



## **LENGUAJE ESTADÍSTICO. UNA PROPUESTA DIDÁCTICA<sup>1</sup>**

Israel García Alonso

Juan Antonio García Cruz

Universidad de La Laguna

### **Resumen**

En los últimos años, la enseñanza de la Estadística se ha extendido a todos los niveles educativos de forma extraordinaria. En particular, la Educación Secundaria contempla trabajar en esta enseñanza, en todos los niveles, estadística descriptiva y el análisis crítico de las informaciones utilizando este lenguaje. En Bachillerato, la formación estadística aumenta y se profundiza, llegando incluso a introducir algunos elementos de la estadística inferencial. Es en este nivel en el que nos hemos centrado en nuestro trabajo. Estamos interesados en analizar de qué forma los estudiantes comprenden los términos estadísticos necesarios para trabajar la estadística inferencial. A través de una propuesta de enseñanza realizaremos el estudio y veremos las dificultades que los estudiantes encuentran con algunos de los términos que se presentan.

### **Abstract**

In recent years, the teaching of Statistics has extended extraordinarily to all educational levels. In particular, Secondary Education beholds working in this teaching at all levels: Descriptive Statistics and Critical Analysis of Information using this language. In Secondary School, Statistical training increases and deepens, even introducing some elements of Inferential Statistics. It is at this level that we have focused our work. We are interested in analysing how students understand statistical terms necessary to work with Inferential Statistics. Through an educational proposal we will study and see the difficulties that students encounter with some of the terms that we present here.

---

<sup>1</sup> Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Proyecto de Investigación del Plan Nacional I+D+i del Ministerio de Ciencia e Innovación número EDU2008-05254.

## **Introducción**

Shuard y Rothery (1984) indican que existen dificultades en la comprensión de términos matemáticos debido al contexto de trabajo. Más concretamente, señalan que los términos varían de significado según el contexto en que se utilicen (contexto cotidiano o contexto matemático) y es importante saberlo para así tener bien definido los términos que utilizamos y poder comunicar mejor los conceptos. Swan (2008) indica que, cuando diseñamos actividades para trabajar con los alumnos, es importante buscar aquellas que permitan desarrollar el lenguaje matemático mediante actividades comunicativas, pues los conceptos se tienen cuando se articulan a través del lenguaje (Vygotsky, 1996). Orton (1990), por su parte, nos dice que, en ocasiones, en los alumnos surgen obstáculos que poco tienen que ver con las Matemáticas por estar relacionados con el lenguaje. Añade que muchos aspectos del lenguaje y las Matemáticas pueden afectar al aprendizaje y hacen que los alumnos interpreten o cambien a veces su significado real por el que creen que el profesor pretende decir. Dickson et al (1991) nos indican que, dado que el desarrollo del lenguaje es de naturaleza dinámica, resulta esencial que el alumno y el profesor analicen los diversos significados e interpretaciones de las palabras y frases, de manera que cada uno sepa claramente lo que el otro entiende y quiere decir al utilizar determinadas formas lingüísticas.

El objetivo de este artículo es continuar este trabajo previo y analizar cómo comprenden los estudiantes los términos relativos a la Inferencia Estadística, desarrollando para ello una propuesta de enseñanza que atiende a la clasificación de los términos de García Alonso y García Cruz (2007). En dicho trabajo los términos se clasifican según el significado que presentan en el contexto en que se trabaja:

- **Mismo significado en ambos contextos:** Estadística, Población, Individuo y Tamaño de la muestra.
- **Distinto significado en ambos contextos:** Muestra, Estimación, Inferir, Distribución, Probabilidad, Representativo, Riesgo y Significativo.
- **Significado propio en el contexto matemático:** Parámetro, Estadístico, Muestreo aleatorio, Media muestral, Media poblacional, Nivel de confianza, Desviación típica, Error máximo admisible, Normal, Sesgado, Eficiente, Proporción muestral, Contraste de hipótesis, ...

Para realizar el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes nos basamos en la teoría neo-Piagetiana, descrita por Biggs y Collis (1982; 1991). Esta teoría constituye un modelo jerárquico para el estudio del desarrollo del proceso de enseñanza de los estudiantes, basado en un conjunto de estadios limitados a un dominio dado. Con el marco teórico pueden diferenciarse varios niveles: el nivel preestructural, asociado con las respuestas que indican un nivel bajo de aprendizaje con respecto al nivel de abstracción que exige la tarea o que expresan fundamentos de carácter subjetivo, y que muestran que el estudiante está despistado o atraído por aspectos irrelevantes. En algunas respuestas el estudiante hace simplemente una afirmación y no argumenta, presenta ideas incompletas, o muestra no haber hecho ningún intento real de dar una respuesta estructurada apoyada en evidencias. El nivel Uniestructural está constituido por las respuestas fundamentadas en ideas imaginarias y/o relacionadas con sus experiencias de lo cotidiano. En algunas de ellas, el estudiante se centra en un aspecto del dato y lo usa para justificar su respuesta, o considera un atributo concreto dentro de sus propias experiencias y lo estima suficiente

para la situación. En el nivel Multiestructural, la respuesta del alumno está en la dirección de la tarea, muestra algunas características adecuadas de ésta, pero no integra correctamente los diferentes elementos, fundamentalmente porque atribuye significados diferentes al requerido en la tarea. En este nivel, el estudiante muestra un conocimiento aislado de definiciones, fórmulas, algoritmos y procedimientos. Por último, tenemos el nivel Relacional en el que el estudiante realiza conexiones precisas entre los diferentes elementos e integra las diferentes partes, definiciones, propiedades, fórmulas, algoritmos, procedimientos, condiciones de aplicación, en el proceso de desarrollo y con ella completa una estructura coherente y significativa.

Teniendo en cuenta todo lo expuesto, decidimos trabajar con el modelo original propuesto por Biggs y Collis (1982; 1991), estableciendo cinco niveles de comprensión: Preestructural, Uniestructural, Multiestructural, de Transición entre el Multiestructural y el Relacional y, finalmente, el nivel Relacional. Esta clasificación está basada en el trabajo de García Cruz y Garrett (2008).

Durante el curso 2008/2009 se realizó una experiencia con estudiantes de 2º de Bachillerato, modalidad de Ciencias Sociales, de un Instituto de Educación Secundaria de Santa Cruz de Tenerife. El Centro se encuentra situado en una zona periférica de la ciudad y los estudiantes tienen, en general, poca motivación hacia el estudio.

La clase estaba compuesta por 14 alumnos: 9 chicas y 5 chicos. Son los mismos estudiantes a los que se les administró la encuesta sobre los términos estadísticos, presentada en el apartado anterior.

Todos ellos son muy regulares en la asistencia a clase, por lo que no faltaron durante el desarrollo de las sesiones.

En este caso, el investigador coincide con el profesor que les da clase durante el curso; además, fue su profesor de Matemáticas durante el curso anterior. Por tanto tiene cierta idea de la formación estadística que poseen y cuál puede ser el punto de partida adecuado para empezar a trabajar la Inferencia.

### **Hipótesis y metodología.**

En este trabajo nos planteamos los siguientes objetivos:

- La propuesta que realizamos, ¿permite que los estudiantes interioricen de manera más natural los términos estadísticos?
- Los razonamientos matemáticos realizados oralmente, ¿facilitan que los estudiantes incorporen a su lenguaje habitual los nuevos términos específicos y, además, permite al profesor conocer los errores conceptuales que pueden tener y así poder corregirlos?

La propuesta se centra en la estimación de un parámetro mediante un intervalo; en este caso, el parámetro que se quiere estimar será la media poblacional. Este es el punto de partida de la Inferencia Estadística en este nivel.

El profesor realiza una organización previa de lo que va a trabajar con los estudiantes, así como las cuestiones que pretende trabajar con ellos para desarrollar el tema.

Shaughnessy (2007) nos invita a realizar estudios de investigación acerca del discurso estadístico que tiene lugar en el aula. El autor se pregunta si se propone a los estudiantes analizar datos a alto nivel. Si se discute en el aula de manera que se promueva el pensamiento estadístico

elaborado, el análisis crítico, la representación múltiple y la comunicación reflexiva de resultados y soluciones. El análisis de procesos desarrollados en las aulas no se ha realizado en investigaciones desarrolladas para la enseñanza de la Estadística. ¿Hay un equilibrio entre el análisis exploratorio de datos y la enseñanza de conceptos y procesos estadísticos? En este sentido, nuestro trabajo ha tratado de lograr dicho equilibrio y que se construyeran los nuevos conceptos a través del análisis de datos reales y de generar discusión en el aula de manera que se promoviese el pensamiento estadístico.

Pero el aprendizaje que siguen los estudiantes se puede describir mediante las denominadas *Trayectorias de Enseñanza-Aprendizaje*, descritas por Heuvel-Panhuizen (2001). Según estos autores, estas trayectorias tratan de describir cómo es el proceso de aprendizaje que sigue un estudiante. Estas trayectorias contienen tres significados entrelazados:

- Una trayectoria de aprendizaje que da una visión general del proceso de aprendizaje seguido por el alumno.
- Una trayectoria de enseñanza, consistente en las indicaciones didácticas que describen cómo realizar una enseñanza más efectiva y que estimule el proceso de aprendizaje.
- El compendio de la materia, consistente en el conjunto de elementos del currículo matemático que se deben enseñar.

Heuvel y Panhuizen (2001) nos indican, además, que la trayectoria de enseñanza-aprendizaje no debe ser vista de manera estrictamente lineal. Se debe ver más como una senda que como una única vía, porque tiene que ver con:

- El proceso de aprendizaje de cada uno de los estudiantes.

- Discontinuidades en el proceso de aprendizaje: no siempre aprenden los diferentes conceptos de la misma manera.

- El hecho de aprender diferentes habilidades de manera simultánea, y de que varios conceptos se pueden desarrollar a la vez.

- Las diferencias que pueden aparecer en el proceso de aprendizaje en la escuela, como consecuencia de diferentes situaciones de aprendizaje fuera de ésta.

- Los diferentes niveles a los que los estudiantes pueden llegar a desarrollar algunas habilidades.

En nuestro trabajo, hemos ideado una trayectoria de enseñanza que hemos desarrollado tratando de diseñar la trayectoria de aprendizaje que el alumno puede seguir en el tema concreto de la Estadística Inferencial. Nos encontramos con alumnos que han tenido diferentes experiencias formativas en los que tenemos que desarrollar unas habilidades estadísticas que son similares para todos. Somos conscientes de las dificultades que esto entraña y de que los ritmos de aprendizaje de cada uno son diferentes.

Según Swan (2008), cuando pensamos en la elaboración de una propuesta didáctica, debemos ser conscientes de que la discusión colaborativa es esencial, pues los conceptos son co-creados. Este autor indica que en los diseños didácticos no podemos perder de vista los siguientes principios:

- La importancia de centrarse directamente en los obstáculos conceptuales clave, basándose en los conocimientos que ya tienen los estudiantes.

- La creación de tensión y la provocación de un conflicto cognitivo que pueda ser resuelto a través de la discusión.

- La utilización de tareas que sean accesibles y que permitan su ampliación, que alienten la toma de decisiones, creativas y que cuestionen un orden superior.

- El uso de múltiples representaciones para crear conexiones.

- La propuesta de tareas que permitan a los estudiantes cambiar su papel, de modo que se expliquen y se enseñen unos a otros.

El modelo que nos presenta Swan (2008) difiere del aprendizaje por “descubrimiento”, donde el profesor simplemente presenta tareas y espera que los estudiantes exploren y descubran las ideas por sí mismos. En este modelo se propone que el papel del docente incluya:

- guiar a los estudiantes y hacer un uso constructivo del conocimiento previo.

- expresar con claridad en el propósito de la actividad.
- desafiar a los estudiantes mediante cuestiones efectivas y probadas.
- realizar debates en pequeños grupos y con toda la clase.
- alentar la discusión de puntos de vista alternativos.
- extraer las ideas importantes en cada lección.
- ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre sus ideas.

Los estudiantes deben seguir los siguientes pasos para llegar a comprender un concepto:

- un estudiante debe aislarlo y llevarlo a un punto de atención (identificación).



- encontrar similitudes y diferencias entre este concepto y otros similares (discriminación).
- identificar las propiedades generales del concepto, en particular sus casos (generalización).
- comenzar a percibir un principio unificador (sintetización).

En nuestro caso, hemos utilizado este modelo para elaborar nuestra propuesta. Debemos tener en cuenta que el modelo, por lo novedoso que resultará para los estudiantes, requerirá un tiempo de adaptación pues, dado que los estudiantes no están acostumbrados a participar de manera activa en las discusiones en clase, al comienzo, el desarrollo de la propuesta tal como la hemos concebido podría presentar dificultades.

Mediante su desarrollo en el aula, podremos ver cómo van surgiendo los diferentes términos estadísticos y cómo los estudiantes los asimilan. Entre nuestros objetivos está poder analizar si esta propuesta permite que los estudiantes interioricen de manera más natural los términos estadísticos. Y, por otro lado, estudiaremos si la contextualización les ayudará a conocer mejor los conceptos estadísticos que son necesarios desarrollar para poder comprender conceptos más complejos o que requieren de los anteriores para su comprensión.

La propuesta de enseñanza se llevó a cabo durante cuatro sesiones lectivas que fueron grabadas por el profesor, de modo que los estudiantes desconocían este hecho. Se procedió de esta manera para que los estudiantes no se avergonzaran, lo que podría provocar que su libertad de expresión en medio de la clase quedase limitada. Al acabar las sesiones, se les explicó lo que había sucedido y ellos dieron su consentimiento para seguir adelante con este trabajo.

A ellas acudieron todos los estudiantes matriculados y lo hicieron de manera constante durante los días que tuvo lugar el experimento.

## Resultados y discusión

Presentamos a los estudiantes una situación o problema que queremos resolver, dentro de un contexto que les resulte claro y cercano, como son las estaturas de 180 estudiantes de un Centro. Estos datos constituyen la población sobre la que vamos a trabajar; véase la tabla siguiente que recoge las estaturas de 180 estudiantes

165	171	162	163	175	169	178	154	179	160
174	162	160	172	183	168	175	178	159	182
155	169	163	164	169	165	175	176	174	180
165	176	168	162	165	170	181	175	162	167
170	187	152	170	169	173	184	182	184	180
173	178	199	174	179	161	181	163	168	177
170	180	181	170	174	170	186	163	156	168
170	176	168	178	167	175	175	170	174	163
160	171	171	163	166	177	160	165	164	168
160	182	171	168	170	173	165	172	164	175
165	172	158	168	167	167	173	174	160	173
175	172	171	167	168	171	165	169	169	160
173	176	175	187	163	172	175	165	170	160
189	178	182	168	162	171	162	161	174	150
178	172	162	162	156	175	172	178	176	155
174	180	161	180	184	168	188	181	175	162
175	175	181	168	186	159	181	165	167	178
171	179	177	162	173	162	183	174	164	168

Realizaremos el análisis de la propuesta de enseñanza refiriéndonos a la comprensión de los términos estadísticos y a la clasificación que hemos realizado. A lo largo de las sesiones desarrolladas han ido surgiendo diferentes términos estadísticos que han tenido que ser interpretados por los alumnos en algunos casos, y explicados por el profesor en otros.

En este apartado trataremos de caracterizar las respuestas dadas por los estudiantes según la taxonomía SOLO que estamos utilizando para categorizar las respuestas. Debemos tener presente que, como ya hemos indicado, esta categorización nos indica cómo son las respuestas de los estudiantes ante una tarea concreta. Sin embargo, un mismo estudiante puede mostrar diferentes categorías de respuesta si variamos la tarea. Y, por otro lado, nos va a servir, como ya indicamos, para conocer la estructura de la respuesta, que se relaciona con la calidad del aprendizaje, y que medimos según los niveles de comprensión ante una tarea concreta.

El primer término al que se refiere el profesor durante la explicación del trabajo que se va a realizar es el de POBLACIÓN. Sobre este término no hay ningún tipo de explicación ni de problema entre los estudiantes. Todos entienden a qué se hace referencia con este término y pueden seguir el estudio sin dificultad.

El segundo término que aparece de manera natural en la construcción de los intervalos de confianza es el de MEDIA. Aquí tenemos varias dificultades puestas de manifiesto por los estudiantes. Nos interesa que estos conozcan el uso de la media como resumen de una cantidad de datos. En esta primera sesión el profesor les plantea que indiquen una forma de resumir los datos que están en una tabla de 180 estaturas de estudiantes de Bachillerato.

Cuando se les pide resumir los datos, la primera respuesta es, en general para todos los estudiantes, tratar de organizarlos en una tabla de frecuencias. Todos los estudiantes, relacionan lo que se les pide con la experiencia previa que poseen sobre la Estadística Descriptiva. Hay

estudiantes que tratan de dar los datos agrupados en intervalos, con lo cual interpretan que los están resumiendo de forma apreciable.

Cuando el profesor les indica que tienen que calcular la media para acercarnos a resumir la información, encontramos varias interpretaciones de dicho término.

Una alumna interpreta que resumir los datos es agruparlos en tablas de frecuencias, y posteriormente, cuando se indica que hay que calcular la media, entiende que hay que buscar el valor que más se repite (moda).

*“Hacer una tabla de frecuencias. Agrupar los datos que se repitan y así no tenemos esto todo largo [...] El que más se repite”.*

En este caso podemos clasificar la respuesta dentro del estadio UNISTRUCTURAL, pues la estudiante se está fijando únicamente en la repetición para poder resumir los datos.

Otra alumna tampoco interpreta correctamente la media, pues la explica a través del cálculo de la desviación típica.

*“Calculamos la media de todos los números,(...) y hallamos la distribución (...) ¿cómo se llama?...la desviación típica.”*

En este caso entendemos que la alumna está utilizando un cálculo en el que se hace uso de la media. No entiende que se le pide que la calcule, sino que busca un cálculo conocido en el que se utiliza. Clasificamos esta respuesta en el estadio PREESTRUCTURAL porque se está centrando en un dato único con el que pretende dar respuesta a lo que se pide, pero que es del todo erróneo.

Encontramos otra respuesta que comienza tratando de resumir los datos agrupándolos en intervalos, pero es el único de los estudiantes que habla de calcular la media desde un principio. Además trata de explicar, a su manera, que el cálculo de la media puede no resultar el valor que buscamos, sino que puede dar uno aproximado. La respuesta dada por este estudiante la podemos clasificar dentro del estadio MULTIESTRUC-TURAL pues, aunque está algo encaminada en el sentido de la tarea propuesta, no llega a integrar todos los elementos que la componen.

Aquí constatamos una dificultad importante. Los estudiantes no entienden que la media sirve para resumir información de una serie de datos, a pesar de conocer su valor. No encontramos que los estudiantes interpretan que la media es exclusivamente la suma de dos extremos y dividida entre dos, sino que conocen el algoritmo y, por tanto, sí saben que al tener más datos deben dividir por el número total de datos que intervienen. La dificultad en este concepto viene por su desconocimiento de la media como aglutinador de información. En este sentido, la propuesta de enseñanza les ha mostrado esta nueva faceta de la media y les ha ayudado a enriquecer este concepto. Además este hecho es fundamental en Estadística Inferencial, pues explica por qué se trabaja con este parámetro y no con otro.

El siguiente término con el que nos encontramos es el de MUESTRA. En este caso, el profesor lleva a los estudiantes hasta este término, en la búsqueda de la media de la población que les ha proporcionado previamente. Aquí surgen distintos tipos de respuestas. En la forma en que quieren construir la muestra podemos explicitar las concepciones que poseen sobre ella.

Una alumna indica que debemos coger el pequeño, el mediano y el más grande. De esta forma trata de encontrar valores que no se alejen mucho de los que tenemos. Subyace la idea de representatividad de la muestra.

En la respuesta de otro alumno también se observa que, para él, la selección debe parecerse a la que tenemos; no admitiría como muestra válida aquella cuyos resultados fueran de alumnos altos exclusivamente.

*“Si ves que en la clase hay 3 altos y 20 pequeños y de los pequeños te salen solo unos cuantos tienes que coger más pequeños”.*

Incluso en la segunda sesión, después de haber explicado el método de selección de los datos a través de un sorteo, este alumno vuelve a plantear el problema de la exactitud desde el punto de vista de la representatividad de la muestra.

Analizando la respuesta dada por otra alumna encontramos que, en primer lugar, necesita un elemento que le permita agrupar los datos, pues no los puede ver en conjunto. Ese elemento es la edad que, en este caso, es irrelevante al tratarse de estaturas de alumnos del mismo curso.

*“Yo les asignaría una edad a cada uno. (...) Escogería el intervalo con el más pequeño y el mayor”.*

La respuesta del siguiente alumno también expresa que se debe controlar, de alguna manera, la muestra que se obtiene.

*“Pero si coges 20, a lo mejor escoges los 20 más altos, y entonces la media es muy irreal”.*

En este caso, el alumno pone un ejemplo muy claro de lo que quiere decir. Así, si la distribución está formada por 3 altos y 20 bajos, no admite como válida una muestra con pocos datos de los considerados bajos, de los que hay más en la población.

Este alumno entiende, igual que los demás, que la muestra es tanto más válida cuanto más se parezca a la población de la que proviene.

Esto nos permite situar todas las respuestas dentro del mismo estadio: UNISTRUCTURAL. Como hemos indicado, se basan en experiencias que poseen para justificar su razonamiento y se centran en un único atributo: la muestra debe ser representativa del conjunto de datos. Por esta razón, los estudiantes buscan métodos de selección que consideran aleatorios pero, que en el fondo tratan de que reproduzcan los esquemas de la población de partida que ellos intuyen que posee, lo que lleva a situaciones erróneas. Por esta razón hablan los estudiantes de que la muestra sea “más exacta o no”.

El profesor, en la segunda sesión, introduce el término ESTIMACIÓN; a lo largo de dicha sesión se dedican al cálculo de estimaciones de la media a través de la extracción de muestras de la población. El profesor da la definición que van a utilizar de este término en el aula de Matemáticas para que, de esta forma, no haya confusión con otros posibles significados.

Debemos tener en cuenta que, a lo largo de todas las sesiones de trabajo, a los estudiantes se les hace reflexionar en voz alta. Así, intentamos, por un lado, que el alumno trate de expresarse en lenguaje matemático en el aula y, por otro, el profesor, en muchas de las conversaciones del aula, lo que hace es repetir en voz alta lo que el

estudiante ha dicho para, de esta forma, enfrentarlo a la respuesta que da y que, a la vez, los demás compañeros puedan seguir el razonamiento que se está desarrollando en la clase, todo esto con el ánimo de realizar aportaciones.

El MUESTREO ALEATORIO debe ser explicado por el profesor, pues los alumnos, en ningún caso, han realizado antes un muestreo aleatorio. El profesor dedica una sesión a tal fin. El procedimiento que tienen que realizar, lo entienden en seguida, pero siempre surge la duda de que el muestreo que realicemos no sea representativo de la población. Es por ello que el profesor tiene que insistir en que la validez del muestreo lo da el método de selección y no los resultados que obtengamos.

En las sesiones siguientes se introducen términos como NIVEL DE CONFIANZA, INTERVALO DE CONFIANZA, que son definidos por el profesor para que no haya duda de su significado, pues se trata de conceptos que tienen significado propio dentro del contexto matemático. Otros términos como TAMAÑO DE LA MUESTRA no son definidos por tener el mismo significado en ambos contextos.

Cuando contrastan cómo intervienen los diferentes conceptos en el intervalo de confianza encontramos las siguientes situaciones:

- A) Nivel de confianza - Amplitud del intervalo
- B) Nivel de confianza - Tamaño de la muestra menor
- C) Nivel de confianza - Tamaño de la muestra - Amplitud del intervalo

Cuando se han introducido los tres elementos del intervalo de confianza es cuando podemos tener más dificultades y cuando realmente vemos si han comprendido la finalidad y utilidad de los intervalos de confianza. En este momento aparece un diálogo interesante entre el



profesor y uno de los alumnos. En dicha conversación se da la circunstancia de que el alumno no entiende que la cantidad de datos que utilizamos en la muestra hace que se mejore el resultado, sino que lo que observa es que el intervalo de confianza es más pequeño. Este hecho puede hacer que, por tanto, la media real esté fuera del intervalo. No está teniendo en cuenta el tercer elemento que es la confianza del intervalo. Este alumno es un claro ejemplo de estudiante que entiende los elementos por separado pero no ha sido capaz aún de integrarlos y comprenderlos en todo su conjunto. Podríamos clasificarlo dentro del estadio MULTIESTRUC-TURAL, por no integrar correctamente los elementos. Conoce los cálculos que hay que hacer, pero tiene dificultades a la hora de interpretarlos en conjunto.

## **Conclusiones**

De la propuesta de enseñanza llevada a cabo podemos extraer algunas conclusiones. En origen, la propuesta de enseñanza constituye una guía didáctica de instrucción, que refleja un conjunto de tareas contextualizadas que van desarrollando diferentes conceptos relacionados con la Inferencia Estadística. Su diseño se sostiene en el modelo propuesto por Swan (2008) que tiene por finalidad guiar, desafiar, debatir, extraer ideas y hacer conexiones entre sus ideas. Los estudiantes no fueron seleccionados por su disposición hacia el experimento, sino todo lo contrario, desconocieron que participaban en él hasta el final. La propuesta ha tenido como hilo conductor la construcción de los intervalos de confianza y el análisis de todos los términos y conceptos que van surgiendo por necesidad hasta llegar a los intervalos de confianza.

Desde el punto de vista de la metodología, el modelo exige que los estudiantes participen de manera activa y que lo hagan comunicando su razonamiento, primero por escrito y luego en voz alta, a toda la clase. Esto supone un cambio significativo tanto para ellos como para el profesor, pues éste tiene que perder protagonismo y deben ganarlo los alumnos. En principio, este elemento dentro de las sesiones ha hecho que las clases fueran más lentas, que los alumnos se atascaran ante las cuestiones que plantea el profesor y que éste tuviera que decidir que debía seguir avanzando para evitar la sensación de “pérdida de tiempo”. Todo esto hace que en ocasiones el profesor dé la respuesta de lo que pregunta sin esperar que los estudiantes intervengan o expresen sus razonamientos. Por otro lado, hubo estudiantes que no participaron o lo hicieron de manera muy limitada. La metodología propuesta requiere que los estudiantes sean capaces de seguir el trabajo desarrollado. Esto obliga a que lleven la materia al día; además, hay estudiantes que presentan rechazo hacia la asignatura por las dificultades que la materia les supone. Es por ello que los que más participan son aquellos que van trabajando la materia y se sienten capaces de responder al profesor de manera más o menos coherente, y son los que forman parte del estudio.

Si nos fijamos en los términos estadísticos, éstos van surgiendo de manera natural en el aula. Hemos visto que aparecen las distintas categorías que hemos descrito a lo largo de este trabajo. Pero lo que sí cabe destacar es que los estudiantes no son capaces de estar en los estadios más avanzados durante las sesiones. Los alumnos llegan, en el mejor de los casos, al estadio MULTISTRUCTURAL; esto significa que reconocen los diferentes aspectos de la tarea pero que no los integran correctamente.

Creemos que este hecho se debe a varias razones. En primer lugar, estamos trabajando con términos propios del lenguaje matemático que, en muchos casos, son abordados por los estudiantes por primera vez. Estos términos, aparte de ser definidos, requieren que se trabaje con ellos para poder llegar a comprenderlos correctamente y en toda su extensión. Para ello es necesario considerarlos en diferentes situaciones y contextos para que se produzca una mejor comprensión.

Por otro lado, el factor tiempo es muy importante. Les hemos dedicado cuatro sesiones y han aparecido los términos: muestreo aleatorio, nivel de confianza, media poblacional y media muestral. Son todos términos nuevos y se dispone de poco tiempo para asimilarlos y comprender cómo interactúan entre sí todos ellos y con los que ya conocían: tamaño de la muestra, media, muestra, probabilidad, etc. Todo esto justifica que los estudiantes no tengan respuestas más ricas en cada uno de los términos estudiados.

Con respecto al contexto, podemos destacar que para los estudiantes este ha resultado bastante cómodo y sencillo de entender. Este elemento es básico, pues no estamos añadiendo dificultad en el planteamiento de la actividad, sólo aquellas que son propias de los conceptos que vamos a trabajar. Por otro lado, los conceptos estadísticos surgen de forma natural y, además, localizados en una situación concreta sobre la que se está realizando el estudio. La naturalidad con la que aparecen los conceptos ayuda a que los estudiantes puedan entenderlos mejor y, que por otro lado, puedan reconocer situaciones semejantes en las que puedan aplicar los mismos procedimientos utilizados en esta situación. Así, por ejemplo, los estudiantes reconocen la media como valor intermedio para un conjunto de datos pero, al realizar este trabajo, han podido comprender que la media,

además, sirve para resumir la información contenida en una tabla. Ese aspecto de la media lo han comprendido con naturalidad debido al contexto en el que presentamos la tarea. Los estudiantes comprendieron fácilmente lo que se les pedía y vieron que la media era un buen estimador de las estaturas.

Las cuatro sesiones en las que ha desarrollado el profesor esta propuesta didáctica han sido pocas para ver el desarrollo del modelo en toda su extensión. No se pudieron añadir más sesiones debido a la falta de disponibilidad de tiempo por parte de los participantes y del profesor. En este sentido, el nivel en que se desarrolla esta propuesta hace que no se pueda dedicar más de una semana (cuatro sesiones) a construir el intervalo de confianza, para luego pasar a realizar problemas rutinarios. Además, los tiempos están tan cerrados que en todo momento generan en el profesor una sensación de agobio por si no se cumplan los plazos previstos. Esto repercute de igual forma en el aprendizaje pues, en ocasiones, se limita el tiempo para la enseñanza pensando que de igual manera se limita el tiempo para el aprendizaje, lo cual es un error, pues el aprendizaje de cada alumno tiene su propio tiempo que es diferente y depende de muchos factores. Todo esto está en consonancia con la denominada Trayectoria de Enseñanza-Aprendizaje descrita por Heuvel-Panhuizen (2001); efectivamente, los alumnos describen diferentes trayectorias de aprendizaje para una misma trayectoria de enseñanza. Pero, por otro lado, el aprendizaje no se puede considerar de manera lineal, y los estudiantes pueden llegar a conseguir las habilidades que se les requiere cuando menos lo espere el profesor, como también nos advierte Heuvel-Panhuizen (2001).

En conclusión, aunque no se han podido trabajar todas las actividades que configuran el programa establecido para nuestro

experimento de enseñanza, dado que no se pudo alargar la fase de trabajo en el aula, pensamos que nuestro proyecto de enseñanza-aprendizaje ha ayudado a comprender de qué manera aparecen los términos estadísticos en el aula y las dificultades con que se pueden encontrar los profesores y los alumnos cuando se enfrentan con estos términos. No es nada sencillo tener que construir un concepto estadístico en el que intervienen tantos elementos diferentes y tener en cuenta, además, los errores conceptuales previos para poder tratar de erradicarlos. Hemos visto cómo la heurística de la representatividad descrita por Kahnemann et al. (1982) está continuamente presente. Además, es tan recurrente que interfiere en la construcción de todos los conceptos relacionados con las muestras extraídas. Creemos que la propuesta ayuda a que los estudiantes sean conscientes del error que cometen cuando generan muestras que exigen que sean representativas de la población. Por otro lado, los términos que manejan los estudiantes se encuentran en un estadio poco avanzado, entre otros motivos, porque entendemos que la introducción de nuevos términos, hace que éstos entren en conflicto con los términos previos y, por tanto, que desarrollen tareas con dichos términos dentro de los estadios poco elaborados. Aún así, creemos que éste es el camino para poder avanzar y comprender mejor los términos, pues los estudiantes han tenido que aislar los términos y contrastarlos entre sí. Creemos que exponer los razonamientos en voz alta también es muy importante, pues permite que utilicen el lenguaje matemático y que adquieran los términos nuevos con más facilidad, pues no es sólo el profesor el que los utiliza, sino que los estudiantes, desde un primer momento deben hacer uso de ellos y el profesor les corrige si los usan de manera incorrecta. Esto permite, a su vez, que el profesor pueda ir comprobando que los estudiantes los van

comprendiendo correctamente y, si no fuera así, ayudarles a corregir el error conceptual que muestran.

## Referencias bibliográficas

- Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. New York, NY: Academic Press.
- Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1991). Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior. En: H. A. H. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement* (pp. 57-76). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Dickson, L., Brown M. y Gibson O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Labor.
- García-Alonso, I. y García-Cruz, J.A. (2003): “Algunos resultados sobre la actuación de los alumnos en las cuestiones de estadística en la PAU *Actas de las XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, 733-738.
- García Alonso, I. y García Cruz, J. A. (2007). Statistical Inference in textbooks: Mathematical and everyday contexts. *Proceedings of the 31<sup>st</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2 (pp. 257-264). Seoul: PME.
- García Cruz, J.A., Garrett, A.J. (2008): *Understanding the arithmetic mean: A study with secondary and university students*. Journal of the Korea Society of Mathematical Education. Series D: Research in Mathematical Education. vol. 2, 1, 49-66.
- Heuvel-Panguizen, M. (2001). *Children learn mathematics: A learning teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Utrecht: Freudenthal Institute.
- Hiebert, J. y Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. W. Grows (Ed). *Handbook of research in teaching and learning of mathematics*, 65-97. New York: MacMillan.
- Kahnemann, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982): *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases* Cambridge University Press. *Science*, New Series, Vol. 185, 4157. (Sep. 27, 1974), 1124-1131.
- Orton, A. (1990). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: MEC-Morata.
- Shaughnessy, J.M. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 957-1008). NCTM. Greenwich, CT.

- Shuard, H. y Rothery, A (Eds) (1984): *Children reading mathematics*. London: Murray.
- Swan, M (2008). Designing a Multiple Representation Learning Experience in Secondary Algebra. *Journal of the International Society for Design and Development in Education*. Disponible en <http://www.educationaldesigner.org/ed/volume1/issue1/article3/index.htm>
- Vygotsky, L. (1996). *Thought and Language*, (A. Kouzlin, Trans. 9<sup>th</sup> ed.), Cambridge: Massachusetts Institute of Technology Press.