INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS ANTES Y DESPUÉS DE UN PROGRAMA DE FORMACIÓN SOBRE EL CONCEPTO DE NÚMERO DECIMAL

María Dolores Moreno Martel
Víctor Manuel Hernández Suárez
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Martín Manuel Socas Robayna
Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo se estudian las dificultades y errores que tienen alumnos sobre el número decimal, su escritura y las relaciones que los números decimales tienen con los restantes conjuntos numéricos. La investigación se desarrolla en el marco de un programa de formación de maestros de Educación Primaria. En el estudio nos centramos en el análisis y la discusión de los resultados obtenidos antes y después de la puesta en práctica de un experimento de enseñanza guiado por conjeturas a un grupo de alumnos de primer curso de la Especialidad de Maestro de Educación Musical.

Abstract

In this paper, we study the difficulties and mistakes made by students with decimal numbers, both in writing and the relationships that decimal numbers have with the others sets of numbers. The research is developed within the framework of a training program for teachers of Primary Education. In the study we focus on the analysis and discussion of the obtained results before and after the implementation of a teaching experiment guided by conjectures to a group of students of the first course of the specialty of Music Education.

FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA X
Moreno, Mª D.; Hernández, V. M.; Socas, M. M. (2009). *Interpretación y análisis de los resultados obtenidos antes y después de un programa de formación sobre el concepto de número decimal*, *pp.179-221*

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de los números decimales constituyen un problema didáctico de gran interés en la formación del profesorado de Educación Primaria y Secundaria. Diferentes estudios ponen de manifiesto que muchos alumnos terminan los estudios no universitarios con ideas confusas sobre los números y que éstas no se aclaran de forma correcta en los estudios universitarios [Robinet (1986), Fischbein (1954), Socas (2001), Moreno, Hernández y Socas (2004 y 2007)]; por ejemplo, en relación con el concepto de número decimal, se ha observado (Socas, 2001) que alumnos con una fuerte preparación matemática identifican número decimal con número real; esa identificación también se encuentra en los alumnos que han finalizado la Educación Secundaria (Moreno y otros, 2004); sin embargo, en este grupo es más frecuente la caracterización de número decimal como número con coma. En general, los resultados de los autores Moreno, Hernández y Socas (2007) permiten diferenciar a los alumnos según cuatro formas de pensar frente a los números decimales:

a) El número decimal es cualquier número que admite una representación en el Sistema de Numeración Decimal.
b) Cualquier número que está expresado o que, cambiando de registro, puede escribirse mediante una escritura con coma es decimal.
c) Los números decimales son los que tienen una escritura decimal finita (se incluye a los enteros) o decimal infinita y periódica.
d) Los números decimales son los que, en su representación, tienen coma.

En este sentido, en el primer cuatrimestre del curso 2008-2009, se llevó a cabo el diseño de un programa de formación de maestros de Primaria que tomará en consideración los resultados conocidos sobre los números decimales y que tratará de minimizar esas dificultades y errores cometidos por los alumnos. En el segundo cuatrimestre del mismo curso se implementó dicho programa y, posteriormente, en el curso 2009-2010, se procedió a su evaluación mediante la discusión de los diferentes datos obtenidos.

La investigación se realiza con un grupo de 28 alumnos del primer curso de la Especialidad de Maestro de Educación Musical de la ULPGC, y tiene como finalidad:

a) Determinar comportamientos cuando trabajan con los otros números.

b) Analizar los errores que cometen.

c) Encontrar la organización que el alumnado posee de los otros conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$) desde los decimales.

d) Averiguar los significados que tienen sobre los números decimales.

Por otro lado, conjeturamos que los alumnos van a identificar los números decimales con las escrituras con coma y que van a realizar el cambio de registro a esta notación para clasificar y representar en la recta numérica los números representados en otros registros, tal y como hemos detectado en estudios anteriores. Asimismo, pensamos que existe en el alumnado un mayor dominio del pensamiento operacional que del procesual y estructural y que esto constituye un problema para interpretar y diferenciar correctamente las estructuras numéricas.

En este informe de investigación nos fijaremos de manera particular en la interpretación y en el análisis de los resultados obtenidos antes y después de la puesta en práctica de dicho programa, relativo a la construcción del sistema de los números decimales y como estos alumnos establecen relaciones a partir del conjunto de los números decimales y de su escritura con el resto de los conjuntos numéricos.

La presentación del trabajo sigue la siguiente estructura: primero se comentará el marco teórico de referencia, luego se describirá el diseño del estudio empírico y la administración de los diferentes instrumentos (cuestionarios, experimento de enseñanza, protocolos de entrevistas, …) para presentar seguidamente los resultados y su discusión, primero en fase inicial o de diagnóstico y, a continuación, en la fase final, después de la retroalimentación mediante el experimento de enseñanza desarrollado en el plan de formación seguido. Se termina este artículo con un apartado sobre consideraciones finales en el que se describen diferentes resultados obtenidos en el trabajo.

Marco teórico

En este punto tratamos, a grandes rasgos, tres aspectos básicos que sustentan la investigación y que son elementos determinantes en la configuración de su marco teórico específico:

a) Los conocimientos matemáticos de los alumnos de primer curso de la titulación de Maestro.

b) Las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas.

c) El marco en el que se pone en práctica el experimento de enseñanza y se evalúa el programa de formación: la asignatura Matemáticas y su Didáctica.

Conocimiento matemático de los alumnos de primero de Magisterio

Los conocimientos matemáticos de dichos alumnos han sido analizados en varios estudios entre los que destacamos: Palarea M. y otros (2001) y Hernández, J. y otros (2003). En estos trabajos, la prueba se ha diseñado teniendo en cuenta cinco áreas, que se corresponden con los siguientes bloques de contenidos: Números y Operaciones (Competencia en la utilización de números y operaciones. Manejo de la proporcionalidad), Medida (Competencia en la utilización de procedimientos y sistemas de medida convencionales. Estimación y cálculo de longitudes, superficies y volúmenes), Geometría (Capacidad espacial. Reconocimiento de los movimientos en el plano), Análisis de datos, Estadística y Probabilidad (Capacidad para interpretar y representar conjuntos de datos e informaciones estadísticas. Capacidad de predecir resultados probabilísticos. Reconocimiento de códigos) y Álgebra (Capacidad para comprender y utilizar el lenguaje algebraico). Las cuestiones están diseñadas no sólo para que se puedan analizar conocimientos y destrezas, sino para detectar habilidades para aplicar procedimientos y resolver problemas.

Los resultados obtenidos se organizan en torno a las siguientes variables: actitud hacia las Matemáticas, estudios precedentes, modalidad de estudios y universidad de procedencia; además se analizan los errores más significativos cometidos por el alumnado.

Los alumnos procedentes de COU o Bachillerato LOGSE han realizado las modalidades de Ciencias: 16%; Ciencias Sociales: 25%; Lingüístico: 13% y Arte: 0.5%, habiendo obtenido en la Selectividad o PAU las puntuaciones siguientes COU (6.2), Bachillerato LOGSE (6.1) y Formación Profesional (7.4).

Sus puntuaciones en Matemáticas en los niveles de Primaria (aprobados, 22%; notables, 45%; sobresalientes 30%) y Secundaria Obligatoria (aprobados, 33%; notables, 44%; sobresalientes, 20%) son superiores a las obtenidas en el Bachillerato (aprobados, 65%; notables, 22%; sobresalientes, 4%).

De estos alumnos, un 46% expresa tener una actitud buena hacia las Matemáticas, mientras un 6% muestra una actitud muy buena, un 6% negativa y un 42% baja. Podemos considerar que se trata de una muestra bastante heterogénea.

El porcentaje de "aciertos por bloque" es: en Números y operaciones, 42%; en Medida, 48%; en Geometría, 59%; en Análisis de datos, Estadística y Probabilidad, 74% y en Álgebra, 57%. En relación con los "estudios precedentes" hay, en general, bastante similitud entre los resultados de los alumnos de COU y Bachillerato, en contra de la opinión de que estos últimos están peor preparados. En relación con el análisis por "modalidad de estudios", en algunas cuestiones se observa que los alumnos de Ciencias obtienen mejores resultados, pero no son especialmente significativos.

Estos resultados muestran enormes deficiencias de los alumnos que inician los estudios de Magisterio en conocimientos básicos de Matemáticas, pero sobre todo llama especialmente la atención el escaso éxito en aquellas cuestiones en las que no necesitan realizar cálculos, sino realizar estimaciones o aplicar el sentido común; por ejemplo, en problemas en los que sobra o falta algún dato, pero no se encuentran diferencias significativas respecto a estos conocimientos básicos y a los errores que cometen según procedencia o modalidad.

Todo ello lleva al grupo de trabajo a pensar en la posibilidad de desarrollar programas de Matemáticas para la formación de Maestros, comunes a todas las especialidades, que deben partir de una realidad que es análoga e independiente de la procedencia de los alumnos. El trabajo pretende elaborar una base de conocimiento didáctico-matemático, útil para la investigación y para el análisis de políticas educativas que tienen que ver con la formación de Maestros.

En trabajos posteriores del mismo equipo de investigación Hernández y otros (2008) se parte de una amplia revisión de la literatura en resolución de problemas, que pone de manifiesto las dificultades que existen en este tema en la actualidad, para presentar, a continuación un estudio en el que se analizan los resultados de alumnos de la Titulación de Maestro de la Facultad de Educación de la Universidad de La Laguna, cuando resuelven problemas que implican procesos de generalización y modelización, y se observa que estos alumnos presentan una marcada tendencia al uso de estrategias estrictamente operacionales en el desarrollo de los procesos anteriores. Los autores se cuestionan si el énfasis que la enseñanza de las Matemáticas pone en el pensamiento operacional puede estar creando dificultades al alumno en la resolución de problemas de Matemáticas.

En Socas y otros (2009) se presenta un nuevo estudio con alumnos de la Titulación de Maestro de la Facultad de Educación de la Universidad de La Laguna, sobre el predominio del desarrollo del pensamiento operacional en la enseñanza de las Matemáticas y sus posibles consecuencias. A partir del análisis de una colección de tareas y actividades resueltas por los alumnos, muchas veces sin éxito, se pone de manifiesto cómo es el pensamiento operacional el que subyace, mayoritariamente, en la resolución de aquellas. Estos resultados vuelven a poner de manifiesto cómo el énfasis que la enseñanza de las Matemáticas pone en el pensamiento operacional puede estar creando dificultades y obstáculos al alumno en la aplicación, por ejemplo, de heurísticos y estrategias en la resolución de situaciones problemáticas que están más asociados a un pensamiento estructural e incluso procesual y cómo este pensamiento operacional crea dificultades en la consecución de ciertos aspectos de la competencia matemática.

Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas

En relación con el estudio de las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas, tomamos como referencia el marco teórico descrito en Socas, M. (1997). En este marco se contempla que la naturaleza de las dificultades del aprendizaje de las Matemáticas es de diversa índole y que éstas se conectan y se refuerzan en redes complejas. Se distinguen cinco categorías: Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas; Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático; Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas; Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos y Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

El estudio de los errores cometidos en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas se afronta desde la consideración de que la mente del alumno no es una página en blanco, sino que éste posee un conocimiento anterior que le parece suficiente y establece en su mente cierto equilibrio. Por ello, la principal razón para que se produzca la asimilación del nuevo conocimiento es que éste debe tener significado para el alumno, para lo cual ha de responder satisfactoriamente a las preguntas que él mismo se ha formulado. En ningún caso el nuevo conocimiento se añade al que ya posee el alumno, sino que, por el contrario, le crea un conflicto porque le provoca una reestructuración nueva del conocimiento total; posteriormente se produce una acomodación de la estructura anterior que le permite recobrar el equilibrio perdido. Así, entendemos que el error va a tener distintas procedencias, pero siempre se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de la falta de conocimiento o del despiste.

El estudio de los errores se hace, desde esta perspectiva, considerando tres ejes, no disjuntos, que nos permiten realizar el análisis del origen del error. En este marco se distinguen tres orígenes distintos de los errores: obstáculo, ausencia de sentido y actitudes afectivas y emocionales.

Para el análisis de los errores que tienen su origen en un "obstáculo" se considera la noción de obstáculo como un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, que es válido en ciertos contextos (Bachelard, 1938; Brousseau, 1983). Cuando el alumnado hace uso de este conocimiento fuera de dichos contextos, surgen respuestas no adecuadas. En este enfoque los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden organizarse (Socas 2001) mediante la tríada: obstáculos epistemológicos, didácticos y cognitivos.

El estudio de los errores que tienen su origen en "ausencia de sentido" se realiza tomando en consideración los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación, por lo que podemos agruparlos en tres etapas distintas.

Finalmente, los errores que tienen su origen en "actitudes afectivas y emocionales" tienen distinta naturaleza como son: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc.

El experimento de enseñanza

El contexto en el que se pone en práctica el experimento de enseñanza y se evalúa el programa de formación es la asignatura troncal: "Matemáticas y su Didáctica", que se imparte en el primer curso de la titulación de Maestro Especialista en Educación Musical con una carga lectiva de 4,5 créditos. Está orientada a consolidar y profundizar la formación del futuro profesor en los contenidos de las Matemáticas básicas y los procesos implicados en su enseñanza y aprendizaje. Los contenidos se organizan en bloques y contamos con uno dedicado al estudio de los sistemas numéricos. En este bloque del programa de formación situamos el experimento de enseñanza dirigido por conjeturas (Confrey y Lachance, 2000).

Comentamos, brevemente, algunos de los aspectos más relevantes del experimento de enseñanza en el programa de formación. Éste tiene como finalidad principal servir de retroalimentación al alumnado y constituirse en una estrategia de remedio para las dificultades y errores que éste tiene en relación con los sistemas numéricos y sus diferentes escrituras y, en particular, con el número decimal y la escritura decimal, en el sentido que señala Socas (1997):

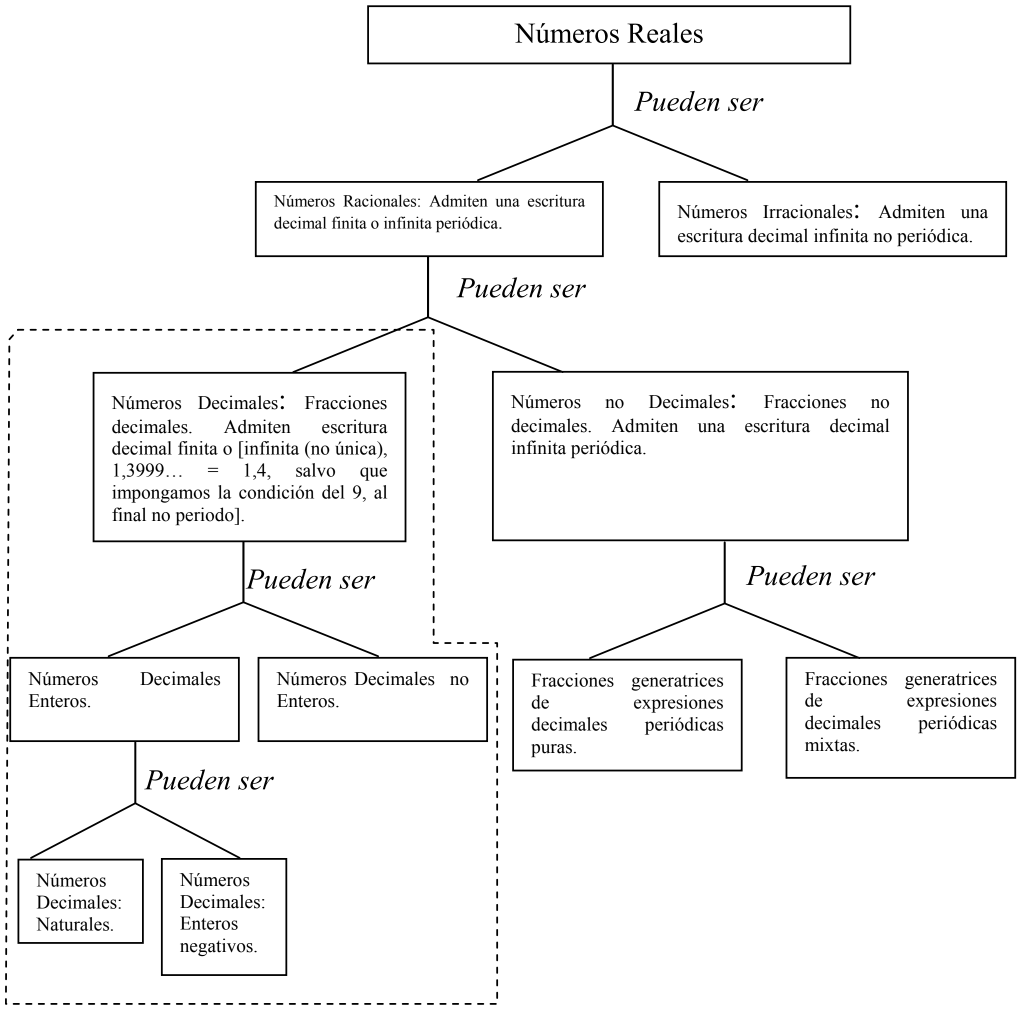
> *La estrategia de remedio pasa porque el alumno modifique esa estructura cognitiva errónea y la sustituya por la correcta; para ello, el profesor debe facilitar actividades que provoquen conflicto y hagan tambalear esa estructura cognitiva errónea.*

En este sentido, el experimento de enseñanza, toma como referencia los diferentes significados que tienen "lo decimal" y "la numeración decimal" en los contextos académicos y en las prácticas sociales, y desencadena un proceso de enseñanza-aprendizaje que favorece la controversia, es decir, conflictos cognitivos y sociocognitivos sobre el número, los numerales, los sistemas numéricos y los sistemas de numeración, a partir de la referencia a "lo decimal" y "la numeración decimal", en un contexto de prácticas individuales y sociales.

El experimento de enseñanza se organiza en tres fases: la primera es de diagnóstico y de discusión a priori; la segunda es de retroalimentación y discusión a posteriori y, la tercera, es de revisión y producción.

En la fase segunda, la retroalimentación se genera, especialmente, a partir de dos unidades de aprendizaje: "Números, numerales, sistemas numéricos y sistemas de numeración" y "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas"

La primera, trata del estudio de los números y sus diferentes escrituras y considera como elemento organizativo "lo decimal" y "la numeración decimal". De manera concreta, para su elaboración nos apoyamos en una organización de "lo decimal" y "la numeración decimal" en el entorno escolar, en el que el conjunto de los números decimales es considerado como un sistema numérico que permite conectar y dar sentido a los diferentes números y la escritura decimal es una representación que debe ser diferenciada del número decimal y que permite establecer relaciones significativas con las otras representaciones o escrituras de los diferentes números. En el siguiente esquema se recoge la organización conceptual de la propuesta:



La segunda, “Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas”, supone proporcionar al alumnado un conocimiento teórico, técnico y práctico que permita analizar y reflexionar sobre el objeto número y sus diferentes escrituras y cómo éstas confusiones entre el objeto matemático y sus escrituras generan dificultades que a veces se convierten en obstáculos. La elaboración de esta unidad de aprendizaje constituye una adaptación para este alumnado del capítulo: *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria* de Socas (op. cit.). En definitiva, este conocimiento pretende proporcionar a los estudiantes un conjunto de herramientas teóricas, técnicas y prácticas, que les sirvan para reflexionar sobre las causas de los errores que han cometido al contestar las preguntas del cuestionario.

Metodología: diseño del estudio empírico

Describimos, ahora, el diseño y planificación del estudio empírico que ha tenido lugar en el experimento de enseñanza en el marco de la asignatura que hemos mencionado con anterioridad.

Para la evaluación de los objetivos planteados inicialmente en este trabajo se ha implementado un cuestionario; se ha desarrollado, en un programa de formación de Matemáticas, un experimento de enseñanza guiado por conjeturas y se han realizado entrevistas individuales.

Diseño del cuestionario

Se diseñó un cuestionario con 3 tareas diferentes y 50 ítems (Moreno y otros, 2004), que se administra en dos partes: Primera (tarea una, con 23 ítemes) y Segunda (tareas dos y tres, con 19 y 8 ítems, respectivamente), que los alumnos contestan en dos fases diferentes: Diagnóstico y Revisión. En este trabajo nos referimos a la primera parte del cuestionario (se adjunta en el ANEXO) en las dos fases.

Con respecto a la primera tarea del cuestionario, se presenta una tabla con 23 ítems, en la que los alumnos deberán clasificar un conjunto de números, expresados en varios registros, según sean naturales, enteros, decimales, racionales, irracionales o reales. El análisis de esta tarea se hará tomando en consideración cuatro aspectos:

1) Respuesta dada por el alumnado a cada conjunto numérico, con excepción de la columna "decimales", en relación con los 23 números dados en la tarea.
2) Número de alumnos que excluyen o incluyen a los 23 números dados en esta tarea como decimales.

3) Comportamientos encontrados en los alumnos a partir de respuestas similares.
4) Errores encontrados, su organización y posibles orígenes del error.

Para los dos primeros aspectos, el análisis se hace observando las respuestas dadas en cada columna, aunque el estudio de la columna "Decimal" se presenta aparte y con mayor profundidad. Para el tercer y cuarto aspecto, el análisis se hace globalmente.

La muestra elegida estaba constituida por 28 estudiantes de primer curso de la titulación de Maestro Especialista en Educación Musical de la ULPGC. Los alumnos serán identificados en este trabajo mediante un código numérico: 1, 2, 3,…, 28, que se corresponde con el orden alfabético.

Para organizar y analizar la información utilizamos varios procedimientos de análisis: tablas, esquemas de análisis, redes sistémicas (Bliss; Monk, y Ogborn, 1983), transcripciones de las entrevistas, informes y triangulación de los datos.

Administración del cuestionario

El experimento de enseñanza se ha desarrollado en las tres fases mencionadas anteriormente: diagnóstico y discusión a priori, retroalimentación y discusión a posteriori y la de revisión y producción.

En la primera, para el diagnóstico, se administró el cuestionario a los alumnos, de forma individual, en dos sesiones distintas para analizar la consistencia de las respuestas y se realizó una discusión a priori con todo el grupo, sobre las diferentes respuestas dadas en el cuestionario.

Se corrigieron las pruebas y se seleccionó una muestra de alumnos, en función del comportamiento y errores cometidos en las respuestas, para ser entrevistados (entrevistas previas o de la fase primera que fueron audiograbadas). Estas entrevistas tienen por objeto obtener con mayor precisión la información que nos aporta las respuestas comunes de los encuestados.

En la segunda fase de retroalimentación se pone en práctica el experimento de enseñanza diseñado en el marco del programa de formación y se realiza una discusión a posteriori con todo el grupo de clase.

En la tercera fase de revisión, se vuelve administrar el mismo cuestionario y, de la misma forma que al principio, se selecciona una muestra de alumnos para ser entrevistados (entrevistas finales o de la tercera fase que fueron también audiograbadas). Asimismo, en esta fase, se les pide a cada alumno una tarea concreta que denominamos "Producción", en la que cada alumno presenta un informe escrito sobre sus dificultades, obstáculos y errores con los números y sus escrituras, en relación con las tres preguntas del cuestionario, referidas a los resultados expresados en la primera prueba del cuestionario, que se les había devuelto fotocopiado.

Esto nos ha permitido observar la evolución y discusión de los resultados, mediante las diferentes actividades realizadas y documentos aportados en el experimento de enseñanza. Todo ello en consonancia con la idea sostenida por Socas (op.cit.) de que:

> *Las estrategias de enseñanza deben ir encaminadas a detectar los errores y provocar el conflicto en los alumnos, fomentando ideas que permanezcan activas más allá de la clase de Matemáticas y capacitándoles para evaluar si sus ideas o métodos son o no correctos en una determinada tarea matemática.*

Por último, debemos señalar que de las actividades de la tercera fase, sólo se analizan en este trabajo los resultados obtenidos del cuestionario.

Análisis e interpretación de resultados

Analizamos e interpretamos, ahora, los diferentes resultados obtenidos en este experimento de enseñanza, como ya hemos indicado en relación con la respuestas de los alumnos a la primera tarea del cuestionario, en dos momentos diferentes: fase primera y tercera, que denominaremos "Resultados de la primera pregunta del cuestionario en la fase de diagnóstico" y "Resultados de la primera pregunta del cuestionario en la fase de revisión".

Resultados de la primera pregunta del cuestionario en la fase de diagnóstico

A continuación recogemos las respuestas dadas por el alumnado a la primera pregunta, agrupadas por tipos, para cada columna, salvo para la de los decimales, que se estudiará con mayor profundidad en el siguiente apartado.

Los criterios utilizados por los alumnos para identificar los números **Naturales** son:

a) Los positivos y con notación decimal, y el cero (3,6%).
b) Los positivos y el cero. En algunos casos se excluye a $3-\sqrt{3}$ (21,4%).
c) Los expresados con notación decimal (7,1%).
d) Los que están representados con notación decimal finita (7,1%).
e) Todos, excepto las expresiones que contienen una raíz (3,6 %).
f) Los que están expresados con notación decimal y fraccionaria (3,6%).
g) Todos, excepto las raíces con signo negativo (3,6%).
h) Los números naturales. En algunos casos no se establecen las igualdades: $2=\frac{10}{5}=\left(\sqrt{2}\right)^2$. Además, se excluye el 35.521 (21,4%).

Observamos que algunos criterios tienen porcentajes no significativos. Los porcentajes más altos se dan en b) y en h); podemos señalar que, para gran parte de los alumnos, los **Naturales** son los naturales, los positivos y el cero, con las salvedades que se enuncian anteriormente.

Los criterios utilizados por los alumnos para identificar los números **Enteros** son:

a) Los enteros, pero al igual que en los naturales se dan las mismas circunstancias con el 35.521 y con las igualdades $2=\frac{10}{5}=\left(\sqrt{2}\right)^2$ (35,7%).

b) Todos, salvo los negativos y los que en su escritura llevan raíz (7,1%).

c) Los negativos. Algunos excluyen a $-\sqrt{7}$ (7,1%).

d) Los enteros y las fracciones (3,6%).

e) Los representados con notación decimal (3,6%).

f) Otros (25 %).

Observamos que para los **Enteros** la respuesta más frecuente consiste, en grandes rasgos, en marcar los enteros de la tabla.

Los criterios utilizados por los alumnos para identificar los números **Racionales** son:

a) Las fracciones, algunos incluyen a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (10,7%).

b) Los que se expresan con notación decimal (3,6%).

c) Los números enteros (3,6%).

d) Todos, excepto $1{,}3\overline{5}$ (3,6%).

e) Los que no están expresados con notación decimal (o son operaciones indicadas) (7,1%).

f) Las fracciones positivas (3,6%).

g) Las escrituras numéricas que contienen una raíz (3,6%).

h) Las fracciones decimales (7,1%).

i) Todos los que se puedan expresar con notación decimal con coma y finita (7,1%).

j) Ninguno (3,6%).

k) Los no irracionales (3,6%).

l) Otros (21 %).

Observamos como los racionales se identifican con mayor frecuencia con los números expresados con notación fraccionaria.

Los criterios utilizados por los alumnos para identificar los números **Irracionales** son:

a) Los que contienen en su representación una raíz. Algunos excluyen a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (10,7%).

b) Los no expresados con notación decimal (3,6%).

c) Los no racionales (7,1%).

d) Ninguno (3,6%).

e) Las fracciones y a las escrituras que contienen una raíz (3,6%).

f) $-\sqrt{7}$ (3,6 %).

g) Las fracciones negativas (3,6%).

h) Todos, excepto las escrituras que contienen una raíz (3,6%).

i) Los irracionales de la tabla (3,6%).

j) Los que pueden expresarse con notación decimal con coma infinita (3,6%).

k) Otros (18%).

Observamos que el criterio que más predomina es el de identificar como números irracionales las expresiones numéricas que contienen una raíz cuadrada.

Los criterios utilizados por los alumnos para identificar los números **Reales** son:

a) Todos. Algunos excluyen a $-\sqrt{7}$ o $3-\sqrt{3}$ y, otros, a $\pi \; y \; \pi-5$ (28,6%).

b) Los que contienen en su representación una raíz (3,6%).

c) Todos, excepto las escrituras que contienen una raíz (7,1%).

d) $-\sqrt{7}$ (3,6%).

e) Todos, salvo los que presentan infinitas cifras decimales (7,1%).

f) Los positivos y el cero (3,6%).

g) Otros (21,9%).

Observamos que la respuesta más frecuente de las dadas es a), es decir, todos son reales, salvo algunos matices.

Por ello, y a grandes rasgos, en los casos en los que hemos podido encontrar un patrón en las respuestas, conjeturamos que el alumnado utiliza como criterio para identificar a los números de forma mayoritaria su escritura o forma de representación y otras características de los números asociadas a los signos. Entre esas características destacamos:

a) Ser un número positivo.

b) Ser un número negativo.

c) Presentar un signo negativo en su representación.

d) Ser una fracción.

e) Presentar una raíz en su representación.

f) Estar expresado con notación decimal.

g) Presentar una coma en su escritura.

h) Estar expresado con notación decimal con coma y finita (o infinita).

i) Ser símbolos especiales como π y $\pi - 5$.

Por ejemplo, entre las respuestas frecuentes nos encontramos los criterios que utiliza el alumno identificado en la investigación como [20]:

Contesta con un Sí o con un No en la casillas correspondientes a cada número.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
- 2,062	Si	NO	Si	NO	NO	Si
35.521	Si	Si	NO	NO	NO	Si
$\frac{3}{5}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si
2	Si	Si	NO	NO	NO	Si
$-\frac{1}{2}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si
0,63	Si	NO	Si	NO	NO	Si
$-\sqrt{7}$	Si	NO	NO	NO	Si	Si
0,123456…	NO	NO	Si	NO	NO	Si
3,14	Si	NO	Si	NO	NO	Si
0	Si	Si	NO	NO	NO	Si
$1+\sqrt{2}$	~~Si~~ NO	NO	NO	NO	Si	Si
π	NO	NO	NO	NO	NO	NO
$\frac{10}{5}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si
$-\frac{7}{3}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si
0,666…	NO	NO	Si	NO	NO	Si
$\left(\sqrt{2}\right)^2$	Si	NO	NO	NO	Si	Si
$1,3\hat{5}$	NO	NO	Si	NO	NO	Si
1,73205008…	NO	NO	Si	NO	NO	Si
π-5	NO	NO	NO	NO	NO	NO
0,5	Si	NO	Si	NO	NO	Si
$3-\sqrt{3}$	NO	NO	NO	NO	Si	Si
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	NO	NO	NO	Si	Si	Si
$\frac{1}{3}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si

a) Los números naturales son los que se pueden expresar con notación decimal finita.

b) Los enteros son los correspondientes de la tabla, salvo $\left(\sqrt{2}\right)^2$ y $\frac{10}{5}$.

c) Los decimales, los que llevan coma.

d) Los racionales, los que están en notación fraccionaria.

e) Los irracionales, las expresiones numérica que contienen una raíz.

f) Los reales son todos, excepto $\pi \ y \ \pi - 5$.

En segundo lugar, expresamos el número de alumnos que excluyen o incluyen a los 23 números dados en esta tarea como decimales.

Los recogemos en la tabla siguiente y mostramos el número de alumnos que contesta con un Sí o con un No en cada celda de la columna de los decimales. A cada expresión numérica le hacemos corresponder un ítem, tal como se muestra en la tabla.

Ítem de la primera pregunta	**Número de alumnos que lo excluye como decimal**	**Número de alumnos que lo incluye como decimal**	
1.1	2	25	- 2,062
1.2	21	5	35.521
1.3	9	16	$\frac{3}{5}$
1.4	25	1	2
1.5	9	16	$-\frac{1}{2}$
1.6	1	24	0,63
1.7	15	8	$-\sqrt{7}$
1.8	5	20	0,123456…
1.9	2	25	3,14
1.10	24	1	0
1.11	15	9	$1+\sqrt{2}$
1.12	11	16	π
1.13	19	6	$\frac{10}{5}$
1.14	9	18	$-\frac{7}{3}$
1.15	2	25	0,666…
1.16	18	5	$\left(\sqrt{2}\right)^2$
1.17	3	23	$1,3\widehat{5}$
1.18	3	24	1,73205008 …
1.19	11	14	π-5

1.20	1	26	0,5
1.21	13	10	$3-\sqrt{3}$
1.22	11	11	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
1.23	9	17	$\frac{1}{3}$

Se observa que los ítems que más fueron contestados positivamente (con un Sí) se corresponden con los números que están expresados con notación decimal con coma. Seguidamente, nos encontramos con los que se corresponden con las fracciones no enteras y, por último, con los que están expresados con notación radical. Los números enteros son excluidos del conjunto de los decimales por la mayoría de los alumnos (92,9%).

En tercer lugar describimos los comportamientos encontrados en los alumnos a partir de respuestas similares.

Mediante las técnicas de análisis utilizadas hemos tratado de identificar comportamientos regulares a partir de respuestas similares. Estos comportamientos son los siguientes:

a) Comportamiento A (21,4%): los números decimales son sólo los que están expresados con notación decimal con coma.

b) Comportamiento B (28,6%): los números decimales son los que están expresados con notación decimal y algunas o todas las fracciones. Además, algunas de las expresiones que contienen una raíz, π o π-5 se excluyen o se dejan sin contestar. Los enteros tampoco se consideran decimales.

c) Comportamiento C (25%): los números decimales son todos, excepto los enteros.

d) Comportamiento D (3,6%): los decimales son los enteros, los que están expresados con notación decimal, con coma y finita, y todas las fracciones.

Por último, en cuarto lugar, mostramos los errores encontrados, su organización de los mismos y los posibles orígenes del error.

También los errores encontrados en esta primera pregunta los hemos organizado en una tabla en la que se muestra el error, los ítems donde se produce y los alumnos (código) que lo cometen, por ejemplo:

Tipo de error	**Código de los alumnos**	**Ítem en el que han fallado**	**Número total de errores de cada tipo**
Los enteros no son decimales.	[1-**2**-4-5-6-7-**8**-9-10-11-**12**-13-14-15-16-18-19-**20**-21-**22**-**23**-**24**-25-26-27-28].	1.2 1.4 1.10 1.13 1.16.	21+25+24+19+18

Los errores que hemos tenido en cuenta son los que están relacionados con el significado atribuido a los decimales y con las relaciones establecidas entre éstos y los otros sistemas numéricos ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{R}$ *y* $D \cap I = \varnothing$).

De esta manera tenemos:

a) Los enteros no son decimales.
b) Los números expresados con notación decimal con coma son decimales.
c) Sólo los números positivos, expresados con notación decimal con coma y con parte decimal finita son los decimales.
d) Todas las fracciones son decimales.
e) Algunas fracciones son decimales y otras no, pero la clasificación se hace incorrectamente.
f) Ninguna fracción es un número decimal.
g) Todos o algunos de los irracionales no expresados con notación decimal son decimales.
h) Hay decimales que no son racionales.
i) Hay decimales que son irracionales.
j) Hay decimales que no son reales.
k) $D \approx \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Algunos presentan ciertos matices relacionados con el significado atribuido a los números reales.

Uno de los errores más frecuentes es el de excluir a los enteros del conjunto de los decimales (92,9%). En éste hemos contabilizado a todos los alumnos que fallaron en algunos de los ítems siguientes: 1.2, 1.4, 1.10, 1.13 y 1.16. Los últimos ítems presentan un porcentaje de exclusión menor que los tres primeros.

En el análisis de las respuestas, relacionadas con los ítems 1.4, 1.13 y 1.16, de los alumnos que excluyen a los enteros de los decimales, nos hemos encontrado las siguientes:

a) $\frac{10}{5}$ es decimal, pero no $\left(\sqrt{2}\right)^2$.
b) $\frac{10}{5}$ y $\left(\sqrt{2}\right)^2$ son decimales.

c) $\frac{10}{5}$ y $\left(\sqrt{2}\right)^2$ no son decimales.

d) $\frac{10}{5}$ no es decimal, pero $\left(\sqrt{2}\right)^2$ sí.

El 89,3% comete el error de considerar a todo número expresado con notación decimal con coma, como decimal. Así, los fallos contabilizamos en los ítems 1.8, 1.15, 1.17 y 1.18 consisten en elegir como decimales a los reales expresados con notación decimal infinita periódica (periodo distinto de 9 y de 0) y no periódica. Algunos alumnos dejan en blanco el $1,3\overline{5}$.

En estos casos es cuando se observa que el criterio que consiste en fijarse en si la escritura presenta una coma para elegirlo como decimal, deja de ser válido. Sin embargo, hemos considerado como correcto, en el entorno del Sistema Numérico Decimal, cuando el alumno elige como número decimal a un número por presentar en su escritura (no obtenida con la calculadora) la coma y un número finito de cifras decimales. Aunque se sabe que números que no son decimales se expresan también, en otros sistemas de numeración, con coma y con un número finito de cifras después de ésta. Tal es el caso del racional, no decimal, siguiente: $\frac{1}{3} = 0,1_{(3}$.

El 3,58% se limita a señalar como decimales a los números positivos, pero los expresados con notación decimal con coma y finita. Los decimales son las medidas de cantidades de magnitud. De esta manera, se excluyen a los enteros y a los decimales negativos, expresados con notación decimal o fraccionaria.

En relación con los números expresados con notación fraccionaria, hay alumnos que los seleccionan a todos como decimales (21,4%). Se aprecia que no se tiene adquirida la clasificación de las fracciones en decimales y no decimales.

Asimismo, hay un grupo de encuestados (35,7%), que excluye a los enteros, que considera a todas las fracciones como decimales, salvo las enteras.

Sin embargo, otros (7,1%), cometen el error de considerar decimales precisamente las que no los son y, de excluir, las que lo son.

Se da la situación particular que estos elementos de la muestra marcan a $\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}\ y\ \frac{10}{5}$ como los únicos racionales.

El 51,1% apunta como decimal a π. Del mismo modo, el 50 % selecciona a $\pi - 5$. Se hace un cambio de registro a la notación decimal. Asimismo, se observa que hay alumnos que eligen a π como decimal, pero la casilla del $\pi - 5$ la dejan en blanco o contestan que no. Éstos manifiestan un comportamiento similar al A.

El número áureo es elegido como decimal por el 39,3% de la muestra. En esta situación, se hace la operación indicada con la calculadora o de forma estimada, tomando un valor aproximado de la raíz cuadrada, y se clasifica por el resultado. También, se puede interpretar como una fracción, y como las fracciones son vistas como decimales, entonces éste es decimal.

En el mismo caso se encuentran: $3-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{2}\ \ y\ -\sqrt{7}$. Su explicación se halla en la interpretación de estas estructuras como operaciones indicadas, cuyos resultados son expresados con la notación decimal y, por tanto, son clasificadas como decimales.

Hemos tenido en cuenta como error cuando un estudiante elige correctamente un número como decimal; sin embargo, no lo considera racional o real. También contemplamos como fallo el que se pone de manifiesto al establecer que $D \cap I \neq \varnothing$.

En estos casos el significado que se le atribuye a cada sistema numérico desempeña un papel importante. Por ejemplo, si un alumno considera que los racionales son los números expresados con notación fraccionaria, entonces comete el error de excluir a 0,5 o a -2,062 como racionales. Véase el ejemplo siguiente:

Contesta con un Sí o con un No en las casillas correspondientes a cada número.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
- 2,062	Si	NO	Si	No	NO	Si
35.521	Si	Si	No	NO	NO	Si
$\frac{3}{5}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si
2	Si	Si	NO	NO	NO	Si
$-\frac{1}{2}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si
0,63	Si	NO	Si	NO	NO	Si
$-\sqrt{7}$	Si	NO	NO	NO	Si	Si
0,123456…	NO	NO	Si	NO	NO	Si
3,14	Si	NO	Si	NO	NO	Si
0	Si	Si	NO	NO	NO	Si
$1+\sqrt{2}$	~~Si~~ NO	NO	NO	NO	Si	Si
π	NO	NO	NO	NO	NO	NO
$\frac{10}{5}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si
$-\frac{7}{3}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si
0,666…	NO	NO	Si	NO	NO	Si
$(\sqrt{2})^2$	Si	NO	NO	NO	Si	Si
$1,3\hat{5}$	NO	NO	Si	NO	NO	Si
1,73205008…	NO	NO	Si	NO	NO	Si
π-5	NO	NO	NO	NO	NO	NO
0,5	Si	NO	Si	NO	NO	Si
$3-\sqrt{3}$	NO	NO	NO	NO	Si	Si
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	NO	NO	NO	Si	Si	Si
$\frac{1}{3}$	Si	NO	NO	Si	NO	Si

Así, si marca como irracionales a todos, excepto las expresiones numéricas que contienen una raíz, sostiene que, por ejemplo, 0,5, es irracional. En la siguiente tabla se muestra lo comentado:

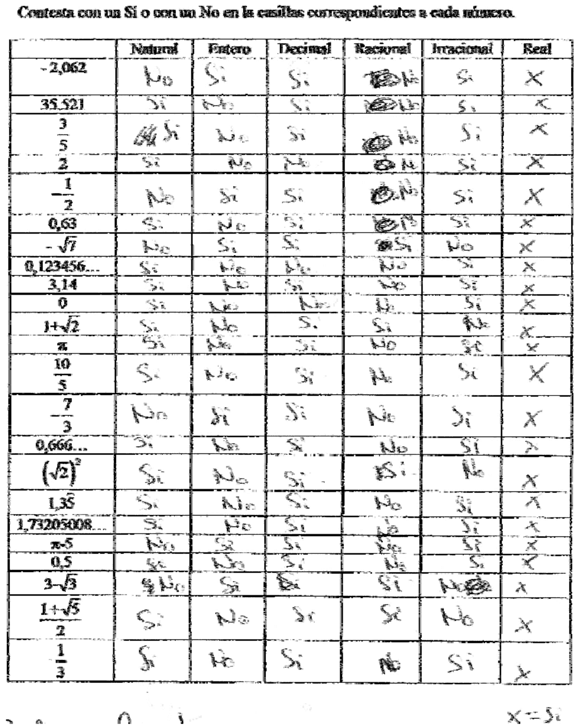
Contesta con un Sí o con un No en las casillas correspondientes a cada número.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
- 2,062	No	Si	Si	[illegible] No	Si	X
35,521	Si	Si	Si	[illegible] Si	Si	X
$\frac{3}{5}$	[illegible] Si	No	Si	[illegible] No	Si	X
2	Si	No	[illegible]	[illegible] No	Si	X
$-\frac{1}{2}$	No	Si	Si	[illegible] Si	Si	X
0,63	Si	No	Si	[illegible]	Si	X
$-\sqrt{7}$	No	Si	Si	[illegible] Si	No	X
0,123456…	Si	No	[illegible]	No	Si	X
3,14	Si	[illegible]	Si	[illegible]	Si	X
0	Si	No	No	Si	Si	X
$1+\sqrt{2}$	Si	No	Si	Si	No	X
π	Si	No	Si	No	Si	X
$\frac{10}{5}$	Si	No	Si	No	Si	X
$-\frac{7}{3}$	No	Si	Si	No	Si	X
0,666…	Si	No	Si	No	Si	X
$(\sqrt{2})^2$	Si	No	Si	Si	No	X
$1,3\hat{5}$	Si	No	Si	No	Si	X
1,73205008…	Si	No	Si	No	Si	X
π-5	No	Si	Si	No	Si	X
0,5	Si	No	Si	No	Si	X
$3-\sqrt{3}$	~~Si~~ No	Si	[illegible]	Si	No	X
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	Si	No	Si	Si	No	X
$\frac{1}{3}$	Si	No	Si	No	Si	X

X = Si

Del mismo modo, si se apuntan como números reales a los positivos y el cero, tal y como se observa en la tabla adjunta, entonces -2,062, por ejemplo, no es real.

El 10,7% establece, salvo matices, que D es isomorfo a $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$. Marcan positivamente (Sí) los mismos números en ambas columnas, salvo los enteros, que se excluyen como decimales, pero se clasifican como reales. Podemos decir que estos alumnos reconocen a todos los números como reales y, a los decimales, como aquellos que se pueden expresar con notación decimal con coma, con parte decimal no nula. Se contesta en la columna de los decimales haciendo el cambio de registro a la notación decimal con coma, en todas de las expresiones numéricas que están en otro registro, de forma general.



Contesta con un Sí o con un No en la casillas correspondientes a cada número.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
-2,062	No	Si	Si	No	Si	X
35.521	Si	No	Si	No	Si	X
$\frac{3}{5}$	Si	No	Si	No	Si	X
2	Si	No	No	No	Si	X
$-\frac{1}{2}$	No	Si	Si	No	Si	X
0,63	Si	No	Si	No	Si	X
$-\sqrt{7}$	No	Si	Si	Si	No	X
0,123456...	Si	No	No	No	Si	X
3,14	Si	No	Si	No	Si	X
0	Si	No	No	No	Si	X
$1+\sqrt{2}$	Si	No	Si	Si	No	X
π	Si	No	Si	No	Si	X
$\frac{10}{5}$	Si	No	Si	No	Si	X
$-\frac{7}{3}$	No	Si	Si	No	Si	X
0,666...	Si	No	Si	No	Si	X
$(\sqrt{2})^2$	Si	No	Si	Si	No	X
$1,3\hat{5}$	Si	No	Si	No	Si	X
1,73205008...	Si	No	Si	No	Si	X
$\pi-5$	No	Si	Si	No	Si	X
0,5	Si	No	Si	No	Si	X
$3-\sqrt{3}$	No	Si	Si	Si	No	X
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	Si	No	Si	Si	No	X
$\frac{1}{3}$	Si	No	Si	No	Si	X

X = Si

Resultados de la primera pregunta del cuestionario en la fase de revisión

En este apartado analizamos la misma pregunta del cuestionario en la fase de revisión siguiendo el orden anterior. En primer lugar, la respuesta dada por el alumnado a cada conjunto numérico, con excepción de la columna decimales, en relación con los 23 números dados en la tarea.

Nos volvemos a encontrar, nuevamente, que los alumnos continúan, en algunos casos, considerando el criterio de identificar a los números por su escritura o por alguna característica asociada a los signos.

Los criterios para los números **Naturales** son:

a) Los números positivos y el cero. En algunos casos se excluye el $3-\sqrt{3}$, por contener el signo menos en la escritura (32,1%).

b) Los números expresados con notación decimal. (7,1%).

c) Todos. Algunos excluyen a π *y a* $\pi-5$. (7,1%).

d) Los números positivos, pero con un número finito de cifras decimales (7,1%).

e) Los naturales de la tabla (39,3%). A veces no son clasificados como naturales el 35.521, $\frac{10}{5}$ *o* $\left(\sqrt{2}\right)^2$.

Ahora el criterio más frecuente es elegir como números naturales los números naturales de la tabla con las salvedades mencionadas.

Los criterios para los números **Enteros** son:

a) Todos (14,3%). Algunos excluyen a $-\sqrt{7}$.

b) Los enteros de la tabla (35,7%). A veces no son clasificados como enteros el 35.521, $\frac{10}{5}$ *o* $\left(\sqrt{2}\right)^2$.

c) Los números positivos y el cero (3,6%).

d) Todos, excepto algunos irracionales (3,6%).

e) Los números positivos expresados con notación decimal finita (3,6%).

f) Los números que se pueden expresar con notación decimal finita (14,3%).

Ahora, lo más frecuente es elegir los números enteros de la tabla con los matices establecidos en b).

Los criterios para los números **Racionales** son:

a) Todos, excepto algunos irracionales (3,6%).

b) Los números que se pueden expresar con notación decimal con coma y finita (10,7%).

c) Los números expresados con notación fraccionaria (3,6%). Algunos eligen también el número áureo.

d) Todos (14,3%). En algunos casos se excluye al $-\sqrt{7}$.

e) Todos los que no han sido seleccionados como irracionales (10,7%).

f) Las expresiones numéricas que contienen raíces, π *y* $\pi - 5$ (3,6%).

g) Los racionales (3,6%).

h) Los positivos (3,6%).

i) Los expresados con notación decimal (3,6%).

j) Todos menos los enteros y $-\sqrt{7}$ (3,6%).

k) Las escrituras que contienen raíces y las fraccionarias (3,6%).

En este caso, no hemos podido observar claramente un patrón. Podemos señalar como el más significativo el criterio de que los alumnos identifican como número racional a todos, salvo algunos casos como a $-\sqrt{7}$.

Los criterios para los números **Irracionales** son:

a) Los números que no han sido considerados como racionales (28,6%).

b) Las expresiones numéricas que contienen raíces y algunos irracionales (por ejemplo: π *y* $\pi - 5$) (7,1%).

c) Los números expresados con notación decimal con coma e infinita, y algunos irracionales (3,6%).

d) Los números que se pueden expresar con notación decimal con coma infinita (7,1%).

e) Las expresiones numéricas que contienen raíces (7,1%).

f) Ninguno (3,6%).

g) Solamente $-\sqrt{7}$ o π *y* $\pi - 5$ (7,1%).

h) Los que están en escrituras decimales con coma infinitas y no periódicas, π *y* $\pi - 5$ (3,6%).

i) Los representados con notación no decimal (3,6%).

Las respuestas más frecuentes son las recogidas en los apartados a): los que no son racionales, considerando implícitamente $\mathbb{Q} \cap I = \varnothing$.

Los criterios para los números **Reales** son:

a) Todos (57,1%). En algunos casos se excluye a $-\sqrt{7}$.

b) Los números positivos (7,1%). En algunos casos se excluyen a $\pi\ y\ \pi-5$.

c) Los que no se han elegido como irracionales (3,6%).

d) Los números positivos expresados con notación decimal (3,6%).

e) Los enteros {35.521, 2, 0} (3,6%).

La respuesta mayoritaria es a), es decir, se consideran a todos como reales, pero en algunos casos se excluye a $-\sqrt{7}$.

En segundo lugar, expresamos el número de alumnos que excluyen o incluyen a los 23 números dados en esta tarea como decimales.

Ítem de la primera pregunta	**Número de alumnos que lo excluye como decimal**	**Número de alumnos que lo incluye como decimal**	
1.1	0	28	- 2,062
1.2	15	11	35.521
1.3	4	24	$\frac{3}{5}$
1.4	19	9	2
1.5	3	25	$-\frac{1}{2}$
1.6	1	27	0,63
1.7	8	14	$-\sqrt{7}$
1.8	5	22	0,123456…
1.9	1	27	3,14
1.10	20	6	0

1.11	9	14	$1+\sqrt{2}$
1.12	8	18	π
1.13	13	15	$\frac{10}{5}$
1.14	12	14	$-\frac{7}{3}$
1.15	3	24	0,666…
1.16	13	12	$\left(\sqrt{2}\right)^2$
1.17	3	24	$1{,}3\widehat{5}$
1.18	5	21	1,73205008 …
1.19	8	17	π-5
1.20	2	25	0,5
1.21	8	18	$3-\sqrt{3}$
1.22	5	20	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
1.23	12	15	$\frac{1}{3}$

A partir de los datos de reflejados en la tabla adjunta, observamos que se vuelven a elegir, de forma mayoritaria, los que están expresados con notación decimal con coma, a los que debemos añadir las fracciones decimales ($\frac{3}{5}$ y $-\frac{1}{2}$). Nuevamente, nos encontramos con situaciones en las que el 2 y el 0 no son considerados como decimales.

En tercer lugar describimos los comportamientos encontrados en los alumnos a partir de respuestas similares.

En esta fase nos encontramos con los comportamientos siguientes:

a) Comportamiento A (7,1%): consiste en elegir como decimales sólo los que están expresados con notación decimal con coma.

b) Comportamiento B (25%): se seleccionan las escrituras decimales con coma, todas o algunas fracciones. Los enteros son excluidos. Asimismo, se excluyen o se dejan en blanco algunos de los irracionales, no expresados con la notación decimal.

c) Comportamiento C (17,9%): los números decimales son todos, excepto los enteros.

d) Comportamiento E (3,6 %): la respuesta correcta.

e) Comportamiento F (7,1 %): los números decimales son todos. Nos encontramos que además algunos consideran que D es isomorfo a R-Z.

f) Comportamiento G (18 %): se incluyen los números expresados con notación decimal con coma y se establece correctamente la clasificación de las fracciones (decimales o no). Con respecto a los irracionales, no expresados con notación decimal, se incluyen todos o se excluyen algunos. Los enteros son incluidos en algunos casos.

En cuarto lugar mostramos, de forma resumida, los errores encontrados.

Hemos considerado como errores los siguientes:

a) Los enteros no son decimales.
b) Todos los números expresados con notación decimal con coma son decimales.
c) Los números expresados con notación decimal con coma, excepto la infinita no periódica, son decimales.
d) Todas las fracciones son decimales.
e) Algunas fracciones son decimales y otras no, pero la clasificación se hace incorrectamente.
f) Ninguna fracción es decimales.
g) Todos o algunos de los irracionales no expresados con notación decimal son decimales.
h) Hay decimales que no son racionales.
i) Hay decimales que son irracionales.

j) Hay decimales que no son reales.

k) $D \approx R - Z$. Algunos presentan ciertos matices relacionados con el significado atribuido a los números reales.

l) También nos encontramos con el error que consiste en considerar D isomorfo a R.

Discusión de los resultados

Dedicamos este apartado a confrontar y discutir los resultados obtenidos. Con respecto a los resultados generales, sobre los criterios usados para identificar a los diferentes números, obtenemos un mayor porcentaje de aciertos en la elección de los naturales en la última prueba (39,3%) que en la inicial (21,3%). Del mismo modo, en la selección correcta de los reales, del 28,6% al 57,1%.

En la tabla que se adjunta presentamos los comportamientos obtenidos en ambas pruebas, en la columna de los decimales, con los porcentajes de incidencia.

Comportamientos en la prueba inicial	**Porcentaje**	**Comportamiento en la prueba final**	**Porcentaje**
Comportamiento A	21,4%	Comportamiento A	7,1%
Comportamiento B	28,6%	Comportamiento B	25 %
Comportamiento C	25%	Comportamiento C	17,9 %
Comportamiento D	3,6 %	-	
		Comportamiento E	3,6 %
		Comportamiento F	7,1 %
		Comportamiento G	17,9 %

Tal como se observa hay comportamientos que se repiten y otros que aparecen por primera vez.

Con respecto a los que se repiten, nos encontramos con el A, que consistía en considerar como decimales sólo los números expresados con notación decimal con coma, cuyo porcentaje experimenta una reducción de la prueba inicial (21,4 %) a la final (7,1%). Asimismo, el porcentaje de incidencia del comportamiento C, donde los alumnos señalan como decimales a todos excepto a los enteros, disminuye del 25 % al 17,9 %. El comportamiento B pasa del 28,6 % al 25%.

En relación con los nuevos comportamientos E y G, destacamos que aparece, por un lado, la respuesta correcta y, por otro, se presenta una mejoría en la clasificación de las fracciones. Por otro lado, surge el comportamiento F, en el que el alumnado considera a todos los números como decimales, pero con un porcentaje bajo (7,1%). En los comportamientos E y F se consideran a los enteros como decimales.

En relación con los errores podemos observar que aparecen prácticamente los mismos.

Tipo de error	**Porcentaje (Prueba inicial)**	**Porcentaje (Prueba final)**
a) Los enteros no son decimales.	92,9%	92,9 %
b) Todos los números expresados con notación decimal con coma son decimales.	89,3%	78,6%
c) Los números expresados con notación decimal con coma, excepto la infinita no periódica, son decimales.	_	7,1%
d) Todas las fracciones son decimales.	21,4%	25%
e) Algunas fracciones son decimales y otras no, pero la clasificación se hace incorrectamente.	42,9%	46 %

f) Ninguna fracción es decimal.	35,7 %	7,1%
g) Todos o algunos de los irracionales no expresados con notación decimal son decimales.	57,1%	71,4 %
h) Hay decimales que no son racionales.	53,6%	50%
i) Hay decimales que son irracionales.	35,7%	35,7%
j) Hay decimales que no son reales.	25%	32%
k) $D \approx \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Algunos presentan ciertos matices relacionados con el significado atribuido a los números reales.	10,7%	17,8%
l) También nos encontramos con el error que consiste en considerar D isomorfo a $\mathbb{R}$.	-	7,1%

En la tabla podemos observar que el error que se comete al excluir los números enteros de los decimales es persistente por lo que podemos pensar que desde D los alumnos no pueden organizar $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$.

Por otro lado, en el caso de las fracciones, aunque se experimenta un aumento del porcentaje en la prueba final de los errores d) y e) de la tabla, disminuye el porcentaje del error f). Podemos decir que ahora hay más estudiantes que plantean que las fracciones sí pueden ser decimales que en la prueba inicial.

En este orden de cosas, observamos en la prueba final la presencia del error c) que muestra además que parte del alumnado separa las expresiones decimales con coma infinita periódicas de las no periódicas. Inicialmente, se hacía un tratamiento global, todas representaban números decimales.

Asimismo, el error g) tiene una mayor incidencia en la prueba final que en la inicial. Conjeturamos que la causa de este hecho se encuentra en que ahora hay más alumnos que hacen cambio de registro.

Los errores que están relacionados con la relación de inclusión mantienen aproximadamente el mismo porcentaje, excepto en el j). En esta fase final hay más alumnos que consideran que los decimales no son un subconjunto de los reales. El estudiante, de forma general, manifiesta menos el pensamiento estructural y el procesual que el operacional.

Para terminar, indicamos que parte del alumnado sigue utilizando el criterio, aunque con menos incidencia, de que si el número está o puede ser representado (cambio de registro) con una escritura decimal con coma, es decimal. Pensamos que esta disminución se debe a que parte del alumnado ha incorporado las reglas para averiguar si una fracción es decimal o no.

Consideraciones finales

Comenzamos por considerar que en los comportamientos se observan ciertos cambios, recogidos en el apartado anterior, que pueden surgir de la aplicación del esquema propuesto para el estudio de los sistemas numéricos. En este esquema, tal como hemos comentado, “lo decimal” y “la numeración decimal” desempeñan el papel de elementos organizadores de las relaciones entre los números y sus representaciones. Observamos que el estudio de la noción de fracción decimal, la conversión de la notación decimal a la fraccionaria, los métodos para averiguar si una fracción dada es decimal o no, ha podido favorecer la producción de parte de los cambios. Asimismo, la introducción de los irracionales, como los números reales que no se pueden expresar en forma de fracción, pero sí en notación decimal infinita y no periódica, permite que algunos estudiante excluyan de los decimales a 0,12345… y a 1,73205008…

Con respecto a los errores, la inclusión de los enteros en los decimales sigue constituyendo una dificultad para la mayoría de los alumnos. Sucede lo mismo con las relaciones: $D \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}; \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I \text{ y } \mathbb{Q} \cap I = \varnothing$. Por ello, pensamos que el estudiante manifiesta menos el pensamiento estructural y procesual que el operacional.

Asimismo, encontramos que, si bien algunos alumnos consideran que todo número expresado con escritura decimal con coma es decimal, salvo casos en los que se excluyen a los dados en notación decimal infinita o sólo la no periódica, también admiten que si está representado mediante una fracción sólo lo es si ésta es decimal. En otros casos, puede que se prosiga a realizar el cambio de registro a la notación decimal. Parece que el alumnado, de forma general, se sigue fijando en la escritura (decimal o en la fraccionaria) para elegir un número como decimal. Las razones de los alumnos a sus respuestas se estudian en la segunda pregunta del cuestionario, que no es objeto de análisis en este artículo.

Todo ello, puede contribuir a una organización de los Sistemas Numéricos, por parte del alumnado, que concretamos en los siguientes apartados:

a) Éste, a tenor de los resultados anteriores, no puede organizar $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ desde D. Por lo general, si un número es elegido como decimal es excluido como entero y viceversa.

b) Cuando el número racional viene expresado con notación fraccionaria se tiene mayor éxito en su reconocimiento que cuando está representado mediante una escritura decimal con coma periódica. Así $\frac{1}{3}$ es elegido por el 71,4%, pero $0,666\ldots$ y $1,3\overline{5}$ por el 53,6%, respectivamente. Parece que no queda claro las relaciones, en términos de conversiones, entre la representación decimal y la fraccionaria. En particular, el cambio de registro de la notación decimal a la fraccionaria.

c) Los irracionales, por lo general, son elegidos más como decimales que como irracionales. Sin embargo, se escogen más como irracionales los números expresados con notación decimal con coma, infinita y no periódica, que a los que están en notación decimal periódica. En este caso, se acerca a la idea de que los irracionales son los números que pueden ser expresados con la notación decimal, infinita y no periódica. Asimismo, se da la idea de que irracional es sinónimo de no racional (28,6%).

En relación con los significados que el alumnado atribuye a los números decimales, se sigue estableciendo la idea de que número decimal es sinónimo de número con coma, pero con los matices ya mencionados anteriormente. Sin embargo, ésta se combina, en algunos casos, con la de poderse expresar en forma de fracción decimal.

Por último, en cuanto a posibles relaciones con resultados obtenidos en estudios anteriores, realizamos una comparación teniendo en cuenta, en primer lugar, sólo los aspectos comunes. De esta manera, tenemos que:

a) La tendencia o comportamiento (A) observado en los estudios anteriores [Socas (2001), Moreno, Hernández y Socas (2004, 2007)] y en los del período 2007-2009, en la que número decimal es sinónimo de número expresado con escritura decimal con coma, se sigue observando, aunque su frecuencia disminuye considerablemente.

b) Los comportamiento B (o similar) y C se manifiestan en los todos los grupos de alumnos estudiados que pertenecen al primer curso de la Titulación de Maestro, Especialidades de Educación Infantil y Musical.

c) El comportamiento F, número decimal sinónimo de real, lo hallamos en Socas (2001) y en los estudios de Moreno, Hernández y Socas (2007) y el del año 2009, aunque con mayor porcentaje en los grupos de alumnos con fuerte formación matemática.

d) A rasgos muy generales, comentamos que en los estudios Moreno, Hernández y Socas (2007) y en los posteriores (de los años 2007-2009) se mantienen los errores (a), b), d), f), g) y h)) con distintos porcentajes. Por un lado, la exclusión de los enteros y la consideración de que cualquier escritura con coma es decimal, se presentan con porcentajes menos elevados, en el grupo de alumnos con una fuerte preparación matemática que en el resto de los grupos. Por otro lado, la inclusión de todas las fracciones y de los irracionales, no expresados con notación decimal, como decimales, se dan con una frecuencia en la que se invierte la tendencia anterior, es decir, los porcentajes son más elevados en este grupo que en el resto. La exclusión de todas las fracciones como decimales tiene una frecuencia mayor en el grupo del estudio del año 2007 que en los restantes. El estudio definitivo manifiesta una reducción considerable en su porcentaje.

En segundo lugar, tenemos en cuenta los cambios experimentados hasta el momento, que podemos resumirlos en la idea siguiente:

En los grupos estudiados con anterioridad a los del estudio definitivo, no se ha podido observar la aplicación de los conceptos de fracción decimal y equivalencia de fracciones para constituir un criterio de elección de los decimales. Sin embargo, en éste se parece apreciar que algunos alumnos distinguen las fracciones decimales de las que no lo son.

Todos estos resultados se revisarán y completarán a tenor del estudio de las respuestas de las restantes preguntas del cuestionario.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique.* Paris: De Vrin. (Traducción al castellano, 1985. La formación del espíritu científico. México: Siglo Veintiuno).

Bliss, J.; Monk, M.; Ogborn, J. (1983). *Qualitative data analysis for educational research*. USA: Croom Helm.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2), 33-115.*

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques el les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 4 (2)*, 165-198.

Centeno, J, (1988). *Números decimales.* Madrid: Síntesis.

Colera, J. y otros (1996). *Matemáticas 1 ESO.* Madrid: Anaya.

Confrey, J. & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. E. Kelly & R. A. Lesh

(Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-265). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Dickson, L. y otros (1996). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Barcelona: MEC-Labor.

Fischbein, E. (1994). The irracional numbers and the corresponding epistemological obstacles. *Proceeding of the XVIII PME,* Lisbon, Vol. 2, 352-359.

Hart, K.M: (1981). *Children's Understanding Mathematics: 11-16.* London: John Murray.

Hernández, J.; Noda, A.; Palarea, M. y Socas, M.M. (2003). Un estudio sobre habilidades básicas en matemáticas de alumnos de magisterio. *en breve*. *Noticias de la Real Sociedad Matemática Española*. 2(2), p. 4. ISSN: 1578-6099.

Hernández, J.; Socas, M. M.; Palarea, M.M.; Afonso, C. (2008). La influencia del pensamiento operacional en la resolución de problemas de Matemáticas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 9*, 147-174. ISSN: 1695-6613.

Moreno, M.D.; Hernández, V. y Socas, M. M. (2004). Respuestas del alumnado de Magisterio a un cuestionario sobre números decimales. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 6*, 253-276.

Palarea, M. M.; Hernández, J. y Socas, M. M. (2001). Análisis del nivel de conocimientos de Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de Maestro. En Socas, Camacho y Morales (Eds.). *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática III,* 213-226. CAMPUS. La Laguna. ISBN: 84-931584-5-3.

Robinet, J. (1986). Les réels: quels modèles en ont les élèves. *Cahier de Didactique des Mathématiques, 21.* Paris 7: IREM.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap.V, pp. 125-154). En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: ICE-Horsori.

Socas, M.M. (2001). Problemas didácticos entre el objeto matemático y su representación semiótica. Estudio con números decimales. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III.* Universidad de La Laguna, 297-318.

Socas, M.M. (2002). La organización de los sistemas numéricos desde su escritura decimal. Algunas expresiones ambiguas. *Números,* Vol. 50, 19-34.

Socas, M. M., Hernández, J., Palarea, M. M., Afonso, M. C. (2009). La influencia del pensamiento operacional en el aprendizaje de las Matemáticas y el desarrollo de las competencias matemáticas *Indivisa.*

Boletín de Estudios e Investigación. Monografía XII, 101-119. ISSN: 1579-3141.

ANEXO

Nombre y Apellidos: ……………………………………………………………………..

Contesta con un Sí o con un No en la casillas correspondientes a cada número.

	Natural	Entero	Decimal	Racional	Irracional	Real
- 2,062						
35.521						
$\frac{3}{5}$						
2						
$-\frac{1}{2}$						
0,63						
$-\sqrt{7}$						
0,123456…						
3,14						
0						
$1+\sqrt{2}$						
π						
$\frac{10}{5}$						
$-\frac{7}{3}$						
0,666…						
$\left(\sqrt{2}\right)^2$						
$1,3\widehat{5}$						
1,73205008…						
$\pi-5$						
0,5						
$3-\sqrt{3}$						
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$						
$\frac{1}{3}$						