[1]

Josefa Hernández Domínguez
Martín M. Socas Robayna
María Mercedes Palarea Medina
María Candelaria Afonso Martín

Universidad de La Laguna

Resumen

En este artículo se hace una revisión de la literatura en resolución de problemas, que pone de manifiesto las dificultades que existen en este tema en la actualidad y cómo éstas no están plenamente caracterizadas.

Se aportan también datos sobre la tendencia a fomentar el estudio de las Matemáticas basado en el desarrollo del pensamiento operacional, y se analizan los resultados de alumnos de la Facultad de Educación de la Universidad de La Laguna, resolviendo problemas que implican procesos de generalización y modelización.

Estos resultados cuestionan si el énfasis que la enseñanza de las Matemáticas pone en el pensamiento operacional, puede estar creando dificultades al alumno en la resolución de problemas de Matemáticas.

Abstract

This work consists of a review on the problem solving literature which reveals the difficulties currently existing in this subject, and how such literature is not still completely characterized.

Evidences on the tendency in encouraging the study of mathematics based on an operational thinking are addressed. In addition, the results of several problem solving activities entailing generalization and modelling processes, and performed by the students of the Faculty of Education of the University of La Laguna, are carefully analysed.

The results question whether the emphasis put by the teaching of mathematics in the operational thinking could create difficulties to the students when solving this kind of problems.

[1] Este trabajo ha sido financiado por la D. G. I., Plan Nacional I+D+I "La resolución de problemas de Matemáticas en la Educación post-obligatoria haciendo uso de herramientas tecnológicas. Problemas de aprendizaje y métodos de enseñanza" (SEJ2005-08499).

Introducción

Presentamos en este trabajo algunas consecuencias que se derivan de dar preponderancia al desarrollo del conocimiento operacional frente a otros conocimientos en la resolución de problemas de Matemáticas.

La revisión de la literatura en resolución de problemas a partir de Pòlya (1957), que nos aporta aspectos de la cognición y de la heurística, de Schoenfeld (1985, 1987, 1992) que incluye además en sus estudios aspectos relacionados con la metacognición y las creencias, y las revisiones más recientes (Lesh y Zawojewski, 2007; ZDM, 2007), nos llevan a la conclusión de que hay dificultades en la resolución de problemas que no están plenamente caracterizadas.

Ello ha motivado este estudio, en el que revisamos, de una parte, el papel que juega el énfasis que, en todos los niveles, se le concede al conocimiento operacional en la enseñanza de las Matemáticas y, de otra, la influencia que éste puede estar teniendo, fundamentalmente, en la resolución de problemas, que necesita de estrategias, relacionadas más con un pensamiento estructural e incluso con un pensamiento procesual, que con un pensamiento operacional.

Este estudio se estructura en cuatro partes: revisión de investigaciones en resolución de problemas, características del conocimiento matemático en alumnos del Título de Maestro de Educación Primaria, Maestros de Educación Primaria en formación resolviendo problemas y consideraciones finales.

Revisión de investigaciones en resolución de problemas

Tomamos en consideración para desarrollar este apartado, especialmente el trabajo de de Lesh y Zawojewski (2007) y los artículos de la revista ZDM, 5 y 6 (2007).

Lesh y Zawojewski analizan cómo la investigación en resolución de problemas tiene un momento muy importante entre 1980 y 1990, pero en la siguiente década la atención se desvía hacia otros campos y se hacen menos trabajos en este tópico, siendo los trabajos de Pòlya el punto de partida de muchos estudios sobre resolución de problemas.

Las primeras ideas

Las situamos inicialmente en Pòlya (1957), para el que enseñar no es una ciencia, sino que es un arte. El fin de la enseñanza es *enseñar a los jóvenes a PENSAR.* Enseñar a pensar significa no sólo proporcionar información, sino desarrollar la habilidad de los estudiantes para usarla: cómo saber, actitudes útiles, hábitos mentales deseables. Este pensamiento puede ser identificado como resolución de problemas, y está relacionado no sólo con axiomas, teoremas…, sino con procesos de generalización, argumentos inductivos, reconocimiento de conceptos matemáticos…

Destaca en sus trabajos los principios de enseñanza y aprendizaje, basados en el aprendizaje activo y en la motivación, cuyas fases consecutivas son exploración, formalización y asimilación, y la necesidad del conocimiento didáctico para enseñar a aprender, que se sustenta en el conocimiento de la materia y en el conocimiento de métodos y estudio del currículo.

También fue de gran relevancia la publicación "An agenda for action" del NCTM (1980), que hizo hincapié en que se considerase la resolución de problemas como el eje central de la enseñanza de las Matemáticas.

Las primeras investigaciones en resolución de problemas

Goldin y McClintock (1979) realizaron diversos estudios para analizar las dificultades de los problemas y las clasificaron en función de las siguientes variables: variables del contenido y contexto, variables de la estructura, variables sintácticas y variables de la conducta heurística.

Krutetskii (1976) trabajó, entre otros aspectos, en la búsqueda de una caracterización de buenos y malos resolutores de problemas. Encontró que los buenos resolutores saben más, y lo que saben, lo conocen de forma diferente, su conocimiento está bien conectado y compuesto de buenos esquemas; además, tienden a centrar su atención sobre aspectos estructurales de los problemas, mientras que los resolutores malos se apoyan en hechos superficiales.

Schoenfeld, en 1992, comprueba cómo no es totalmente exitoso enseñar estrategias generales y habla de estrategias específicas, metacognitivas y de la importancia de mejorar las creencias. Se pensaba que con la enseñanza de heurísticos y estrategias adecuadas bastaba para conseguir que los alumnos resolvieran los problemas con éxito, y los diversos estudios han mostrado que no es cierto.

Lester, en la revisión que realiza en 1994, al cuestionarse acerca de la disminución de investigaciones relacionadas con la resolución de problemas, pone de manifiesto que en lo fundamental nada ha cambiado con respecto a los años anteriores y se pregunta si esto está relacionado con la falta de una base teórica. Otras preguntas que plantea son qué relaciones y conexiones existen entre el desarrollo de la comprensión de los contenidos matemáticos y el desarrollo de las habilidades en la resolución de problemas.

Efectivamente si comparamos las revisiones hechas por Lester (1980), Lester (1994) y Lester y Kehle (2003), las cuestiones principales siguen sin cambiar y se sigue apuntando como dificultad la falta de una base teórica.

En relación con la segunda pregunta de Lester, Lesh y Zawojewski (2007) piensan que la educación se mueve como un péndulo y que ahora se ha movido hacia el desarrollo de habilidades básicas. Se observa que la Educación Matemática en USA tiene un carácter cíclico con periodos de diez años, que va cambiando de habilidades básicas a resolución de problemas.

La pregunta que nos hacemos ahora es si se está produciendo un nuevo cambio del péndulo. Hay datos, como por ejemplo, que los países asiáticos valoran mucho el pensamiento crítico, la tecnología y la resolución de problemas, que indicaría que, de nuevo, vamos a girar hacia la resolución de problemas, y, en este sentido el NCTM (2000), apuesta porque todos los estudiantes tengan acceso a una educación que enfatice la creatividad, la innovación y la resolución de problemas.

En English (2002), encontramos que el énfasis se pone en analizar cómo las Matemáticas se usan en otras ciencias: ingenierías, medicina, economía…, y que no coincide con la forma en que éstas se enseñan en la escuela. Estas diferencias incluyen conocimientos y habilidades necesarias para crear y modificar modelos matemáticos y conocimientos que integran pensamientos de una variedad de áreas.

Lester y Kehle (2003), plantean cómo está aumentando la investigación en cognición situada, comunidades de práctica y fluidez representacional y parece haber un acuerdo general que estas nuevas perspectivas son necesarias para la resolución de problemas y su papel en las Matemáticas escolares.

Lesh y Zawojeski (2007), consideran que la resolución de problemas es fundamental para desarrollar una comprensión de cualquier concepto o proceso matemático dado.

Desde estas perspectivas surgen diferentes preguntas que debieran orientar el trabajo en Educación Matemática ¿Qué nuevas perspectivas y direcciones debemos considerar? ¿Qué aproximaciones o perspectivas deben ser rechazadas? ¿Qué hemos aprendido y qué debemos aprender para que la próxima generación de iniciativas tenga el éxito que no han tenido las pasadas? ...

Una muestra sobre la disminución o no de la investigación en resolución de problemas podrían ser las publicaciones de artículos sobre este tema en revistas. Por ejemplo, el número de artículos publicados en las revistas Journal for Research in Mathematics Education (JRME) y Educational Studies in Mathematics (ESM) en los últimos años ha sido:

	1980	1990	2000-03
JRME	31	22	4
ESM	51	52	11

Tabla 1

Líneas actuales de investigación en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas

Actualmente, la investigación se ha dirigido hacia otras áreas relevantes que pueden ser de utilidad para futuras direcciones de la investigación en resolución de problemas de Matemáticas, tales como la cognición situada, las comunidades de práctica y la fluidez representacional.

Cognición situada

Se refiere al aprendizaje y resolución de problemas en contextos y ocupan un amplio rango de estudios que van desde los que se centran en tareas cotidianas hasta llegar a trabajos que usan Matemáticas de alto nivel.

En cada contexto, como por ejemplo ventas en la calle, ventas en los grandes almacenes y otros, surgen diferentes tipos de pensamiento matemático que emergen en respuesta a estos problemas. La investigación de la cognición situada muestra que pocas personas que están resolviendo problemas en sus contextos, son hábiles para desarrollar conceptos matemáticos y herramientas conceptuales para dichas situaciones. Estas personas a menudo no reconocen cómo las Matemáticas que están usando, creando o adaptando están relacionadas con las aprendidas en las escuelas.

Los estudios relacionados con la cognición situada han mostrado distinciones entre las necesidades en el mundo real y la naturaleza de las Matemáticas enseñadas en la escuela, además de generar preguntas sobre el papel de la transferencia del conocimiento a nuevas situaciones.

El marco teórico para las secuencias del desarrollo del modelo está diseñado a partir de la *teoría de múltiples entornos* para desarrollar conceptos matemáticos de Dienes (1971), y la noción de Vygostsky (2001) de *la zona de desarrollo próximo* ha sido usada para desarrollar las bases de las teorías modernas de aprendizaje basadas en perspectivas sociales. El papel de un experto, por ejemplo el profesor, ha cambiado en la investigación a partir de estas perspectivas sociales.

Comunidades de práctica

Esta noción enfatiza que el conocimiento es socialmente situado, debido a las crecientes expectativas en trabajos de alto nivel, en los que los equipos de especialistas necesitan trabajar juntos en la búsqueda de soluciones óptimas a problemas complejos. El desarrollo de estas teorías del aprendizaje utiliza aspectos sociales para explicar cómo ocurre el aprendizaje. Pone de manifiesto la importancia que tiene el aprendizaje entre iguales (pares) bajo la guía del profesor y se centra en resolución de problemas y aprendizaje en titulaciones tales como economía o ingenierías.

Fluidez en el uso de las representaciones

Las representaciones y las herramientas para producirlas están entre los artefactos más importantes que proyectan y se encuentran en el mundo. El interés de los investigadores está creciendo, ya que se están introduciendo nuevas formas de representación por el incremento del uso de ordenadores y de aspectos relativos a computación, conceptualización y comunicación. Emergen líneas prometedoras de investigación que estudian el desarrollo de la habilidad representacional dentro del contexto de una sesión de resolución de problemas.

diSessa y Sherin (2000) han presentado una descripción útil de la competencia meta-representacional como *La capacidad que los estudiantes tienen para construir, criticar y refinar formas representacionales externas.*

Además de estas áreas de trabajo en Educación Matemática en la que la investigación en la resolución de problemas puede desarrollarse, aparece también la perspectiva del uso de modelos y del proceso de modelización que pone el énfasis en situaciones en las que se espera que el resolutor cree, refine o adapte interpretaciones matemáticas o formas de pensamiento y procedimientos. Los estudiantes aprenden Matemáticas a través de la resolución de problemas, y, pueden aprender a resolver problemas a través de producir Matemáticas (por ejemplo modelos matemáticos).

Se describe esta perspectiva como el trabajo con resolutores que adaptan y crean Matemáticas para usarlas en entornos cotidianos y en trabajos que requieran un uso riguroso de las Matemáticas, es decir, en entornos dentro y fuera de la escuela matemáticamente ricos.

Se observa que el aprendizaje de las Matemáticas y de la resolución de problemas están integrados y ampliamente basados en la actividad de modelización.

Esta revisión concluye en que las investigaciones acerca de la resolución de problemas, a pesar de todos los esfuerzos realizados, no han aportado datos significativos de mejoras por parte de los alumnos, y que sigue habiendo muchas preguntas aún sin respuesta.

De todo ello, se puede conjeturar que

- La resolución de problemas es más compleja de lo que se pensaba.
- El desarrollo de los conceptos y de las habilidades de resolución de problemas son fuertemente interdependientes, se construyen mejor en ambientes sociales y que lo que las teorías tradicionales habían supuesto.

- El desarrollo de los conceptos y de las habilidades en resolución de problemas no se produce en ausencia del desarrollo de creencias, emociones, predisposiciones, valores y otros componentes.

Características del conocimiento matemático en alumnos del Título de Maestro de Educación Primaria

En el trabajo de Socas, Hernández, Palarea y Afonso (2008), se estudia la influencia del conocimiento operacional en el aprendizaje de las Matemáticas y el desarrollo de las competencias matemáticas.

Se trata de un estudio, con alumnado de la Facultad de Educación de la Universidad de La Laguna, que analiza cómo el conocimiento operacional subyace, mayoritariamente, en la resolución de las actividades matemáticas propuestas, muchas veces, sin éxito.

Estos resultados sugieren que el énfasis que la enseñanza de las Matemáticas pone en el conocimiento operacional, puede estar creando dificultades y obstáculos al alumno en la aplicación, por ejemplo, de heurísticos y estrategias en la resolución de situaciones problemáticas, que están más asociadas a un pensamiento estructural e incluso procesual, y que crea dificultades en la consecución de las competencias matemáticas.

El estudio anterior describe dos comportamientos de los de 139 alumnos que participaron en la experiencia; el primero es mayoritario y responde al alumno identificado como 22EF, el segundo, minoritario, corresponde a la alumna identificada como 20EF.

El alumno 22EF, aborda y resuelve las diferentes actividades aplicando sus conocimientos operacionales, y éstos influyen en cómo aborda las cuestiones planteadas; así, interpreta las expresiones numéricas o algebraicas en sentido semántico y necesita en todo momento buscar valores numéricos con los que realizar operaciones que le lleve a dar resultados concretos en las diversas situaciones problemáticas planteadas.

La alumna 20EF aborda y resuelve las diferentes actividades utilizando argumentos estructurales basados en conceptos y propiedades y, sólo en dos apartados de los veinte planteados, tiene la necesidad de realizar operaciones para asegurar su veracidad. El comportamiento de esta alumna en las diferentes actividades pone de manifiesto una mayor presencia de un conocimiento estructural que combina en muchas situaciones con su conocimiento operacional, aunque éste a veces le conduzca a soluciones inadecuadas.

En resumen, encontramos que la mayoría de los alumnos, al abordar las actividades matemáticas propuestas, mantienen la atención en las igualdades semánticas y, en consecuencia, en la realización de las operaciones que se manifiestan en las expresiones, haciendo caso omiso de las propiedades relativas a aquéllas o de las estructuras de los números implicados. Todo lo anterior pone de manifiesto que este conocimiento operacional tiene un campo limitado de actuación en actividades matemáticas que impliquen estructuras y procesos.

Las diferentes capacidades que caracterizan la competencia matemática: pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, y emplear soportes y herramientas tecnológicas, señalan que difícilmente se puede conseguir que un alumno sea competente en Matemáticas, apoyándose solamente en el conocimiento operacional, puesto que la competencia matemática supone tener la capacidad de movilizar diferentes recursos matemáticos para comprender y resolver tareas matemáticas en la que esta movilización implica tanto el dominio de los recursos matemáticos como la de su adecuada gestión.

Maestros de Educación Primaria en formación resolviendo problemas

Este trabajo se ha planteado en la línea de seguir realizando indagaciones sobre la resolución de problemas; en él observamos a maestros de Educación Primaria en formación mientras resuelven problemas que implican procesos de generalización y modelización.

Nos planteamos las siguientes preguntas:

¿Qué tipo de conocimientos utilizan los alumnos, cuando se enfrentan a la identificación y resolución de problemas en los que intervienen procesos de sustitución formal, generalización o modelización?

¿Qué relaciones podemos establecer entre las formas de conocimiento de los alumnos y la competencia matemática: plantear y resolver problemas?

Los estudios realizados con anterioridad sobre dificultades, obstáculos y errores de los alumnos de Educación Secundaria y de los Títulos de Maestro, nos han llevado a formular la siguiente conjetura que va a dirigir el trabajo: “el énfasis que se ha dado al conocimiento operacional en la enseñanza- aprendizaje de las Matemáticas puede originar en el alumno dificultades y obstáculos en el desarrollo de la identificación y resolución de problemas de Matemáticas que impliquen procesos de sustitución formal, generalización y modelización”.

El estudio se ha realizado desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas, 2001, 2007), tomando en consideración el Modelo de Competencia Formal (MCF) que, como muestran Socas y otros (2008), es útil para realizar estudios sobre los tipos de conocimientos que los alumnos utilizan para responder o desarrollar una actividad matemática que implique no sólo operaciones, sino también estructuras y procesos.

a) **Población**

La población para este estudio está compuesta por 139 alumnos de los Títulos de Maestro de las especialidades de 1º de Educación Física (EF), 2º de Educación Musical (EM), 1º de Lengua Extranjera (LE) y de 2º de Educación Primaria (EP), de la Facultad de Educación de la Universidad de La Laguna.

Educación Física	Educación Musical	Lengua Extranjera	Educación Primaria	Total
47	23	33	36	139

Tabla 2

b) Instrumentos de medida

Para la recogida de datos se diseñó inicialmente un cuestionario con cinco preguntas, que hemos tomado de otros estudios anteriores (Socas y otros, 1989; Palarea, 1999; Ruano, 2003), por ello no hemos considerado aquí la necesidad de validarlo.

La primera pregunta consta de diez sentencias en las que se pide a los alumnos que decidan sobre su veracidad, argumentando su respuesta. La segunda consta también de diez ítems formulados mediante sentencias incompletas, en las que falta el segundo miembro de la igualdad, y se pide a los alumnos que realicen determinados cálculos para obtenerlo. Las preguntas tercera, cuarta y quinta están redactadas en formato problema y, en ellas, los alumnos deben utilizar los procesos de sustitución formal, generalización y modelización. En concreto, en la tercera pregunta los alumnos deben desarrollar un proceso de generalización a partir de una tabla de doble entrada en la que aparecen datos y resultados, y han de averiguar la operación u operaciones necesarias y expresarlas. En la cuarta, se analizan las capacidades de los alumnos para elaborar un modelo y usarlo, a partir de los precios de algunos artículos de un supermercado y de los gastos que se ocasionan con diferentes compras. La quinta pregunta se refiere a un proceso de generalización cercano relacionado con los números cuadrados.

En este informe de investigación se presenta el análisis de las tres últimas preguntas del cuestionario.

La tercera pregunta, como hemos dicho, se formula como un problema en el que se muestra una tabla de doble entrada en la que aparecen datos y resultados, y los alumnos han de seleccionar las operaciones necesarias para obtenerlos.

III. La siguiente tabla se ha construido combinando los números mediante operaciones básicas. Determina la combinación de operaciones utilizada.

	1	2	3	4
1	3	5	7	9
2	5	8	11	14
3	7	11	15	19
4	9	14	19	24

El objetivo de esta pregunta es estudiar las capacidades de los alumnos cuando se enfrentan a un proceso de generalización, en el que se da, de forma explícita, una descripción organizada de un comportamiento regular en el que la regla no viene dada. Nos planteamos analizar las competencias generales de todo proceso: reconocerlo, formularlo y manipularlo, que explicitamos en cuatro momentos diferentes:

- El reconocimiento o la percepción del proceso, a partir de la situación problemática que hemos formulado numéricamente.
- El uso de representaciones o registros, ya que en este caso les hemos facilitado la tabla ya construida.
- El reconocimiento de la regla mediante la formulación de una expresión numérica o algebraica.
- La verificación de la fórmula con ejemplos.

En la cuarta pregunta, formulada también en formato problema, se dan datos sobre precios de algunos artículos de un supermercado y se les pregunta acerca del coste de una determinada compra.

IV. En el supermercado un kilo de peras cuesta 1.25 euros, un kilo de plátanos 0.6 euros, el kilo de ciruelas 3.25 euros, el kilo de naranjas 1.1 euros y cada kiwi cuesta 0.a euros. La familia de Ana tiene los siguientes gastos en fruta: Compra a la semana 2 kilos de peras, p kilos de plátanos, 3 kilos más de ciruelas que de plátanos y 6 kiwis.

IV.1 ¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta, en una semana?

IV.2 ¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta al mes, suponiendo que todas las semanas consume la misma cantidad de fruta y que un mes tiene 4 semanas?

IV.3 Si el precio por kiwi es de 0.2 euros y compra en una semana 1 kilo de plátanos, ¿podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta, en una semana?

En esta pregunta se pretende detectar si los alumnos son capaces de encontrar un modelo y usarlo; para ello, volvemos a considerar las tres competencias generales, que en este caso se concretan en:

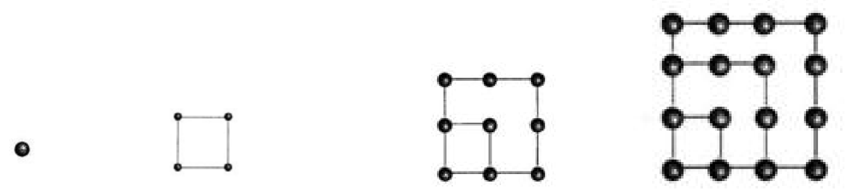
- La explicitación y reconocimiento de la regla.
- La formulación y la resolución en términos de la regla.
- La validación de la regla y su interpretación.

En este caso se parte de una descripción, no organizada, de un comportamiento regular en el que la regla no está explicitada. Los alumnos deben utilizar conversiones en dos contextos simultáneos: dinero y frutas, aplicando la relación *precio total = precio unidad x número de unidades;* se utilizan letras en ambos contextos y se da un dato no necesario para el modelo solicitado el precio de las naranjas.

Consideraremos correcto el apartado IV.1 si encuentran el modelo pedido y el apartado IV.2 siempre que los alumnos multipliquen por 4 el modelo obtenido en el apartado anterior, sea ése correcto o no. En el apartado IV.3 pretendemos que el alumno valide el modelo obtenido en IV.1 e interprete el resultado. Lo consideraremos correcto cuando el resultado sea 17,3 euros y también cuando aplique correctamente su modelo, aunque éste no sea válido, siempre que no dé respuestas absurdas del tipo de 50 céntimos de euros, pues indicaría que no sabe interpretar el resultado, ya que el gasto en frutas en una semana no puede ser inferior al coste de 1 kilo de peras.

La quinta pregunta, también en formato problema, se refiere a los números cuadrados y se les pide calcular otros números cuadrados más o menos cercanos a los que se facilitan.

V. Los números 1, 4, 9, 16,… reciben el nombre de números cuadrados, ya que pueden ser dispuestos en forma de cuadrados. Se pueden descomponer como sigue: 1=1; 4= 1 + 3; 9= 1 + 3 + 5; 16 = 1 + 3 + 5 + 7



1 4 9 16

V.1. Calcula el número cuadrado siguiente al 16.

V.2. Calcula el número cuadrado que ocupa la posición 6.

V.3. Calcula el número cuadrado que ocupa la posición 20.

En este caso se propone la identificación y resolución de un problema de generalización cercana, en el que se da, de forma explícita, una descripción organizada de un comportamiento regular, mediante el uso de dos sistemas de representación, en los que la regla no viene dada. Pretendemos analizar la capacidad de generalización de los alumnos y sus tendencias a apoyarse en la representación geométrica o numérica para obtener el patrón.

En la sucesión de números cuadrados, presentados en dos registros (gráfico y numérico), los alumnos deben darse cuenta del modo de obtención de éstos para poder calcular el número cuadrado siguiente y averiguar los números cuadrados que ocupan las posiciones 6 y 20, respectivamente.

c) Aplicación de la prueba

La prueba se realizó en el segundo cuatrimestre del curso 2006-07, durante dos horas; los alumnos de las especialidades de EF y de LE, antes de haber desarrollado el tema de Números del Programa de la asignatura de Matemáticas, y los alumnos de 2º Curso de EP y de EM, que ya habían cursado la asignatura, aunque muchos aún no la habían aprobado. Se les permitió usar la calculadora, pero en el caso de usarla, debían explicitarlo, pero no se ha hecho ningún estudio a este respecto.

Como hemos señalado las preguntas III, IV y V son problemas que involucran procesos, en particular los procesos de sustitución formal, generalización y modelización. Explicamos a continuación los resultados y los comportamientos observados en la resolución de dichos problemas.

d) Análisis y discusión de los datos

Hemos encontrado, en general, que muchos alumnos no abordan estos problemas en el cuestionario y los dejan en blanco, y los que los resuelven no aportan por escrito los argumentos que están utilizando. Los resultados aquí comentados se refieren a los alumnos que los identifican como un problema que quieren resolver y lo intentan.

Pregunta III

En este problema que involucra el proceso de generalización, queríamos observar cómo interpretan los cuatro momentos de la generalización.

En primer lugar, el reconocimiento de la situación problemática, en este caso, numérica y a partir de una tabla dada.

Encontramos que el 82% de los alumnos llegan a determinar un patrón particular por filas o columnas, que podemos identificar como los comportamientos más frecuentes de la siguiente forma: patrones numéricos y patrones algebraicos

A) Patrones numéricos

1) En los que interviene una sola operación

- Aquellos que plantean un patrón por filas (o por columnas), y lo expresan con números: *3+2 = 5 + 2 = 7 +2…*, o con explicaciones verbales:

"tanto en las filas como en las columnas se van colocando los números de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro y de cinco en cinco"

"números de la 1ª columna y fila se le suma 2, de la 2ª columna y fila se le suma 3, ..."

- También se usan patrones multiplicativos como: $1 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$,

2) En los que intervienen dos operaciones, para tratar de justificar cómo se van rellenando las casillas a partir de los dos números dados, por ejemplo: $5 = 2^2 + 1$ o el $7 = 3^2 + 1$.

B) Patrones algebraicos

- En los que se utilizan una o dos variables, pero sin explicar claramente a lo que se refiere cada una y sin comprobar su veracidad, como, por ejemplo: $x + 1 + y$ o $y = 2x + 1$.

- En los que se explica la regla general obtenida, como, por ejemplo: $x + (x + x \cdot y)$.

Entendemos que los alumnos perciben este proceso, y la mayoría intenta buscar una expresión, pero ninguno llega a encontrar el patrón general. Un alumno obtuvo la expresión $x + (x + x \cdot y)$, pero, al tratar de verificarla con ejemplos, se encontró con que algunos resultados no se podían obtener a partir de ella, por lo que llegó a la conclusión de que "*no vale en todos los casos*".

Los resultados de esta pregunta ponen de manifiesto que los procesos, tanto de sustitución formal como de generalización, no son alcanzados. Algunos no consiguen cambiar de registro o no encuentran la regla, pero sí patrones operatorios numéricos.

Es posible que los alumnos no se hayan habituado a realizar este tipo de actividades en la Educación Obligatoria y, quizá por ello, no llegaron a entender que debían encontrar una expresión general.

Pregunta IV

Apartado 1

Al analizar el contexto de este problema, encontramos que el 14% identifican correctamente el problema, y efectúan la traducción del lenguaje habitual al lenguaje algebraico; el 19% lo deja en blanco, mientras el 67% lo identifica, y comete errores relacionados con dificultades lingüísticas (por ejemplo, obviar el “más que”), operacionales, mal uso del signo igual, etc.

Algunos de los errores más frecuentes fueron:

- Asignar a las ciruelas expresiones como las que siguen: 3p·3.25; 3 + (p · 0.6); 9.75 + 0.6 p; 3p; (3 + p) · 0.6; 3· 0.6 p; 3; 3p + p; 3.25 · 3x; (0.6 p + 3) · 3.25; 3· 3.25

- Asignar a los kiwis: 6 kiwis = 3. a; 6 · 0.a = 6 a; 0.a · 6 = 0.6 a; 6 · 0. a = 3.6

- Asignar la misma letra, a distintas variables.

Los alumnos no expresaron verbalmente ningún tipo de justificación de los resultados.

Sólo un 5% plantea el modelo correctamente, por tanto, utilizan una estructura para definirlo. Un 20% planteó un modelo erróneo, ya que identificaron mal los datos del enunciado, en particular los relacionados con las ciruelas y los kiwis, otros estudiantes, aplicaron mal la propiedad distributiva, o sumaron términos no semejantes.

Un 33% elabora un modelo, pero inmediatamente buscan valores numéricos con los que dar una respuesta numérica a la pregunta, bien asignando valores concretos a p y a a, o creando falsas ecuaciones para obtener dichos valores. Otros alumnos manifiestan no poder hacerlo ya que no poseen datos suficientes.

Apartado 2

Los alumnos que plantean bien el modelo responden correctamente este apartado.

Un 33% identifica bien el problema, entienden que deben multiplicar por 4 el resultado del apartado a, aunque éste sea incorrecto. El 53% dejan este apartado en blanco.

Otras respuestas:

- Multiplican por 28 (días de 4 semanas) el valor del modelo.
- Aplican mal la propiedad distributiva al multiplicar por 4.
- Hacen cálculos con valores aproximados del modelo.

Apartado 3

Los resultados de este apartado pueden estar influenciados por una mala comprensión del enunciado, al no identificar que los datos que aparecen están relacionados con los del apartado a.

Los resultados fueron:

- Sólo un 19% lo hace correctamente, valor muy bajo, pero se observa que muchos alumnos que no supieron resolver el apartado 1, no intentaron resolver éste.
- Algunos alumnos (3%) calculan como gasto de fruta el equivalente a 1 kiwi y 1 kilo de plátanos o (14%) calculan el gasto de 6 kiwis y 1 kilo de plátanos. El 44% no responde.
- Otras respuestas:

- No sustituyen el valor de p.

- Afirman que les faltan datos, porque no relacionan este apartado con el enunciado del problema.

- Sustituyen en el modelo erróneo.

- Cometen errores de cálculo.

Como conclusión, observamos que los alumnos tienen muchas dificultades para reconocer y formular el modelo, sólo un 5%, incluso una vez explicitado, afirman que no pueden responder ya que *“no tienen datos suficientes”*.

En resumen, observamos que el error más repetido es la necesidad de particularización. Ruano y otros (2008), identifican que la necesidad de particularizar tiene su origen en una combinación entre la ausencia de sentido y el obstáculo asociado al conocimiento numérico. Como hemos indicado, hay alumnos que reconocen el modelo y como no encuentran significado al uso de las letras, necesitan retroceder a lo numérico para poder resolver el problema.

Otro error frecuente es el cambio de registro incorrecto. La mayoría ha tenido dificultades al intentar expresar la relación entre los kilos de ciruelas y su precio. Hemos señalado la cantidad de respuestas distintas que dan, tales como 3p·3.25; 3 + (p·0.6); 9.75 + 0.6 p; **3p**; (3 + p) · 0.6; 3· 0.6 p; 3; 3p+p; 3.25 · 3x; (0.6 p + 3) · 3.25; 3· 3.25; siendo la marcada en negrilla una de las más frecuentes. Este tipo de errores suele tener su origen en una ausencia de sentido, debida a las características propias del lenguaje algebraico (Ruano, 2003).

En general, muchos de los resultados que hemos encontrado en este estudio son análogos a los encontrados por Ruano (2003) con alumnos de 4º de ESO y 1º de Bachillerato.

Pregunta V

Esta actividad la resuelven bien, mayoritariamente, sobre todo el primer apartado. De forma indistinta se apoyan en el dibujo o en los cálculos aritméticos, y en éstos, tanto a través de la suma como de la multiplicación.

	Bien	Mal	No la hacen
5.1	90%	4%	6%
5.2	68%	11%	21%
5.3	55%	13%	32%

Tabla 3

Apartado 1

Las respuestas las podemos englobar en tres grupos: los que lo resuelven utilizando sólo el registro gráfico, los que sólo utilizan el numérico y los que usan ambos.

Responden sólo con el registro gráfico correctamente un 17%, algunos colocan debajo del dibujo el número 25 o escriben $5^2 = 25$.

El 32% resuelve este apartado utilizando exclusivamente el registro numérico. Existen tres comportamientos:

1) Los que escriben 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 (17%) o $5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ (2%).

2) Los que sólo escriben 25 (9%) o 25 = 5 x 5 (2%).

3) Un 2% escribe incorrectamente 36 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11.

Un 43% utilizan ambos registros para resolver el problema (solo un 2% de forma incorrecta).

Los comportamientos de estos alumnos los podemos clasificar de la siguiente forma:

1) Hacen el dibujo y escriben 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 (28%), y algunos añaden $5^2 = 25$ (4%).

2) Hacen el dibujo y lo justifican con 25 = 4 + 5 + 7 + 9 ó 16 + 9 = 25

3) Hacen el dibujo y utilizan un patrón numérico multiplicativo 5 x 5 =

= 25.

4) Hacen el dibujo correctamente, pero lo justifican con un patrón numérico incorrecto 25= 1 + 3 + 5 + 7 + 4.

Apartado 2

Los comportamientos que hemos observado son similares a los de la situación anterior, aunque en este apartado aumentan los errores.

Los alumnos responden correctamente, sólo con el registro gráfico, un 13%, y de igual forma, algunos colocan debajo del dibujo el número 36 o escriben $6^2 = 36$.

El 40% resuelve este apartado utilizando exclusivamente el registro numérico (6% de manera incorrecta). Se repiten comportamientos análogos:

1) El más frecuente es escribir 1 + 3 +5 +7 + 9 + 11= 36 (21%)

2) Los que sólo escriben 36 (6%) ó 36 = 6 x 6 (6%) ó $36 = 6^2$ (2%)

3) Un 6% escribe incorrectamente 6 = 1 + 3 + 2

En este apartado es menor el número de alumnos que utilizan ambos sistemas de representación para resolverlo (21%). En este caso los comportamientos son:

1) Hacen el dibujo y escriben 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 (15%), y algunos añaden 6 x 6 = 36 (4%).

2) Consideran que el número cuadrado que ocupa la posición 6 es el 49, y lo justifican con el patrón geométrico y con el numérico

49 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13.

Apartado 3

Finalmente, en este apartado aparecen resultados diferentes respecto a los anteriores. Por una parte encontramos que un 32% de los alumnos lo dejan en blanco, que sólo un 2% utiliza ambos sistemas de representación de forma correcta para justificar que el 400 es el número cuadrado que ocupa la posición 20, y que un 9% lo responde haciendo solamente el dibujo.

En este apartado, como era de suponer, dada la cantidad de puntos que se requerían dibujar si querían utilizar el sistema de representación geométrico, el 57% de los alumnos recurre a buscar el número cuadrado mediante un patrón numérico, y se repiten los mismos comportamientos, lo que indica que el proceso de generalización se está generando.

Estos comportamientos se distribuyen en tres grupos: dos que originan respuestas correctas y el tercero, incorrectas:

1) Siguen un patrón aditivo: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 +\ldots+ 39 = 400$ (21% de forma correcta), y un 2% comete errores de cálculo (como $1 + 3 +\ldots+ 39 = =390$).

2) Un patrón multiplicativo, expresado en forma de producto $20 \times 20 = 400$, o de potencia $20^2 = 400$, o escriben simplemente 400 (28%).

3) Consideran que para obtener el número cuadrado que ocupa la posición 20 hay que buscar una expresión que sume 20, como $1+3+5+7+4 =20$ ó $1+2+3+4+5+8 =20$ (4%).

Terminamos este análisis mostrando muy brevemente el resultado global de los dos alumnos seleccionados, identificados como 22EF y 20EF.

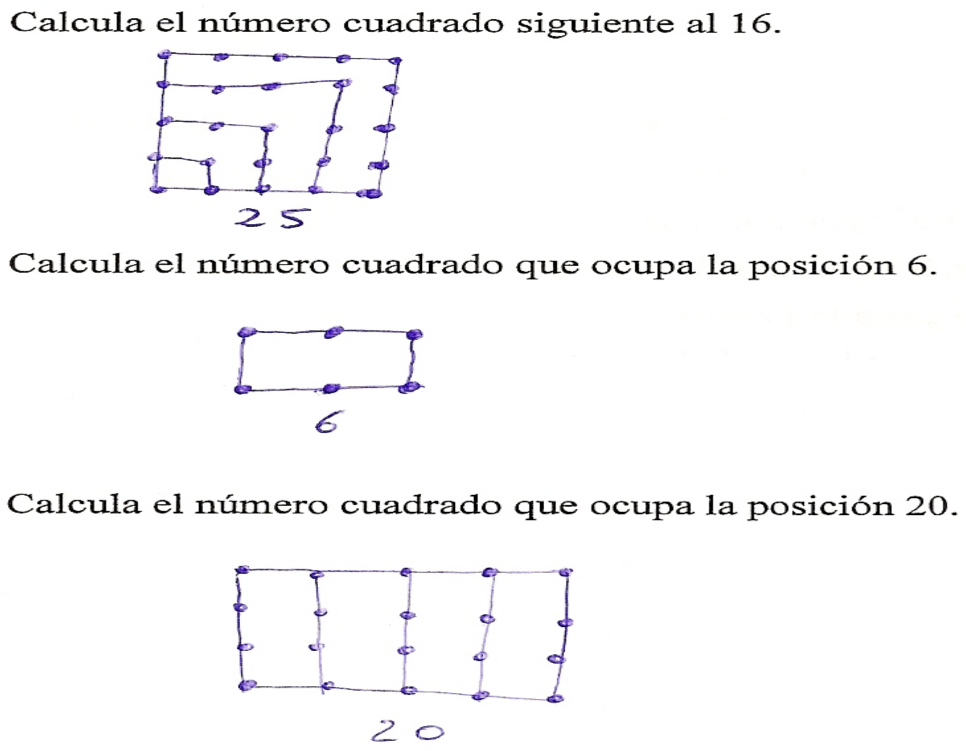
El alumno 22EF, ante el problema III, identifica la situación problemática, plantea un posible patrón numérico que se verifica para los términos de la tabla presentada, pero no es capaz de encontrar una expresión general.

En la pregunta IV, identifica el problema, anota algunos datos y, a continuación, manifiesta que no se puede resolver porque *le faltan datos*.

Al abordar el apartado 2, utiliza los cálculos correctos que realiza previamente en el apartado 3, posteriormente hace una multiplicación (correcta) con el objetivo de ofrecer un resultado numérico.

El apartado 3 lo identifica y hace los cálculos correctamente, pero sin relacionarlo con el apartado 1, es decir, tiene la necesidad de utilizar datos numéricos para resolver esta situación.

En el problema V, apartado 1, sigue el patrón geométrico presentado y lo hace correctamente, cuando se trata de buscar el siguiente término. El apartado 2 lo hace de forma incorrecta. Parece no haber entendido qué significa la posición 6 y se limita a dibujar 6 puntos en un rectángulo. Aplica el mismo proceso en el apartado 3 para la posición 20. Esto nos sugiere que no ha entendido la estructura de los números cuadrados y su representación gráfica, y se limita a elaborar un patrón gráfico particular que responda a las cantidades 6 ó 20, respectivamente.



El comportamiento de este alumno en las diferentes actividades parece estar fuertemente dominado por su sentido operacional y esto pudiera estar influyendo en cómo aborda los problemas; en todo momento necesita buscar valores numéricos con los que realizar operaciones que permitan dar resultados concretos en las diversas situaciones problemáticas.

La alumna 20EF, en el problema III, reconoce la obtención de cada uno de los números de la tabla, esto es, su patrón de confección, pero no es capaz de encontrar una expresión que la generalice.

En el apartado 1 de la pregunta IV expresa correctamente el modelo de forma algebraica, pero escribe, a continuación que *le faltan datos*. De nuevo en el apartado 2 escribe *faltan datos*. El proceso del apartado 3 lo realiza bien, aunque comete errores de cálculo.

El primer apartado del problema V lo resuelve bien siguiendo el patrón geométrico y también expone un patrón numérico correcto. En los siguientes apartados (2 y 3) utiliza exclusivamente el patrón numérico de manera correcta.

Se trata de una alumna que muestra un cierto equilibrio entre el conocimiento operacional y estructural, y que utiliza éste en las distintas situaciones, aunque no consigue resolver con éxito la totalidad de los procesos que se le plantean en los problemas.

Consideraciones finales

Como ya se ha dicho, muchos alumnos no abordan estos problemas en el cuestionario y los dejan en blanco y, de los que los resuelven, muchos no aportan por escrito los diferentes argumentos que están utilizando. Por tanto, los resultados analizados no se refieren a la totalidad de esta pequeña muestra, sino al reducido grupo de alumnos que los identifican como un problema que quieren resolver y lo intentan. Hemos de indicar que el trabajo ha continuado en cursos sucesivos con alumnos de la especialidad de Educación Primaria, y, con otros instrumentos de recogida de información como el informe y las entrevistas, además del cuestionario, cuyo análisis estamos realizando y que esperamos nos de más información sobre sus dificultades.

Estos primeros resultados muestran cómo los alumnos que utilizan, casi de forma exclusiva, el pensamiento operacional para responder a los procesos indicados, tienen muchas dificultades para resolverlos cuando éstos requieren identificar estructuras o procesos. Esto es, los alumnos al abordar estas actividades que implican la identificación de estructuras y procesos, además de las operaciones, centran su atención en la realización de las operaciones, y dejan en segundo plano las propiedades relativas a éstas o a las estructuras de los números implicados, y tienen muchas dificultades para trascender del ámbito numérico o para generalizar en él.

Estos estudiantes parecen no tener, en ninguno de los procesos, una estrategia clara de cómo abordar la actividad, salvo el efectuar las operaciones indicadas o supuestas.

Referencias bibliográficas

Dienes, Z. P. (1971). *Construcción de las matemáticas*. Madrid: Vicens Vives.

diSessa, A. A., Sherin, B. L. (2000). Meta-representation: An introduction. *Journal of Mathematical Behaviour*, 19, 385-398.

English, L. (2002). Priority Themes and Issues in International Research in Mathematics Education. En L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Mahwah, NJ: LEA.

Goldin, G., McClintock, E. (Eds.) (1979). *Task Variables in Mathematical Problem Solving*. ERIC.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. (Traducido del ruso por J. Teller, J. Kilpatrick e I. Wirszup (Eds.). Chicago: University of Chicago Press).

Lesh, R., Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. Lester (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Reston, VA: NCTM.

Lester, F. K. (1980). Research on mathematical problem solving. En R. J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education*, 286-323. Reston, VA: NCTM.

Lester, F.K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 660-675.

Lester, F. K., Kehle, P. E. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching (501-518).* Mahwah, NJ: Erlbaum.

NCTM (1980). *An Agenda for Action*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM (Traducido al castellano: Principios y estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003).

Palarea, M. M. (1999). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

Pòlya, G. (1957). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas (Traducción al castellano de How to solve it. NJ: Princeton University Press, 1945).

Ruano, R. (2003). *Sobre los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en matemáticas: Implicaciones didácticas*. Tesina de Licenciatura. Universidad de La Laguna.

Ruano, R., Socas, M. M., Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de Secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en Álgebra. *PNA, 2,* vol. 2, 61-74.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). Cognitive Science and Mathematics Education: An Overview. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematical Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*. New York: Macmillan Publishing Company.

Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje algebraico.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI.* CajaCanarias y SEIEM: Tenerife.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. M., Hernández, J. (1989). *Iniciación al Álgebra.* Madrid: Síntesis.

Socas, M. M., Hernández, J., Palarea, M. M., Afonso, M. C. (2009). La influencia del pensamiento operacional en el aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de las competencias matemáticas. *Indivisa, Boletín de estudios e investigación.* Monografía 12, pp. 101-120.

Vygostsky, L. S. (2001). *Pensamiento y lenguaje.* Barcelona: Paidós.

ZDM (2007). Problem solving around the world: Summing up the State of the Art. *ZDM*, Vol. 39, 5 y 6.