FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
ISSN: 1695-6613

SIGNIFICADO QUE ATRIBUYEN AL CERO FUTUROS DOCENTES DE PRIMARIA

Daniel Méndez Sánchez
CINVESTAV-IPN, México.
Aurora Gallardo Cabello
CINVESTAV-IPN, México.
Alicia Bruno Castañeda
Universidad de La Laguna, España

Resumen

Se presentan los resultados obtenidos al aplicar una prueba escrita diseñada para conocer los distintos significados que atribuyen al cero estudiantes para Maestros de Educación Primaria. Dicho significados otorgados al cero se clasificaron, con el fin de contrastarlos con los encontrados en diversas culturas antiguas.

A partir de una revisión histórica y analizando las respuestas encontramos tres interpretaciones asignadas al cero: el cero griego (denota la ausencia de un objeto), el cero chino (concebido como un equilibrio o compensación de números enteros), y como cero relativo (punto de referencia para pasar de los números positivos a los negativos).

Abstract

We present the obtained results by applying a written test designed to know the different meanings that are ascribed to the number zero, by students of Teacher Training for Elementary Education. Aforesaid meanings given to the number zero were categorized in order to contrast them with the ones found in different ancient cultures.

Starting from a historial revision and analysing the answers, we found three interpretations asigned to zero: the Greek zero (denoting the absence of an object), the Chinese zero (as an equilibrium or compensation of integers), and as relative zero (point of reference to cross from positive to negative numbers).

Introducción

En la historia de las matemáticas se encuentran conceptos cuya construcción y aceptación llevó mucho tiempo. Ejemplos de ello son los números enteros, evitados por parte de los matemáticos durante centurias y que terminó con su aceptación en el siglo XIX (Glaeser, 1981). Otro ejemplo es el reconocimiento del número cero, su papel en los sistemas de numeración y el significado otorgado por las distintas comunidades.

El cero ha emergido en diversas culturas antiguas, pero su aceptación tardó siglos. En culturas como la griega, la china y la maya, entre otras, la emergencia del cero estuvo ligada a diversos sentidos de uso y significados. En esta investigación, nos centramos en dos concepciones del cero de dos culturas cuyo análisis resulta relevante por su diferencia de significación. Por un lado, el desarrollo del concepto de cero en el imaginario colectivo chino y, por otro, las ideas que prevalecieron en la Grecia antigua. En las referencias consultadas se aprecia la relación directa que guarda el cero con la negatividad, pues sin el cero no se puede hablar de números negativos.

Lizcano (1993) ofrece un acercamiento al pensamiento sobre el cero predominante en China desde los siglos 453 ANE y en Grecia durante el periodo clásico en el 540 ANE, mostrando la importancia que tenía en la primera civilización, y la negación que sufrió en la segunda. El papel del cero ha estado determinado por el "imaginario cultural" prevaleciente en cada época histórica.

En este trabajo abordamos el cero desde un punto de vista educativo, y analizamos si los significados asociados a éste a lo largo de la historia se reflejan en las ideas que desarrollan los estudiantes, teniendo en cuenta que la construcción del cero comienza en la etapa de Educación Infantil y concluye cuando se extiende el conocimiento numérico al conjunto de los números reales en la etapa de la

Educación Secundaria Obligatoria, en España, y en el nivel Bachillerato, en México.

La existencia del cero versus su indeterminación

Indica Lizcano (1993) que adentrarse al mundo de culturas antiguas y milenarias es, hasta cierto punto, una empresa casi imposible de lograr, pues las interpretaciones de un conocimiento o concepto suelen ser el resultado tanto de nuestro subjetivismo como del imaginario colectivo en el que nos encontramos inmersos.

La emergencia de la negatividad y el cero en China queda registrada en el Jiu Zhang Suanshu o "Nueve Capítulos del Arte Matemático", texto escrito alrededor del 250 ANE y del que se tiene conocimiento por Lam Lay Yong (1987). Esta negatividad surgida en China es considerada por Lizcano (1993) como la negatividad zheng/fu/wu. Dicha expresión de negatividad es resultado directo del sustento cultural que otorga la terna yin/yang/dao.

Es en el Jiu Zhang Suanshu donde aparece el cálculo numérico a partir del uso de barras o varillas de colores para simbolizar los elementos con los que se trabajan. Así, en el capítulo octavo del Jin Zhang Suanshu, se muestra el Método Fang Cheng, en cuyo curso aparecen palillos negros (fu), a los que se les da el nombre de "números negativos", los cuales, interactuando con los palillos rojos (zheng), "números positivos", generan espacios vacíos (wu), marcados por una ausencia de símbolo.

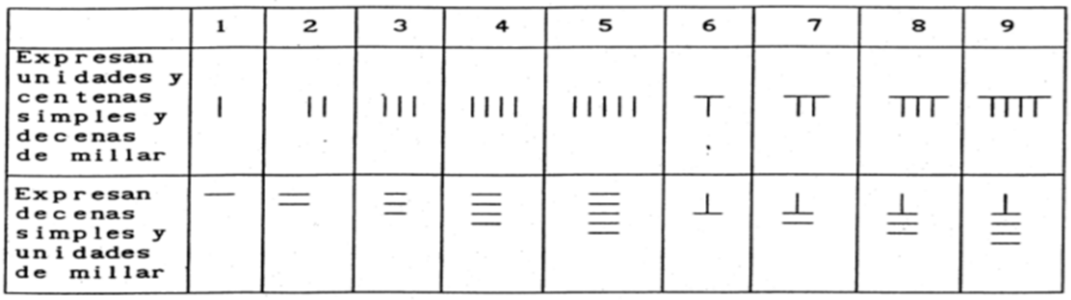


Figura 1. Representación de números en la Cultura China

Para poder operar con estos números-nombre, la matemática China trabajaba en un tablero en el que se disponían las varillas de colores a fin de realizar los cálculos. Estos números-nombre se representaban como se muestra en la Figura 1.

Esta interacción de los números-nombre estaba dada por reglas de operación. Dichas reglas, denominadas zheng fu shu, permitían sumar y restar los números zheng y los números fu, tanto entre sí como de wu. Las reglas de operación para la sustracción, de acuerdo con Lizcano (1993, pp 64-65) son las siguientes:

Reglas de sustracción: *"Cuando los nombres son lo mismo, efectuar la sustracción; cuando los nombres son diferentes, efectuar la suma. Un palillo zheng emparejado con wu se hace fu y un palillo fu emparejado con wu se hace zheng"*.

Y, simétricamente, la regla de adición establece que: *"Cuando los nombres son diferentes. Efectuar la sustracción; cuando los nombres son el mismo, efectuar la suma. Un palillo zheng emparejado con wu se hace zheng y un palillo fu emparejado con wu se hace fu"*.

Así, al interactuar los números-nombre en el tablero de cálculo, se lograba un equilibrio entre los números-nombre zheng y fu, creando espacios vacíos wu. Las reglas zheng fu shu nos permiten advertir de ese "emparejamiento" dado entre los elementos positivos y negativos, pero se resalta la interacción obtenida por emparejamiento entre la "nada" (wu) y los números-nombre, que le confiere un estatus activo al cero, dándole un carácter de gozne o pivote que permite ir de la negatividad a la positividad y viceversa.

Lizcano (1993) reafirma esta idea cuando señala que: "ese hueco en el tablero al que alude wu funciona de hecho, como "elemento neutro" para la adición, que dota al conjunto de los números zheng fu de lo que hoy llamamos estructura de grupo para la suma (Z,+).

Sin embargo, investigadores como Marztloff (1988) (citado en Lizcano 1993, pág.100) descarta la existencia de este cero, aduciendo a que nunca aparecen soluciones nulas en los problemas de la matemática china y no utiliza el número cero en operaciones, como los otros números. Ciertamente no se dio la existencia de un símbolo para el cero en los textos antiguos, como es el caso de Jiu Zhang Suanshu pero, al percatarnos de la operatividad que se lleva a cabo en el tablero de cálculo, se logra percibir ese espacio vacío a manera de "cero virtual", que no sólo se limita a dicho lugar, sino que, de acuerdo con las reglas zheng fu shu, opera directamente con los números nombre y como resultado de la operación entre ellos.

Pero, ¿qué permite a la cultura china operar con la negatividad e interactuar con ese espacio vacío (wu)? No cabe duda de que su imaginario colectivo, basado en el complejo simbólico yin/yang/dao, permitiría apreciar la forma en como está organizado el mundo, interpretando una relación de opuestos constante en la vida. Así, este complejo simbólico nos encamina a pensar, no sólo en la existencia del ser, sino en el no-ser como complemento de ese ser que se encuentra conjugado en el dao y en el wu.

Caso contrario a lo expuesto anteriormente será la forma en cómo se concebía el entorno desde el imaginario colectivo griego. Lizcano (1993) indica cómo los griegos encuentran imposible la emergencia de la negatividad y el cero. Para este autor, existen dos condiciones que inhiben la aparición del cero. Por un lado la consideración del espacio de representación como extenso, donde tiene sentido todo lo que es representable y visible. Por otro lado, el modo de pensar, denominado abstracción, está basado en la percepción de los sentidos. Este modo de pensar clasifica y organiza al mundo en géneros y especies, y todo aquello que no sea parte de esa realidad, por el principio de no contradicción, será declarado inexistente.

Así, dentro del imaginario colectivo griego, la idea misma de pensar en aquellos objetos que no existen carece de total sentido, pues el orden de los objetos en la naturaleza nace de la existencia misma, del ser. Aquello que no es (pensando en el cero) y aun aquello que es "menos que nada", carece de total sentido y representación. Esto llevaría a la episteme griega a considerar sólo el aspecto "positivo" de la realidad y a relegar a la indeterminación aquello que no existe y que no puede ser pensando.

Apreciamos por tanto, una distinción entre ambas culturas, la China y la Griega. Por un lado, el imaginario colectivo chino no tiene una representación de "la nada", pero opera con ella a partir de los espacios vacíos que se crean en el tablero, resultado de interacciones de opuestos, y ellos mismos serían capaces de asignarle una existencia misma al darle el nombre "wu"; mientras que en Grecia, los clásicos (sustentados en el principio de no contradicción), no sólo se limitarían a la existencia de las cosas, sino que tanto lo negativo como la nada estarían en un terreno indeterminado, a lo cual, para nombrarlo, ni siquiera se le asignaría un nombre o vocablo.

A pesar de lo anterior, aun dentro de la cultura griega, se darán algunos acercamientos a la negatividad y el cero en la Grecia Antigua. Anaximandro, Platón y los atomistas compartirán una concepción de la negatividad en contra del culto seguido a lo positivo; esto les permitirá apreciar el cosmos desde otra perspectiva, tal como lo señala Lizcano (1993). Anaximandro considerará el ausentarse tan operativo como el presentarse y, así, la negatividad será simétrica y de signo opuesto a la positividad, de modo que ambas se correlacionan y se generan mutuamente.

La idea de Anaximandro tomará sentido en el ápeiron, donde lo negativo y positivo generan una tensión que da como resultado la materia infinita, el movimiento. Para este filósofo, todo ha surgido a partir de un desprendimiento de contradicciones, es decir, de una interacción y tensión entre opuestos, de una acción dialéctica.

Con respecto a ese ápeiron, Lizcano (1993) nos dice: "El ápeiron es así condición de posibilidad del ser de las cosas como del pensar y, por lo tanto, en sí mismo es tanto pura nada como mero impensable: el vacío. Un vacío que sirve para distinguir las naturalezas, de modo que es una separación y división de las cosas que están unas junto a otras".

Sin embargo, aún las ideas de Anaximandro se verían limitadas por el pensamiento dominante en Grecia, que enaltecía la positividad y relegaba su opuesto a la sombras de la indeterminación.

Como vemos, la idea del cero que prevalece en la cultura china es un equilibrio constante de opuestos, donde el espacio vacío wu desempeña un papel dinámico en el paso de lo positivo a lo negativo y viceversa. En el caso de la cultura Griega, aunque se logran dar atisbos de la negatividad y el cero, el pensamiento basado en el principio de no contradicción no consideraría la existencia de ese vacío al grado de no nombrarlo; sin embargo, se puede interpretar el cero como la ausencia misma del objeto.

Por otro lado, desde el punto de vista histórico, la aceptación del cero permitió, no sólo la representación simbólica de la ausencia de cantidad, sino que dio pie a considerar los números negativos. Glaeser (1981), hace referencia a los obstáculos epistemológicos en la comprensión y el aprendizaje de la negatividad. Este autor señala que, en la evolución histórica de la noción del número negativo desde sus primeras emergencias hasta el concepto actual, se constatan varios obstáculos, pero uno de ellos tiene una relación con el cero. En "La ambigüedad de los dos ceros", Glaeser se refiere a las dificultades que hubo entre los matemáticos para pasar de un "cero absoluto" a un "cero origen" elegido arbitrariamente, lo que conducía a no poder considerar cantidades "menores que nada".

Por otro lado, durante el Renacimiento, se pusieron en duda las concepciones de magnitud y número, heredados de la matemática teórica griega. En 1585, Stevin publicó *La Disme*, en la que mostró el poder utilizar los números tanto para contar como para medir y afirmó que, dado un número, siempre se le puede asociar una magnitud; de la misma manera, dada una magnitud, siempre puede encontrarse un número asociado a ella (Waldegg, 1996).

Al establecer un nuevo concepto de número y asociarlo a la idea de magnitud, Stevin encuentra que en la aritmética, para contar, tiene sentido comenzar desde la unidad. No obstante, al considerar una unidad de medida, es necesario comenzar desde un punto. A este punto, propio de un segmento, no se le podrá asignar el uno como origen.

Como indica Waldegg (1996), la inclusión de la unidad de medida dentro del dominio de lo numérico y la posibilidad de subdividirla indefinidamente, establecieron las bases de la identificación entre número y magnitud, y amalgamaron sus campos operatorios. Stevin afirma que "no es la unidad aritmética lo que desempeña un papel análogo al punto en geometría, sino el cero. El cero y la magnitud son semejantes y tienen tantas cosas en común que parecen casi idénticos. Consecuentemente, debe haber algo en el número que corresponda al punto en las magnitudes, pero no es, como se creía en la antigüedad, que la unidad sea el principio del número tal y cómo el punto es el principio de la magnitud, sino que este papel corresponde al cero". Este hecho suposo un paso trascendental para la identificación punto-número en la recta de Descartes.

Así, el considerar al cero como punto de referencia dio la posibilidad de reconocer las cantidades menores que nada, aunque esto generó dificultades entre los matemáticos (Glaeser, 1981).

Estudios del cero en didáctica

Desde el punto de vista de la educación matemática se encuentran investigaciones encaminadas a resaltar la importancia del cero en el entorno aritmético-algebraico.

Gallardo y Hernández (2005) se centran en el reconocimiento de las asignaciones del signo menos (unario-binario) y del cero (nulidad-totalidad) durante el proceso de transición de la aritmética al álgebra en alumnos con edades de entre 12 y 13 años. Gallardo y Hernández (2006) encuentran que los alumnos manifiestan cinco significados del cero en la resolución de tareas aritmético-algebraicas: el cero nulo (aquel que no tiene valor), el cero total (el que está formado por la suma de números opuestos), el cero implícito (el que no aparece escrito), el cero aritmético (como resultado de una operación aritmética) y el cero algebraico (el que resulta de una operación algebraica o como valor de una incógnita).

Gallardo y Hernández (2007a) determinaron otro nuevo significado del cero que no había sido analizado en Gallardo y Hernández (op.cit.): el cero origen. Con tres acepciones: un punto fijo arbitrario localizado sobre la recta numérica; un punto móvil arbitrario que cambia de ubicación; y un punto fijo inamovible, esto es, el punto medio de la recta numérica. También se presenta el hecho de la evitación del cero origen cuando es simbolizado, pero ignorado al realizar operaciones y cuando no es simbolizado.

Gallardo y Hernández (2007b) reflexionan sobre la génesis de los números negativos y el cero, así como sobre las primeras aplicaciones de un método de resolución de ecuaciones surgido en el álgebra de la antigua China. Se presenta un episodio histórico en el que se rescata el método Fang Cheng para la resolución de sistemas de ecuaciones. En esta investigación se observa cómo los alumnos, al utilizar el método Fang Cheng, le dan sentido al cero nulo y al cero total, así como a la formación de ceros, lo que les conduce a la aceptación de números signados.

Castaño (2007) realiza una investigación con estudiantes del nivel medio superior con el fin de identificar las interpretaciones y significados atribuidos al número cero en el contexto de la multiplicación y la división. Dentro de la investigación, la autora fija tres sentidos de uso del cero:

a) Como un número neutro que sirve como elemento de transición entre los positivos y negativos.

b) Como un número contextual, es decir, con múltiples significados de acuerdo al contexto.

c) El cero como elemento que simboliza la ausencia de una cantidad, es decir como elemento de una numeración que indica la ausencia de valor.

Objetivos y método

El objetivo de esta investigación es analizar el significado que los futuros profesores de Primaria otorgan al cero y contrastarlos con los significados aparecidos en la historia, en especial, con las culturas china y griega.

Para ello, se diseñó un cuestionario escrito que permitiera identificar los significados que subyacen sobre el cero, los contextos a los que se asocian y cómo se representan.

Se aplicó un cuestionario escrito de 10 ítems a dos grupos de futuros docentes de primaria en España, pertenecientes al grado de Maestro de Primaria. Un grupo estaba constituido por 26 estudiantes de segundo curso y el otro por 28 estudiantes de tercer curso.

Los estudiantes respondieron al cuestionario en una sesión de clase ordinaria de una hora. Se les entregaron los ítems de uno en uno, con la finalidad de que contestaran en el orden indicado y no pudieran regresar a ítems anteriores para modificar su primera respuesta.

Tomando como referencia lo descrito en el aspecto histórico y en las investigaciones del ámbito de la enseñanza, se establecieron las categorías de análisis de sus respuestas que se muestran en la tabla 1.

Categoría	Significado	Descripción
Cero Chino	Cero como resultado de la compensación o equilibrio de opuestos (+a)+(-a)=0	Identificar qué cantidades iguales de signos diferentes se compensan resultando cero.
Cero Griego	Cero como una ausencia total de elementos. Está relacionada con la nada.	Resultado de la "visión sensualista", donde al no existir un objeto se asocia con el vacío o la nada.
Cero Relativo	Cero como un punto de referencia o como el límite de separación entre los números negativos y positivos.	Elemento de la recta numérica que muestra un punto de referencia o de separación entre lo positivo y negativo

Tabla 1. Categorías del cero utilizas en la investigación

Categoría	Descripción
Discreto	La representación o ejemplos corresponden a objetos o situaciones discretas.
Continuo	Se hace uso de contextos o representaciones continuas como el tiempo, la distancia, la temperatura, o la recta numérica.
Sistema de numeración posicional	El cero es la ausencia de unidades, decenas, centenas, etc. Por ejemplo, en el número 205, el 0 simboliza la ausencia de centenas.
Principios matemáticos	Son propiedades matemáticas que ejemplifican el conjunto vacío o el elemento neutro.
Otros	En esta categoría se incluyen representaciones o contextos que por sus características, no se pueden englobar en las anteriores.

Tabla 2. Categorías del contexto utilizado por los alumnos

De la misma forma, para poder analizar los contextos elegidos por los estudiantes utilizamos las categorías mostradas en la tabla 2.

El relacionar las justificaciones y representaciones del cero nos permite tener una visión global de los diferentes significados de un mismo estudiante.

El cuestionario escrito de 9 ítems (ver anexo 1), en el que se aprecian las siguientes características y categorías de análisis:

Ítem	**Características**	**Categorías**
1	Idea inicial del significado del número cero.	Cero Chino Cero Griego Cero Relativo
2	Ejemplo en lenguaje natural sobre el cero.	Cero Chino Cero Griego Cero Relativo
3	Representación gráfica sobre las concepciones acerca del cero.	Cero Chino Cero Griego Cero Relativo
4	Contextualizar una adición de números opuestos cuyo resultado es cero	Cero Chino Cero Griego Cero Relativo
5	Representar gráficamente el ítem 4. Observar si la representación está relacionada con lo expresado en el ítem 4.	Cero Chino Cero Griego Cero relativo
6	Situación en un contexto de temperatura específico. Observación de cómo explica el cero relativo y como lo representan.	Cero Relativo
7	Problema aditivo con estructura de combinación. Observación si surge el cero chino o de compensación. Representación gráfica del problema.	Cero Chino Cero Relativo Cero griego
8	Problema aditivo con estructura de dos cambios. Hace énfasis en un cero relativo. Representación gráfica del problema.	Cero Chino Cero Relativo Cero griego
9	Problema aditivo con estructura de cambio. Hacer referencia al cero relativo Representación gráfica del problema.	Cero Chino Cero Relativo Cero griego

Tabla 3. Característica de los ítems

Análisis de resultados

En este apartado se muestra el análisis de los resultados obtenidos en los diferentes ítems. En algunos casos los hemos agrupado para relacionar sus respuestas. Se esperaba que los estudiantes manifestaran una diversidad de significados o metáforas sobre el concepto de cero.

Ítem 1

Las metáforas tienen relación con lo que cotidianamente expresamos. Regularmente utilizamos expresiones en la vida diaria haciendo referencia a la nada, como "No tengo nada", "de nada vale…", etc., que se asocian en matemáticas para expresar el significado del cero.

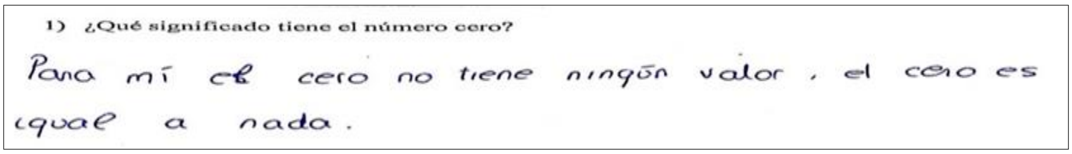
Lo anterior queda reafirmado en el ítem 1 cuando a los estudiantes se les pregunta: "¿Qué significado tiene el número cero?". Del total de futuros docentes que contestaron a la pregunta, el 82% asocia el cero con la concepción de "no tener nada", es decir, del cero griego (ver tabla 4).

Categoría	Porcentaje
Cero chino	0
Cero Griego	81
Cero Relativo	6
Cero Griego-Cero Relativo	13

Tabla 4. Porcentaje de concepción del cero en el ítem 1

Este fuerte arraigo sobre la idea de "nada" nos hace pensar que los estudiantes conciben el cero como la representación de la ausencia de objetos, lo que nos conduce a clasificarlo dentro de "cero griego". No obstante, algunos alumnos (el 13% de los participantes), consideran al cero como "nada" y, a su vez, como el punto que separa los números negativos de los positivos.

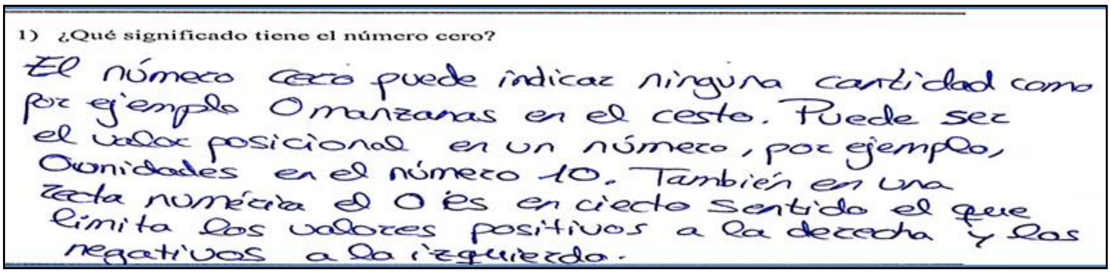
En la Figura 2 se presenta la respuesta de un estudiante, catalogada como cero griego. Se observa que el cero se asocia a la ausencia de los objetos y se le desestima señalando que "no tiene ningún valor".


1) ¿Qué significado tiene el número cero?

Para mí el cero no tiene ningún valor, el cero es igual a nada.

Figura 2. Respuesta al ítem 1. Ejemplo de repuesta asociada a cero griego

En cuanto a la doble concepción del cero manifestado por los estudiantes, es el resultado del proceso de enseñanza al ampliar los conjuntos numéricos. La Figura 3 muestra esta interpretación del cero.


1) ¿Qué significado tiene el número cero?

El número cero puede indicar ninguna cantidad como por ejemplo 0 manzanas en el cesto. Puede ser el valor posicional en un número, por ejemplo, 0 unidades en el número 10. También en una recta numérica el 0 es en cierto sentido el que limita los valores positivos a la derecha y los negativos a la izquierda.

Figura 3. Respuesta al ítem 1. Doble concepción del cero.

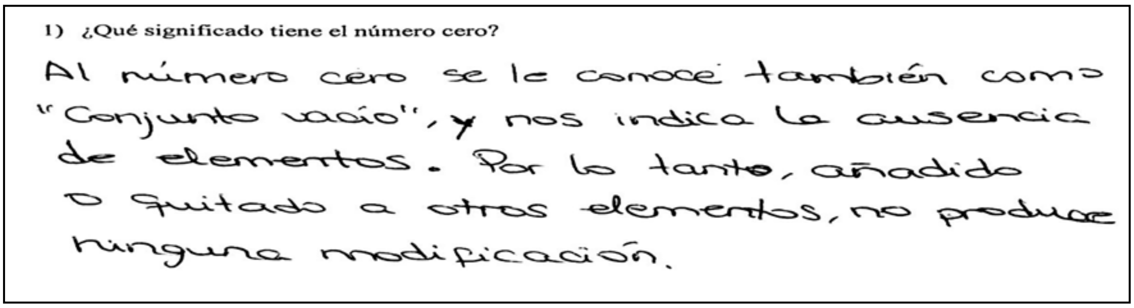
En muchas de sus respuestas, a los estudiantes les resulta necesario contextualizar con la intención de clarificar sus comentarios. Chiu (2001) nos señala que la comprensión de conceptos podría estar ligada estrechamente a dos situaciones particulares: por un lado, al uso de metáforas para traer a nuestra realidad aquellos conceptos que nos son difíciles de asimilar y, por otro, al uso de algoritmos, que son resultado de una asimilación de conceptos abstractos que nos permiten operar con mayor facilidad.

En la tabla 5 aparecen los dos contextos más recurrentes en este ítem, que son el del sistema de numeración decimal y los principios matemáticos. En la Figura 3 se muestra la respuesta de un estudiante que asocia el cero al sistema de numeración decimal: "…Puede ser el valor posicional en un número, por ejemplo, cero unidades en el número 10…"

Contexto	**Porcentaje**
Discreto	11
Continuo	4
Sistema de numeración	35
Principios matemáticos	31
Otro	4
Sin contexto	15

Tabla 5. Porcentaje de contextos en la explicación del cero en el ítem 2

Por otro lado, una muestra de la aplicación de principios matemáticos sustentados por los estudiantes para describir al cero, aparece cuando recurren al concepto de “conjunto vacío” (ver Figura 4).


1) ¿Qué significado tiene el número cero?

Al número cero se le conoce también como "Conjunto vacío", y nos indica la ausencia de elementos. Por lo tanto, añadido o quitado a otros elementos, no produce ninguna modificación.

Figura 4. Muestra de un principio matemático

Ítem 2. Ejemplos de uso del cero

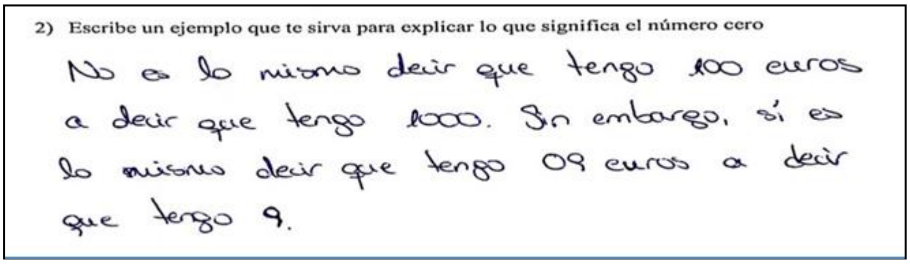
Una vez que los estudiantes manifestaron el significado que tenían del cero, en el ítem 2 se les pidió que escribieran un ejemplo que lo explicara.

La tabla 6 nos permite observar que, al intentar dar un ejemplo, el 48% de los estudiantes recurre a un contexto discreto, en el que tienden a señalar la ausencia de algún objeto o la acción de perder una determinada cantidad de objetos.

Contexto	Porcentaje
Discreto	48
Continuo	0
Sistema de numeración	19
Principios matemáticos	17
Otro	7
Discreto-otro	7
Sistema numérico. Principios matemáticos	2

Tabla 6. Principales contextos utilizados por los alumnos

En las respuestas correspondientes al contexto del sistema de numeración, el 19% de los futuros profesores expresaban que “si el cero está a la izquierda de un número, no vale nada, mientras que si está a la derecha entonces aumenta su valor”. Esta idea se ejemplifica con contextos monetarios en los que se indica que "cuantos más ceros tenga una cantidad (o un cheque, etc.), siempre vale más" (ver Figura 5).

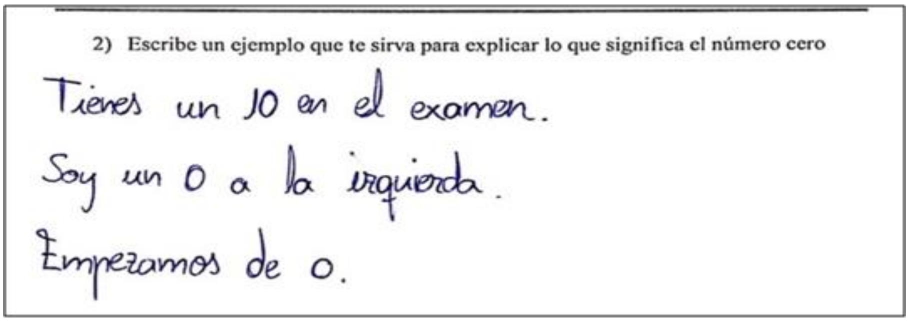

2) Escribe un ejemplo que te sirva para explicar lo que significa el número cero

No es lo mismo decir que tengo 100 euros a decir que tengo 1000. Sin embargo, sí es lo mismo decir que tengo 09 euros a decir que tengo 9.

Figura 5. Respuesta al ítem 2. En contextos monetarios, el cero indica "más valor"

En este ítem aparecen expresiones cotidianas para ejemplificar el cero y reafirman tanto la idea de cero griego como de cero relativo.

En la Figura 6 se puede ver que, al decir "soy un cero a la izquierda", hace referencia a la ausencia de valor que tiene el cero en esta posición cuando no hay más dígitos a su izquierda. Mientras que, al afirmar "empezamos de 0", le atribuye la característica de un punto de partida, aunque también implica considerar "nada" de lo que se ha hecho o vivido anterior a ese inicio. Cuando los estudiantes usan expresiones como las antes señaladas, están haciendo uso de conceptos matemáticos pero reafirmando la idea que persiste sobre el cero como "nada".


2) Escribe un ejemplo que te sirva para explicar lo que significa el número cero

Tienes un 10 en el examen.

Soy un 0 a la izquierda.

Empezamos de 0.

Figura 6. Respuesta al ítem 2. Expresiones cotidianas del cero

Ítem 3. Representación gráfica del cero

Con el objetivo de ver la relación entre el concepto y el ejemplo escrito por los futuros profesores, se les pidió que representaran el cero de manera gráfica (mediante un dibujo, esquema, o similar) (Ver tabla 7).

Como se ha visto en los ítems 1 y 2, los estudiantes muestran un mayor uso del "cero griego", pues consideran el número como la representación de la ausencia de los objetos. Sin embargo, al simbolizar gráficamente el cero, tienden a usar modelos que conocen, como es el caso de la recta numérica. El 35% de los estudiantes recurren a este tipo de representación; si bien los alumnos contemplan el cero como un elemento sin valor, lo visualizan como un punto de referencia. Esta misma idea también se manifiesta en aquellos estudiantes que utilizan como representación de los ejes cartesianos (7%). Nos referimos a dibujos discretos cuando hacen uso de objetos (13%) y muchos estudiantes entienden por representación la escritura del número 0 de forma aislada o como resultado de una operación (18%), mientras que el 19% de los participantes no consideran siquiera representarlo.

Representación	**Porcentaje**
Dibujo discreto	13
Símbolo numérico	18
Recta numérica	35
Plano cartesiano	7
Otro	19
Símbolo-Dibujo discreto	4
Dibujo discreto-otro	2
Símbolo-Recta numérica	2

Tabla 7. Porcentaje de uso de representaciones en el ítem 3

Las representaciones que usan los estudiantes son muy variadas. En algunos casos, sus producciones nos invitan a considerar la coexistencia de diversos sentidos y usos del cero, asociados a la instrucción recibida en la escuela. Sin embargo, algunas representaciones no generan una idea clara sobre lo que se está tratando de expresar (ver Figura 7).

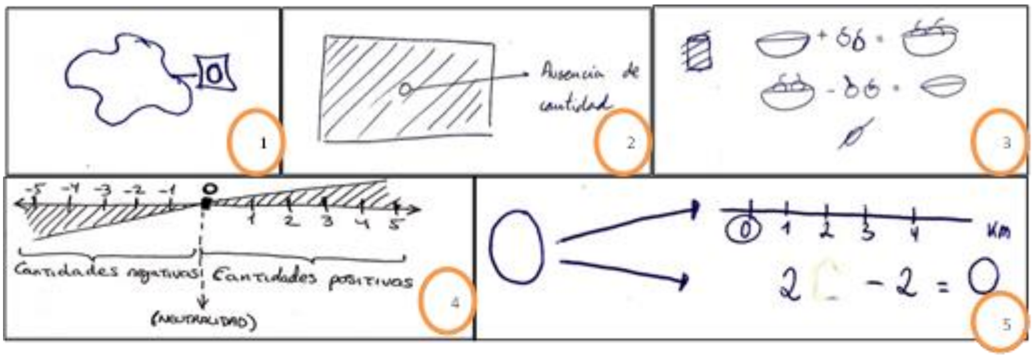


Figura 7. Ejemplos de respuestas al ítem 3. Imagen 1 y 2: Conjunto vacío; Imagen 3: Representación discreta. Imagen 4 y 5: Recta numérica

Las primeras dos representaciones (imágenes 1 y 2) nos invitan a concebir el “conjunto vacío”; en la imagen 3, el estudiante recurre al entorno discreto para señalar dos operaciones: en la primera agregar dos frutas a un espacio vacío mientras que, la segunda, implica sustraer esos mismos elementos. Aunque se resalta la idea de “cero griego”, la imagen evoca lo que Lizcano (1993) cita de Laozi (Lao tse):

Treinta radios convergen en el centro de una rueda, pero es su hueco lo útil para el carro. De la arcilla se fabrican vasijas, pero es su vacío lo que hace posible su uso. Se agujerean muros y ventanas en los muros de una casa, pero es su vano lo que permite habitarla. Así, pues, en el ser centramos nuestra atención, pero es en el no ser (wu) donde reside su utilidad.

En la imágenes 4 y 5, encontramos la representación de la recta numérica, sin embargo, en la imagen 4 se le atribuye un significado de neutralidad y como elemento que separa a los números positivos de los negativos mientras que, en la imagen 5, se le asigna la idea de inicio, pues no se consideran los valores por debajo de cero. Además la imagen 5 muestra como coexisten los diferentes significados del cero. El cero como vacío, el cero como punto en la recta y posición primera, y el cero como resultado de una operación.

Ítem 4. Ejemplificar la suma de opuestos

En el ítem 4 se pide a los estudiantes redactar una situación que se resuelva con la operación 7 + (-7) = 0. En el análisis se consideran contextos que utilizan la estructura de la situación aditiva.

El 48% de los estudiantes usa un contexto discreto, con situaciones de compra de objetos y el pago de deudas. Mientras que otro 48% recurre a contextos continuos entre los que destaca el uso del ascensor o de las temperaturas. Lo anterior resulta interesante, pues nos muestra un peso preponderante en el uso del cero griego y del cero relativo en contextos escolares.

Contexto	**Porcentaje**
Discreto	48
Continuo	48
Otro	2
Discreto-continuo	2

Tabla 8. Porcentaje de contextos utilizados en el Ítem 4

En los ejemplos que utilizan el ascensor, los estudiantes asumen que el resultado no implica “no tener un objeto”, sino reconocer el cero como el punto que señala la planta baja, lo que de manera general le atribuiría el carácter de “cero relativo”.

Aquellos ítems contestados con situaciones de compra-venta y deudas, reafirman la idea que prevalece en los estudiantes, es decir, se mantiene la idea de “cero griego” como representación de la ausencia de objetos. (Ver figura 8).

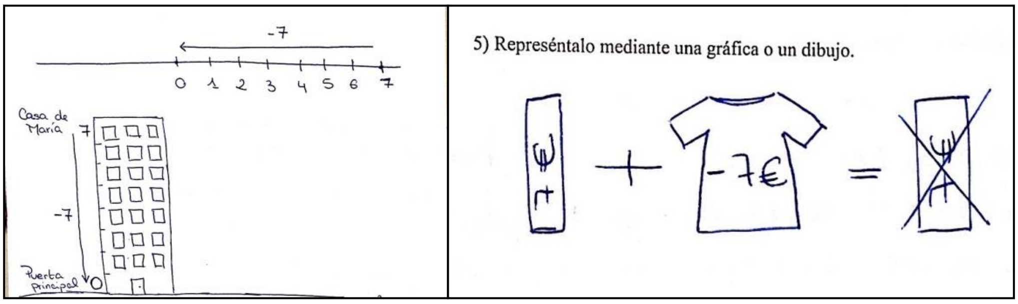


Figura 8. Respuestas al ítem 4. Ejemplos de contextos utilizados

Además del contexto, se analizó el tipo de estructura que el estudiante usa en su ejemplo (ver tabla 9). El 68% de los estudiantes recurre a una estructura de cambio. Esto puede ser resultado de los múltiples problemas de este tipo que los estudiantes han resuelto durante su vida académica.

Estructura	Porcentaje
Cambio	68
Dos cambios	28
Otros	2
Cambio-Otros	2

Tabla 9. Tipo de estructura frecuente en el ítem 4

En la Figura 9 se puede apreciar la diferencia entre los usos de las dos estructuras con mayor incidencia (Cambio y Dos cambios).

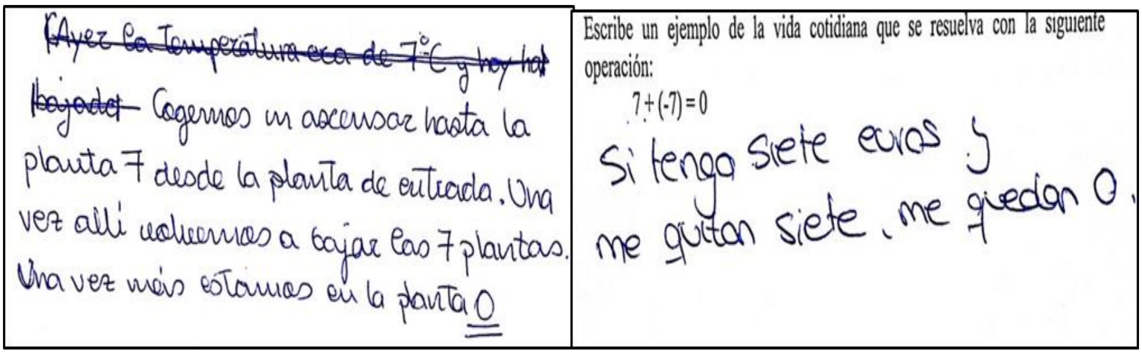


Figura 9. Respuestas al ítem 4. Ejemplos de estructuras.
Imagen 1: Dos cambios Imagen 2: Cambio

Ítem 5. Representar gráficamente la suma de opuestos

El ítem 5 pide realizar la representación gráfica del ítem 4. Dentro de las representaciones destaca notablemente el uso de la recta numérica (48%), en la que el cero es un punto de referencia. No obstante, de aquellos que recurren a esta representación, únicamente la mitad considera valores positivos sin tomar en cuenta los valores por debajo de cero.

Representaciones	Porcentaje
Discreto	39
Continuo	52
Otros	2
Discreto- continuo	7

Tabla 10. Tipos de representaciones usadas en el ítem 5

Como se puede observar en la tabla 10, el uso de representaciones discretas también abarca un amplio porcentaje, pues el 39% recurren a dichas representaciones para reafirmar la concepción de cero como la representación de la ausencia de un elemento, de la nada.

Hay estudiantes que plantean diversas situaciones tales como las representaciones gráficas y en ellos se advierte el cero griego tanto como el cero relativo. En estos casos, para poder trabajar con las cantidades expresadas, recurren a la sustracción de números positivos (es decir, cambian la expresión matemática $7 + (-7) = 0$ por la expresión $7 - 7 = 0$). Esta modificación puede tener diversas interpretaciones; pensamos que tratan de evitar el uso de los números negativos por las dificultades presentadas al operar con ellos.

Un ejemplo del uso de diversas representaciones se muestra en la Figura 10, en la que podemos observar que el estudiante recurre a la recta numérica (contexto continuo) y también a una representación discreta. La aparición del cero griego y del cero relativo es evidente en la imagen.

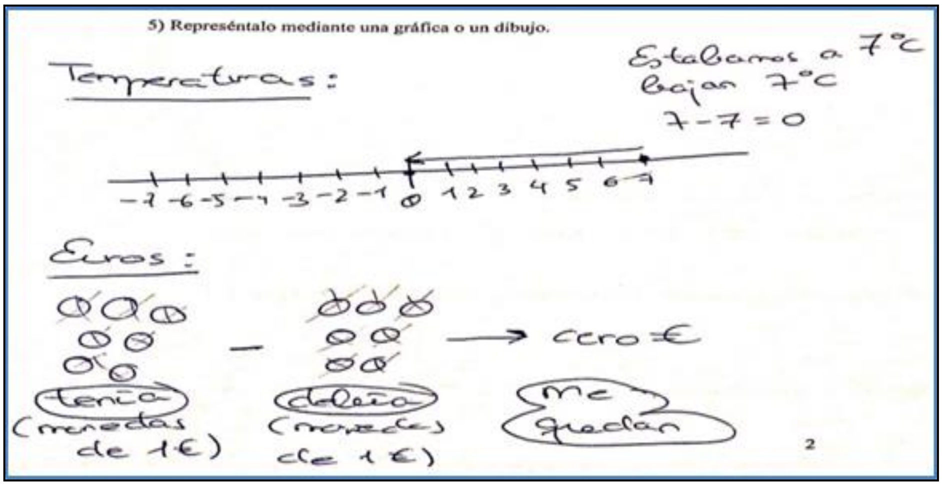


Figura 10. Respuestas en el ítem 5. Dos representaciones del cero

Ítem 6. Significado de 0º

En el ítem 6 se pidió a los futuros docentes que explicaran el significado de que la temperatura ambiente es de 0 °C y que utilizaran una representación gráfica para sustentar su explicación. La intención del ítem era verificar el uso que hacen del cero como un número relativo y la representación en la recta.

La tabla 11 nos muestra que el 87% de los futuros docentes hace un uso del cero como relativo en situaciones de contexto continuo como es el de la temperatura. Así, la temperatura 0 °C se considera como un punto de referencia para determinar cuáles son los grados positivos y los negativos. A pesar de que algunos tratan de relacionar el concepto de cero grados con los cambios físicos que experimenta el agua, la mayoría de los estudiantes se remiten al comportamiento que tiene la recta numérica.

Categoría	Porcentaje
Cero chino	6
Cero Griego	0
Cero Relativo	89
Otros/sin respuesta	2
Chino-Relativo	3

Tabla11. Significados del cero en el ítem 6

Aunque se hace uso de la recta numérica para explicar la temperatura cuando ésta es de cero grados centígrados, los estudiantes recurren a expresiones basadas en la experiencia, es decir, fijan las temperaturas a partir de si “hace calor” o “hace frío”.

Otro aspecto que se debe resaltar es la convivencia errónea de diversos sentidos de uso del cero en este contexto. Como podemos ver en la tabla 11, hay un 6% de los estudiantes que conciben la temperatura de 0 °C como un “equilibrio” entre lo frío y lo caliente. En la Figura 11 podemos observar la manera cómo se concibe este equilibrio. El estudiante relaciona la temperatura con la recta numérica, por lo que se puede pensar que está considerando a 0 °C como un número relativo; sin embargo, la explicación lleva a concebir el cero como resultado del equilibrio entre las temperaturas frías y las temperaturas calientes.

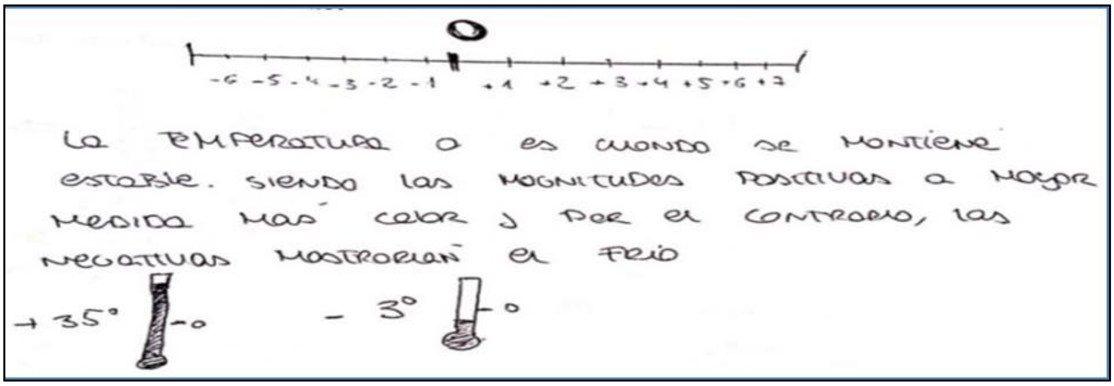


Figura 11. Respuesta al ítem 6. El cero como temperatura de equilibrio

Esta concepción errónea del cero en el contexto de las temperaturas puede ser resultado de una analogía o metáfora de la vida cotidiana. Lo anterior como resultado de mezclar agua caliente con agua fría, lo que para muchos implicará un equilibrio de la temperatura entre lo frio y lo caliente. Chiu (2001) señala que el uso de metáforas erróneas relacionadas con un concepto incide en la construcción de nociones incorrectas de éste.

Los tres últimos ítems son tres problemas con estructuras distintas, cuya solución es siempre cero. El propósito de estos ítems es identificar cómo cambian las explicaciones en función de la estructura y el contexto, y cómo los representan.

Ítem 7. Problema de combinación

En el ítem 7 se plantea un problema de combinación en contexto de deuda, en la cual se reconoce que se tienen 14 € y que esa misma cantidad se debe a un amigo. La estructura invita al uso del cero chino o cero de compensación.

Operación	Porcentaje
(+14) + (-14) = 0	26
14 – 14 = 0	59
Otros	15

Tabla12. Respuestas al ítem 7: Entre una situación de equilibrio y el tener nada

La tabla 12 muestra las operaciones planteadas por los estudiantes ante este problema. Si bien se pretende que, al asociar la estructura con el uso de los numero enteros (+14) + (-14) = 0, logren reconocer la existencia de ambos estados (el tener y el deber). El 59% de los estudiantes recurre a una expresión de 14 – 14 = 0, que se explica como una estructura de cambio. Esto indica que no lo razonaron como un cero chino, resultado de una cantidad compensada, sino como un cero griego, ya que se asocia el problema con la ausencia de una cantidad: “tengo 14 y me los quitan, entonces no tengo nada”.

Este fuerte uso del cero griego se ve respaldado por las representaciones de tipo discreto. Del total de estudiantes, el 68% recurre a este tipo de representaciones en las que se enfatiza la acción de “pagar” y como resultado obtener “nada”.

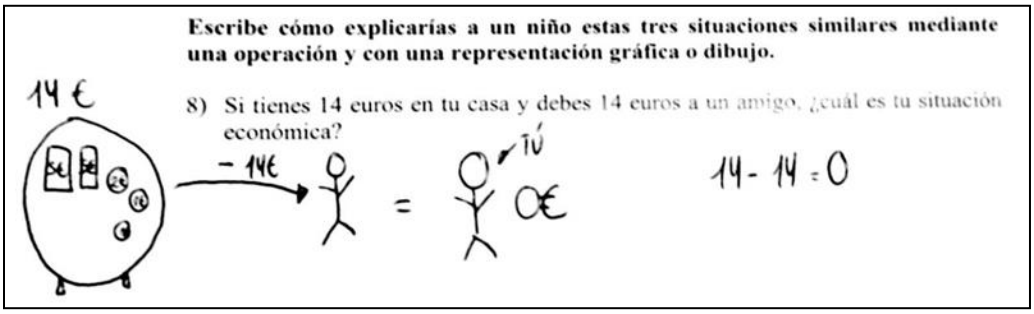


Figura 12. Respuesta al ítem 7. Ejemplo de cero griego

Del total de estudiantes, el 26% plantea la operación +14 + (-14) = 0. En algunos casos, la explicación y la representación llevan a una explicación asociada al cero chino, a una relación de compensación entre os cantidades de signo opuesto. Es el caso del estudiante de la Figura 13, quien simboliza de manera discreta la existencia tanto del "tener" como del "deber", lo que le permite llegar a la conclusión de que "Mi situación económica es neutral, es decir, 0 €". La relevancia en su respuesta radica en la posibilidad de asumir la "neutralidad" como una expresión equilibrio entre lo negativo y lo positivo.

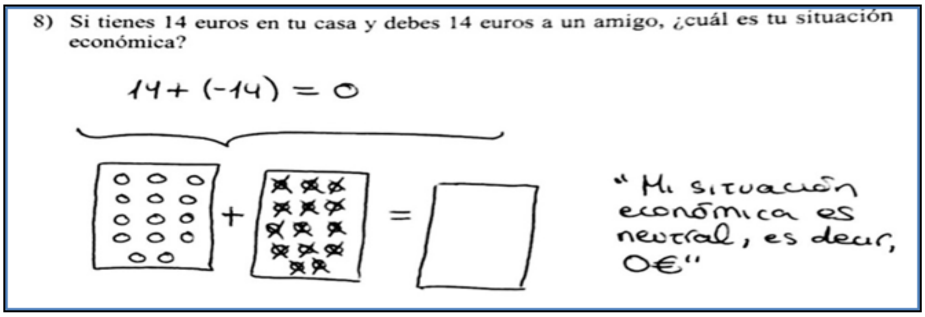


Figura 13. Respuesta al ítem 7. Equilibrio entre los positivo y lo negativo

Como podemos observar en la figura anterior, con respecto a la Figura 12, el uso de los números enteros nos brinda la posibilidad de asignarle un sentido y significado diferente al cero. Más aún, el cero chino nos llevaría necesariamente a considerar la existencia de cantidades menores de cero algo que, de acuerdo con Glaeser (1981) representó un obstáculo epistemológico en la historia de las matemáticas.

Ítem 8. Problema de dos cambios

En el ítem 8 se presenta una situación aditiva de dos cambios, contextualizada con el desplazamiento de un ascensor, en el que una acción de subida se compensa con una acción de bajada. La intención de la cuestión es hacer uso del cero relativo y del cero chino.

Operación	Porcentaje
(+6) + (-6) = 0	17
6 – 6 = 0	46
0 + 6 – 6 = 0	7
Sin operación	30

Tabla13. Porcentaje de uso de expresiones matemáticas en el ítem 8

En la tabla 13 podemos observar que, para resolver el problema, el 46% de los participantes recurre a la expresión 6 – 6 = 0 Las explicaciones indican que los estudiantes recurren al valor absoluto de las cantidades y el signo unario menos representa la acción de bajar y, así, el cero indica la “no variación” de la posición del ascensor.

En este ítem aparece el cero chino o de compensación, cuando al escribir la operación (6) + (-6) = 0, se acompaña con la explicación de que no hay variación en la posición del ascensor porque el ascensor subió y bajó la misma cantidad. En algunos casos, como en la figura 14, además del cero chino, aparece la idea de cero relativo o de punto de inicio del recorrido.

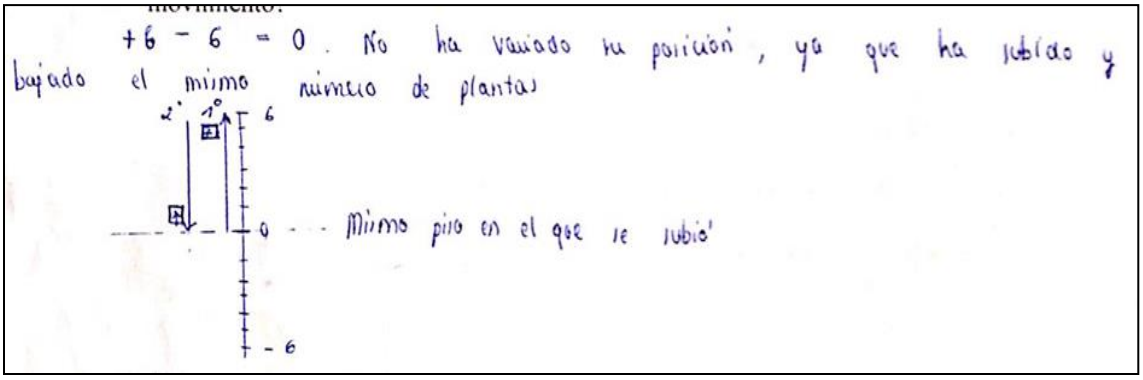


Figura 14. Respuestas al ítem 8. Uso de cero relativo y cero chino

El 7% de los estudiantes plantearon la operación 0+6-6=0, en las que el 0 representa el punto de inicio del movimiento e indica la necesidad de los estudiantes situarse de manera concreta en un punto “relativo”. En la Figura 15 se puede observar un ejemplo de esta expresión junto a su representación.

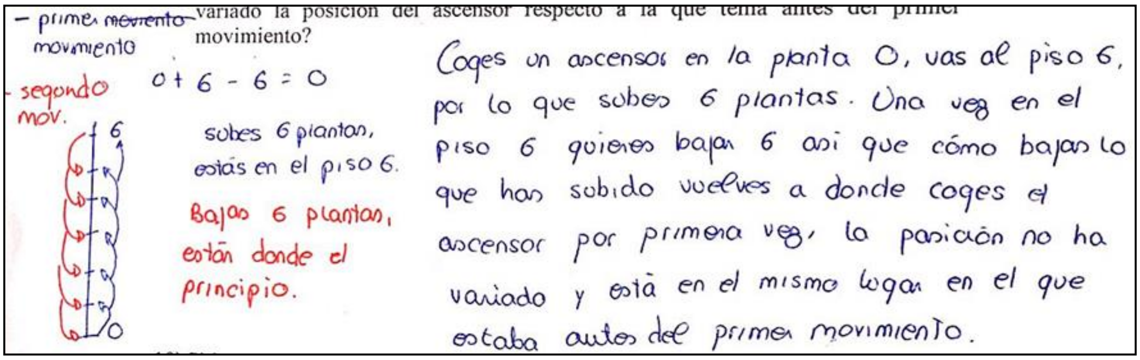


Figura 15. Respuesta al ítem 8. Operando con el cero relativo

En este ítem, el 72% de los futuros docentes recurrió al uso de la recta numérica para ejemplificar el problema.

Ítem 9. Problema de cambio

En el ítem 9 se presentó un problema de cambio con temperaturas cuya respuesta final es 0 °C. Se esperaba que los estudiantes hicieran uso de un cero relativo. En la tabla 14 podemos observar que el 61% de los estudiantes recurre a operaciones basadas en la expresión a – a = 0.

Operación	Porcentaje
(+4) + (-4) = 0	9
4 - 4=0	61
-4 - 4= -8	7
Sin operación	23

Tabla 14. Porcentaje de resultados del ítem 9

Los estudiantes asumen el uso del cero como “punto de referencia”. Las representaciones utilizadas para complementar la respuesta es la recta numérica; en muchos casos hacen uso de imágenes que nos remiten al termómetro.

El uso de la recta numérica se manifestó en el 76% de los participantes, mientras que un 22% no utiliza representaciones, sino sólo se limitaron a escribir la operación o a dar la respuesta. En la Figura 16 se muestra tanto el uso de la recta numérica como el de la operación matemática.

El 7% de estudiantes muestra errores al hacer el cálculo debido a la confusión manifiesta al utilizar las expresiones “por arriba” y “por debajo” de cero.

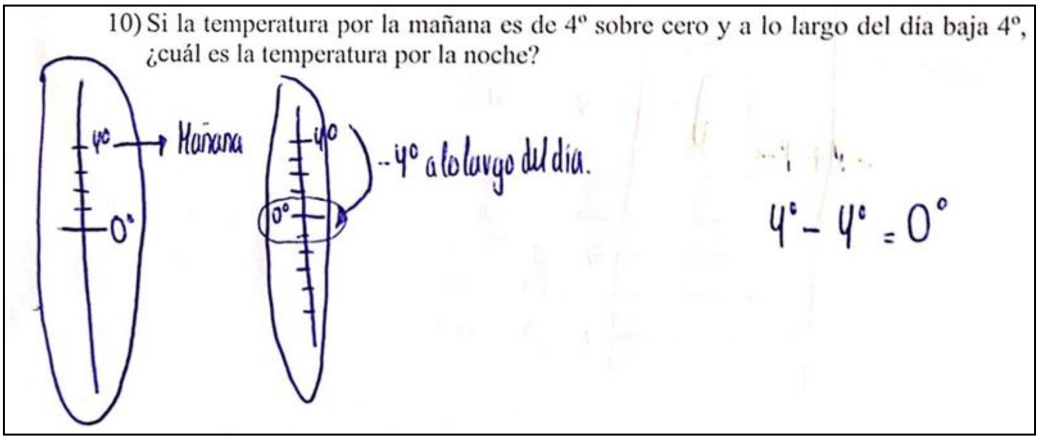


Figura 16. Respuesta al ítem 9. La convivencia del cero relativo y el termómetro

Conclusiones

A partir del análisis realizado con la prueba escrita, observamos que los futuros docentes hacen uso de los diferentes significados del cero que también se han encontrado en diferentes culturas matemáticas. La concepción dominante del cero en esta población es la del cero griego, que asociamos a la nada. Esta concepción se ve reforzada a lo largo de la escolaridad, no sólo en los cálculos matemáticos cuyo resultado es cero, sino que se hace presente en el uso del cero en la vida cotidiana, dominante en el aprendizaje inicial.

En el ítem 1, un gran porcentaje de estudiantes muestra que su concepción se basa en distinguir el cero como “la representación de tener nada”, o “la no existencia de un objeto”. Esta concepción del cero nos invita a concebirlo como cero griego y nos deja entrever que aún permanece la idea sensualista de que es necesario tener el objeto para numerarlo y si no tengo “algo”, entonces su representación se limitará a su no existencia. Si el cero es sólo representación de la nada, entonces ¿cómo podemos pensar en cantidades menores que nada, las cuales no tienen una representación o asociación con objetos de la realidad?

Esta asociación del cero como representación de la no existencia de objetos se reafirma constantemente en los contextos que los estudiantes utilizan para ejemplificar este número.

Cuando se habla de que el cero representa, en una cantidad, la ausencia de unidades, decenas o centenas, etc., se manifiesta la concepción del cero griego, pero ¿podríamos considerar la interpretación de esa ausencia de cantidad como la descomposición de números?, es decir, en la expresión 10, dejaríamos de pensar que cero representa la ausencia de unidades y que por el contrario es sólo una manifestación de 9 + 1, 8 + 2, 7 + 3, etc.

Si bien estos alumnos utilizan mucho la idea de cero griego, ésta coexiste con la idea de cero relativo, como resultado de la extensión de los naturales a los enteros y del uso de la recta numérica. Se reafirma la idea de un cero como punto de referencia que separa a los positivos de los negativos y como punto de inicio. Tal es el trabajo con este modelo que regularmente se recurre a él cuando se trata de ejemplificar el cero.

Al prevalecer la noción de cero griego, los estudiantes recurren a representar problemas en contextos de deudas o de perdida-ganancia. Estos contextos brindan la oportunidad de concebir el cero como "nada" y son resultado de estructuras de cambio. Podemos considerar que los estudiantes recurren constantemente a esta estructura debido a los múltiples problemas con estructura similar presentados a los largo de la educación básica, mientras que el uso de la estructura de dos cambios fomenta la concepción de un cero relativo o de cero chino.

La idea de cero relativo estará acompañada de situaciones contextualizadas en temperaturas o el ascensor. No obstante, muchas veces los estudiantes se limitan al espacio de los números positivos, lo que limita la visión de este cero relativo relegándolo a un punto de inicio. Con la intención de ampliar la interpretación del cero, es indispensable presentar a los estudiantes situaciones que los hagan reflexionar sobre el comportamiento del cero.

En el ítem 6 encontramos que la explicación de 0 °C se limita al comportamiento de la recta numérica; esto reafirma la idea de cero relativo, como se ha señalado anteriormente. Es necesario que esta concepción se enriquezca con conceptos propios de la física y la química pues, en ambas ciencias se presentan situaciones en las que el cero tiene un significado preciso y no deja de ser un cero relativo.

El cero chino es poco utilizado por los estudiantes. Este cero está asociado con situaciones que manejan una estructura de combinación, y da reconocimiento tanto de lo positivo como de lo negativo. En contextos de ganancia y pérdida, las representaciones discretas permiten atribuir existencia a las deudas, a lo negativo. Este reconocimiento de la negatividad y su representación conduce al estudiante a una idea clara de la compensación, del equilibrio que se guarda entre cantidades iguales pero con signo diferente.

No obstante, se debe tener cuidado con las analogías utilizadas para señalar el equilibrio representado por el cero pues, en contextos de temperatura, los alumnos pueden confundirse y pensar que los 0 °C representan el equilibrio de las temperaturas, cuando la concepción que se destaca en este contexto es la de cero relativo.

Las implicaciones del uso del cero requieren brindarle un espacio en la enseñanza para clarificar sus múltiples significados. Para lograr lo anterior será indispensable presentar situaciones contextuales donde el uso del cero se haga explícito y se fomente la interpretación por parte de profesores y alumnos.

Agradecimientos

Este trabajo forma parte del proyecto EDU2011-29324: *Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de Primaria, de Secundaria y de profesorado de Primaria en Formación.* Ministerio de Ciencias e Innovación, Madrid.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por la concesión de Beca Mixta a Daniel Méndez Sánchez, para realizar la estancia de Investigación en la Universidad de la Laguna (España).

Referencias bibliográficas

Basurto, E. y Gallardo, A. (2009) Formas semánticas equivalentes en problemas del pasado y el presente. *Educación Matemática*, 21(3), 67-94.

Bruno, A; Martinón, A. (1994) La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma*, 18, 39-48.

Cataño, A. (2013). *Estudio didáctico del cero*. Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. México, D.F. (Tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa).

Chiu, M. M. (2001). Using metaphors to understand and solve arithmetic problems: Novices and experts working with negative numbers. *Mathematical thinking and learning*, 3(2-3), 93-124.

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *XIV Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas.* Cangas de Marazzo. Pontevedra.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje aritmético-algebraico. *L´Educazione Matematica*, 5(3), 278-306.

Gallardo, A. (1994). *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*. Tesis Doctoral, CINVESTAV. México.

Hernández, A. (2007). *El cero y la negatividad*. Tesis Doctoral. CINVESTAV. México

Hernández, A., Gallardo, A. (2006). La extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros vía el modelo concreto de bloques. *Educación Matemática*, 18(1), 73-97.

Hernández, A., Gallardo, A. (2007). La numerología y el álgebra chinas en la enseñanza actual de las ecuaciones lineales. En *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM*. La Laguna del 4 al 7 de septiembre de

2007 (181-188). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Pla i Carrera, J. (2009). *Liu Hui. Nueve capítulos de la matemática china*. Madrid: Nivola.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática: la construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia*. Barcelona: Gedisa.

Waldegg, G. (1996). La contribución de Simon Stevin a la construcción del concepto de número. *Educación Matemática*, 8(2), 5-17.

Anexo
Cuestionario

1) ¿Qué significado tiene el número cero?
2) Escribe un ejemplo que te sirva para explicar lo que significa el número cero
3) ¿Qué representación gráfica utilizarías para explicar lo que significa el cero?
4) Escribe un ejemplo de la vida cotidiana que se resuelva con la siguiente operación:

   $7 + (-7) = 0$
5) Represéntalo mediante una gráfica o un dibujo.
6) ¿Cómo explicaría a un niño lo que significa que la temperatura es 0º? ¿Cómo lo representas gráficamente?
7) Escribe cómo explicarías a un niño estas tres situaciones similares mediante una operación y con una representación gráfica o dibujo.

   Si tienes 14 euros en tu casa y debes 14 euros a un amigo, ¿cuál es tu situación económica?
8) Escribe cómo explicarías a un niño estas tres situaciones similares mediante una operación y con una representación gráfica o dibujo.

   Un ascensor primero sube 6 plantas y posteriormente baja 6 plantas, ¿cómo ha variado la posición del ascensor respecto a la que tenía antes del primer movimiento?
9) Escribe cómo explicarías a un niño estas tres situaciones similares mediante una operación y con una representación gráfica o dibujo.

   Si la temperatura por la mañana es de 4º sobre cero y a lo largo del día baja 4º, ¿cuál es la temperatura por la noche?