PUZLE TRIANGULAR DE CINCO PIEZAS. ALGUNAS CONSIDERACIONES MATEMÁTICAS Y DIDÁCTICAS

María Dolores Moreno Martel

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

Presentamos un material didáctico que consiste en un puzle triangular de cinco piezas que componen un triángulo equilátero: tres triángulos rectángulos escalenos congruentes, un rectángulo y un trapecio rectángulo. Estudiamos algunas cuestiones matemáticas que se suelen plantear con este tipo de juegos y hacemos algunas sugerencias acerca de su uso para abordar algunos contenidos geométricos.

Abstract

We present a didactic material that consists of a triangular puzzle of five pieces that composes an equilateral triangle: three congruent scalene right triangles, a rectangle and a right trapezoid. We study some mathematical issues that are usually posed with this type of games and we make some suggestions about its use to tackle some geometric contents.

Introducción

Se trata de un juego geométrico tipo puzle, compuesto por cinco piezas que componen un triángulo equilátero: tres triángulos rectángulos escalenos congruentes, un rectángulo y un trapecio rectángulo.

Se parte de un triángulo ABC equilátero, de lado l (racional) y altura h. Se toma el punto medio, M, del segmento AB y se traza la recta paralela al lado BC por el punto M. De esta manera se obtiene el segmento MN. Asimismo, se traza la recta perpendicular al lado BC por el punto M y se obtiene el segmento MM'.

Moreno, M. D. (2017). *Puzle triangular de cinco piezas. Algunas consideraciones matemáticas y didácticas, pp. 125-134*

Por consiguiente, el triángulo queda descompuesto en las cinco figuras mencionadas (véase figura adjunta).

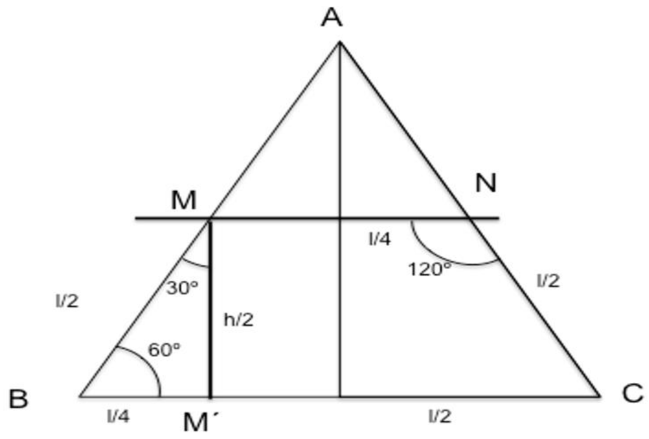


Figura 1. Construcción del puzle

Las figuras están relacionadas entre sí. Los tres triángulos rectángulos son congruentes (que llamaremos básicos), el rectángulo se compone con dos triángulos básicos y el trapecio con tres. Por tanto, el triángulo equilátero y toda figura geométrica que se construyan con las cinco piezas están formadas por ocho triángulos básicos. Se puede tomar como unidad de medida de la cantidad de superficie la del triángulo básico, y el área de todas las figuras es igual a 8. Todas estas figuras son equivalentes. Sin embargo, el área en función del lado del triángulo viene dado por la expresión: como $A_T = \frac{l^2}{32}\sqrt{3}$ entonces, $A_F = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}$. Asimismo, estudiaremos solo las figuras geométricas cuyos ángulos se obtienen de la suma de ángulos de figuras del puzle y sus perímetros pueden ser expresados de la siguiente manera: $P = \alpha\frac{l}{4}\sqrt{3} + \beta\frac{l}{2} + \delta\frac{l}{4},\ \alpha,\beta,\delta \in \mathbb{N}$.

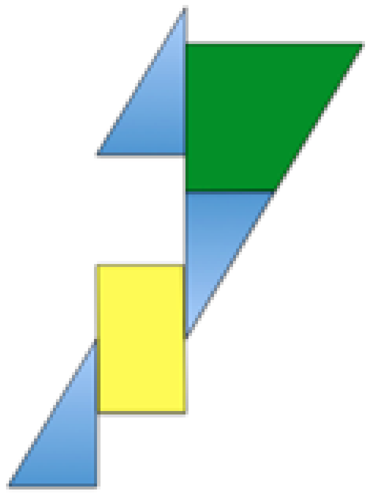


Fig 2. Tipo de figura plana que no se contempla en este estudio

En los siguientes apartados abordamos algunas cuestiones matemáticas y didácticas del puzle.

Consideraciones matemáticas

Nos planteamos algunos problemas geométricos que tradicionalmente se abordan con este tipo de juego. El primer problema consiste en averiguar qué polígonos convexos se pueden construir con todas las piezas. En este apartado esbozamos los resultados que hasta este momento hemos obtenidos.

Podemos observar que cada polígono convexo (también algunos cóncavos) que se quiera construir con las cinco piezas del puzle puede ser descompuesto por los ocho triángulos básicos. Así que la suma total de los ángulos (con vértices en la frontera y en el interior de la figura poligonal) de todas las figuras es $S = 180° \cdot 8 - 180°$. Restamos $180°$ a $180° \cdot 8$ porque el trapecio se descompone en tres triángulos rectángulos y, por tanto, se añade $180°$ más a la suma.

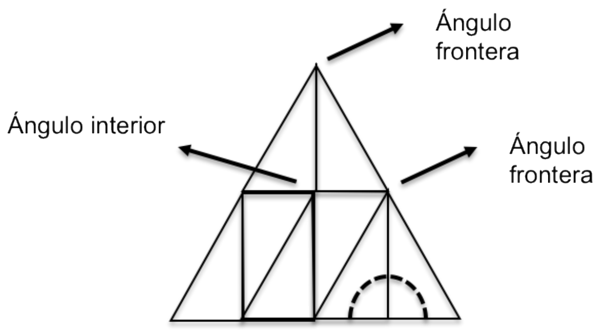


Figura 3. Ángulos en un polígono formado por las cinco piezas

De esta manera:
$180° \cdot 7 = (n - 2) \cdot 180° + k$, siendo k múltiplo de 180, la suma de los ángulos cuyos vértices no lo son del polígono convexo de n lados que se quiera construir. Por tanto, $n = \frac{180° \cdot 9 - k}{180°} = 9 - \frac{k}{180°} \in \mathbb{N}$ estarán en la frontera o en el interior del polígono. De esta expresión, para diferentes valores de k, despejamos n y obtenemos:

$k = 0\,;\ n = 9$

$k = 180°;\ n = 8$

$k = 2 \cdot 180°;\ n = 7$

$k = 3 \cdot 180°;\ n = 6$

...

$k = 6 \cdot 180°;\ n = 3.$

A partir de aquí, hemos concluido que el número máximo de lados que pudiese tener un polígono convexo, si existiera, cuyos ángulos toman valores del conjunto $\{30°, 60°, 90°, 120°, 150°\}$, sea de nueve. En nuestro caso, hemos encontrado de forma experimental solamente triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos convexos. Por ello, conjeturamos que no se pueden construir polígonos convexos de más de seis lados. En esta situación hemos querido construir polígonos convexos de siete, ocho o nueve lados con triángulos básicos, con la finalidad de investigar si necesitamos más de ocho para ello. Algunos de los resultados obtenidos son un heptágono con diez triángulos y un octógono con doce.

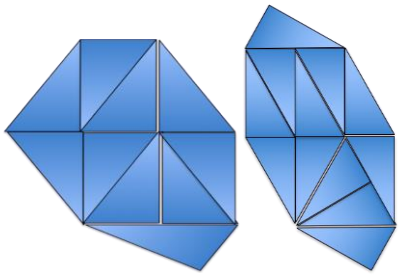
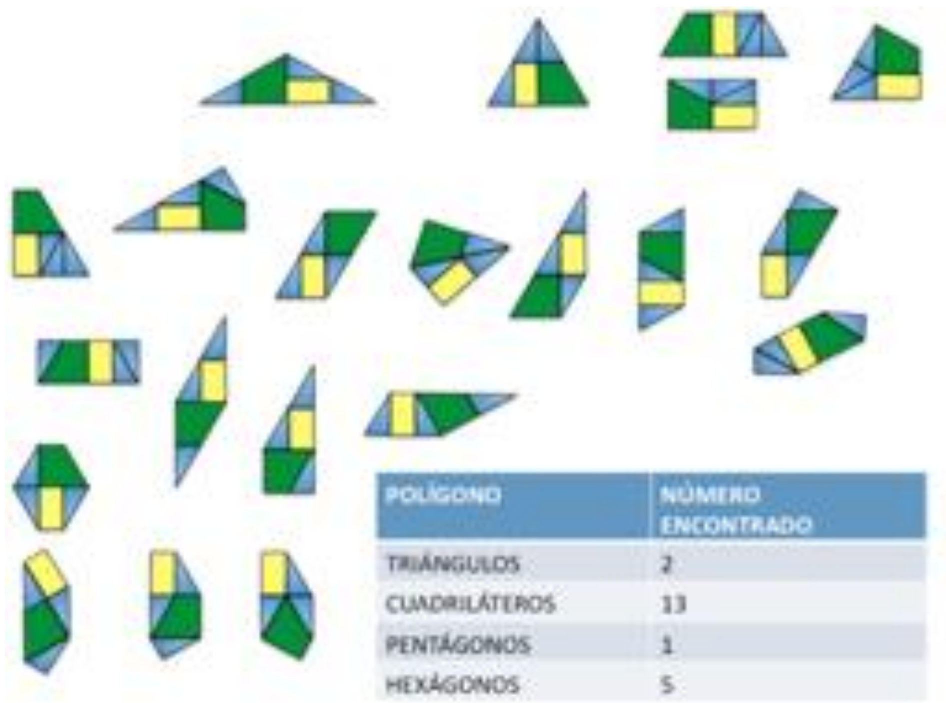


Figura 4. Heptágono y octógono compuesto por triángulos básicos

En la siguiente figura presentamos todos los polígonos convexos obtenidos y una tabla con el recuento de cada tipo.



POLÍGONO	NÚMERO ENCONTRADO
TRIÁNGULOS	2
CUADRILÁTEROS	13
PENTÁGONOS	1
HEXÁGONOS	5

Figura 5. Polígonos convexos construidos con el puzle

Hemos conseguido veintiún polígonos convexos. Recordamos que con el Tangram chino de siete piezas solo se pueden construir trece polígonos convexos y con el Tangram mínimo de Brügner dieciséis.

Un segundo problema es demostrar por qué un cuadrado no se puede construir con las cinco piezas. Una explicación puede ser la siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 = 8A_t \text{ y } A_t = \frac{l}{4}\cdot\frac{l}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} \\ x = \frac{l}{2}\left(\sqrt{3}\right)^{1/2} \end{array}}$$

De este resultado inferimos que el perímetro del cuadrado debe ser:

$$P = 2l\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por ello, esta expresión no se corresponde con una del tipo:

$$P = \alpha\frac{l}{4}\sqrt{3} + \beta\frac{l}{2} + \delta\frac{l}{4};\ \ \alpha,\beta,\delta \in \mathbb{N}.$$

Del mismo modo, no hemos conseguido rombos ni cuadrados (Ídem con los triángulos rectángulos). Si hacemos uso de menos piezas o de dos juegos, sí es posible.

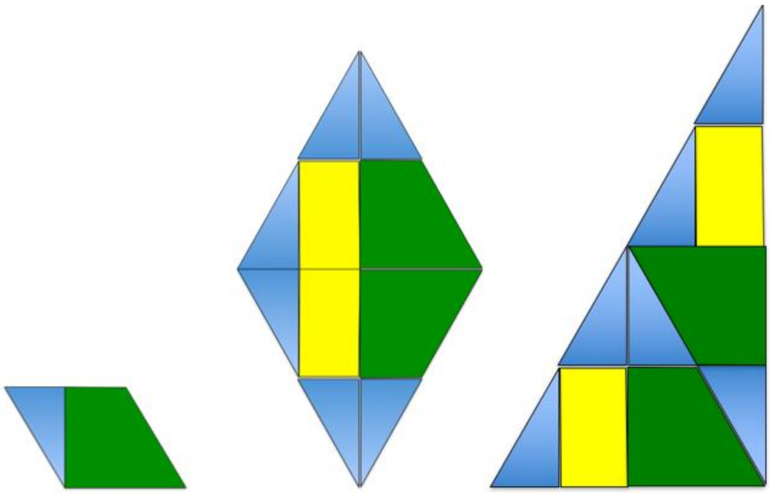


Figura 6. Rombos y triángulo rectángulo

Un tercer problema es averiguar distintas formas en las que se puede construir un polígono determinado, en especial el triángulo equilátero a partir del cual se construye el puzle. En la siguiente imagen mostramos algunos casos.

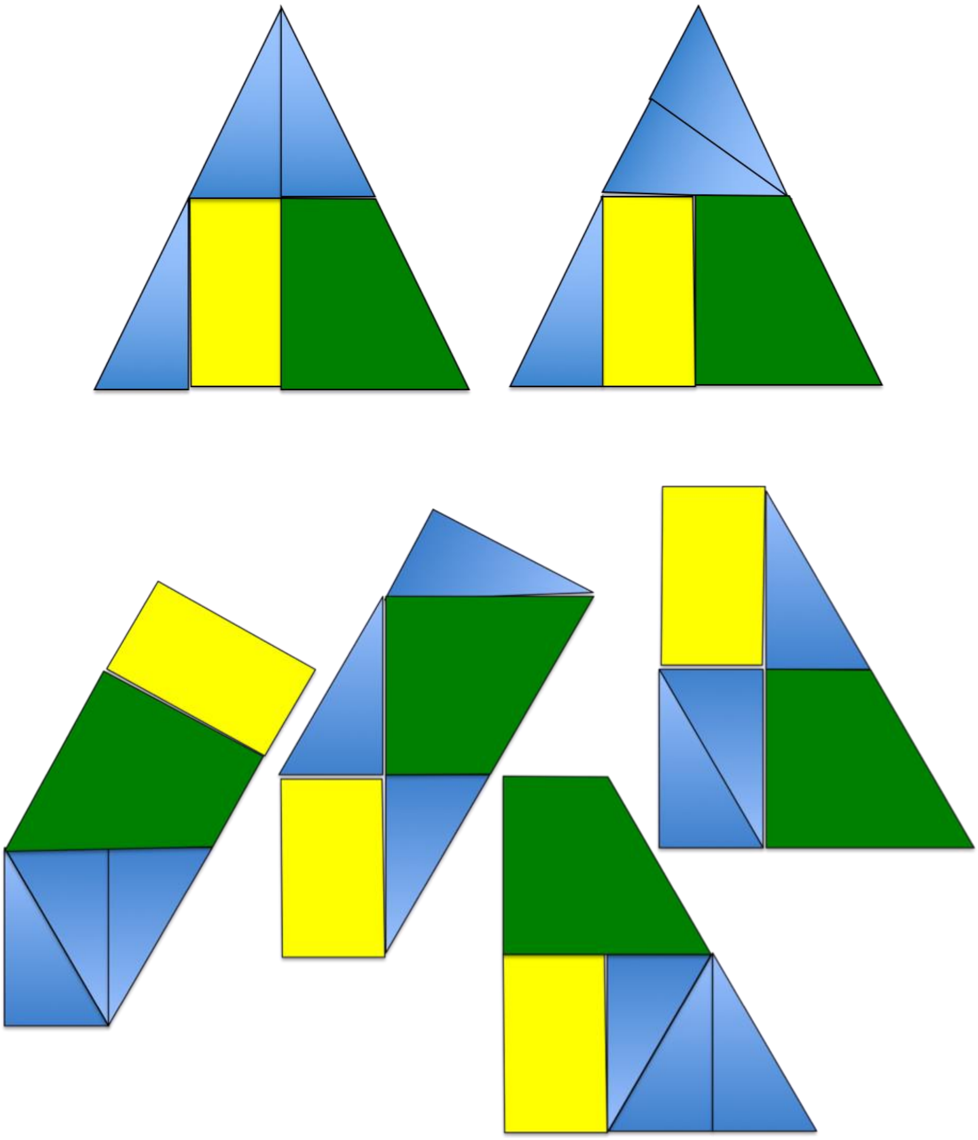


Figura 7. Distintas composiciones de varios polígonos

Consideraciones didácticas

En este apartado hacemos fundamentalmente una propuesta de contenidos geométricos que se pueden estudiar haciendo uso de este material didáctico.

Se pueden abordar los siguientes conceptos:

a) Tipos de ángulos.

b) Polígonos convexos y cóncavos.

c) Clasificación de polígonos, en especial, la de los cuadriláteros.

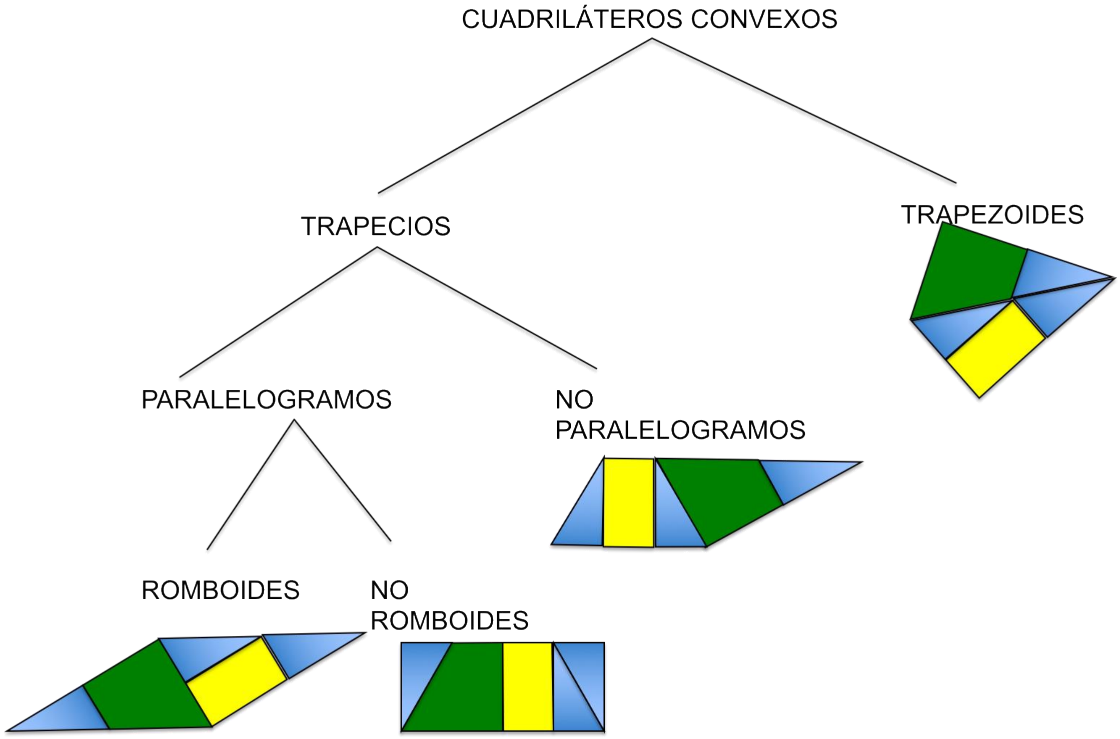


Figura 8. Ejemplo de una clasificación

d) Cálculo de áreas y perímetros.

e) Polígonos equivalentes.

f) Polígonos isoperimétricos.

g) Polígonos semejantes.

h) Comprobación experimental de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de dos rectos.

i) Comprobación experimental de que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es de dos ángulos llanos.

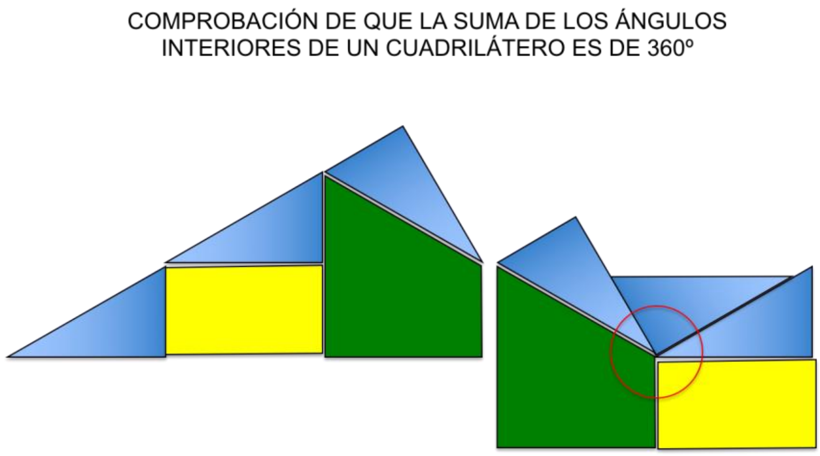


Figura 9. Suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero

j) Isometrías en el plano.

k) Obtención de un polígono a partir de otro aplicando isometrías.

l) Construcción de polígonos convexos no con todas las formas. Por ejemplo, diferentes triángulos con dos y tres triángulos, respectivamente (Martel (1991)).

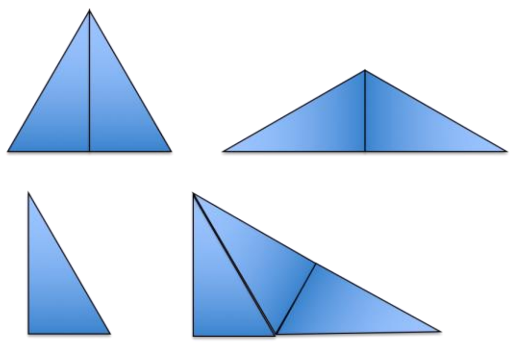


Figura 10. Algunos triángulos

m) Construcción del puzle y de algún polígono con el GeoGebra.

Por otro lado, también podemos plantear la composición de figuras a partir de su silueta o que el alumnado crea otras. Presentamos a continuación algunos ejemplos de ello.

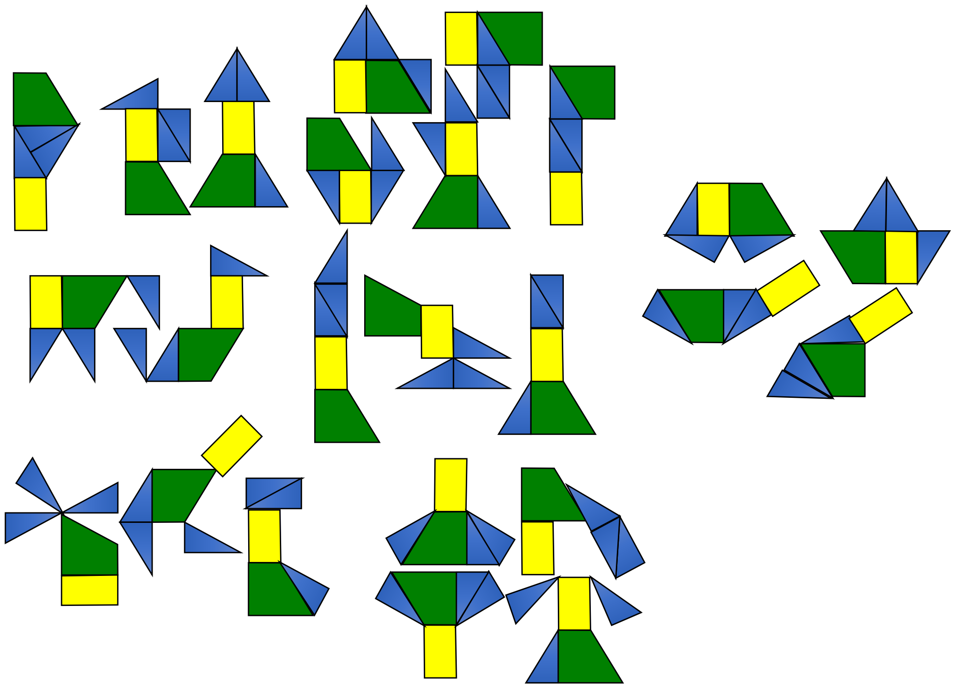


Figura 11. Otras figuras

Referencias bibliográficas

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1988). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid, España: Síntesis.

Brügner, G. (1984). Three-Triangle-Tangram. *Bit,* vol. 24, 380-382.

Martel, J. (1991). *Cuestiones de Geometría elemental mediante el uso de escuadras y cartabones*. En Actas XV Jornadas Luso-Espanholas de Matemática, VI, pp. 161-166. Évora: Servicio de Reprografía y Publicaciones de la Universidad de Évora.