SOBRE ALGUNAS CONJETURAS EN MATEMÁTICAS

Agustín Morales González
Eduardo Gregorio Quevedo Gutiérrez
Víctor Manuel Hernández Suárez

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (ULPGC)

Resumen

Por conjetura matemática se entiende el juicio que una persona se forma de las cosas o sucesos por indicios y observaciones. Así, el concepto de conjetura se refiere a una afirmación que se supone cierta, pero que no ha sido probada ni refutada hasta la fecha.

Una vez que se demuestra la veracidad de una conjetura, esta pasa a ser considerada un teorema de pleno derecho y puede utilizarse como tal para construir otras demostraciones formales.

En este artículo se presenta una serie de conjeturas matemáticas que presentan un gran interés desde el punto de vista didáctico.

Abstract

By mathematical conjecture is meant the judgment that a person is formed of things or events by signs and observations. Thus, the concept of conjecture refers to a statement that is supposed to be true, but that has not been proven or refuted to date.

Once the truth of a conjecture is demonstrated, it becomes a full-fledged theorem and can be used as such to build other formal proofs.

In this article we present a series of mathematical conjectures that present a great interest from the didactic point of view.

FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XII
Morales, A.; Quevedo, E.G.; Hernández, V.M. (2017). *Sobre algunas conjeturas en Matemáticas, pp. 107-124*

Introducción

El sistema conjeturas-pruebas-refutaciones constituye la lógica del descubrimiento matemático escolar. El énfasis no debería estar en la frontera demostraciones/refutaciones, sino más bien en la de conjeturas/demostraciones. Dicho sistema supera didácticamente al enfoque unidimensional de demostración como prueba formalizada, enfoque tradicional del estilo deductivo en la enseñanza de las Matemáticas.

De esta forma la conjetura se relaciona con la intuición, de modo que tiene un papel fundamental en la consecución de las verdades matemáticas. Además, la demostración desempeña un papel de apoyo justificativo y explicativo a partir de la presentación de un sistema de conjeturas, pruebas y refutaciones como base del trabajo con el concepto de demostración de la enseñanza. De esta forma se comienza generar la idea de que, una vez demostrada la conjetura, esta pasa a ser teorema, con lo que matemáticamente ya se podría defender que dicho enunciado se mantendrá "por siempre". De forma cómica pero acertada, el matemático y monologuista Eduardo Sáenz de Cabezón comenta esta idea en el monólogo TED "Las Matemáticas son para siempre" (Fig. 1). En su intervención, dicho autor menciona las conjeturas de Kelvin y de Weaire-Phelan, que serán presentadas, entre otras, en este artículo.

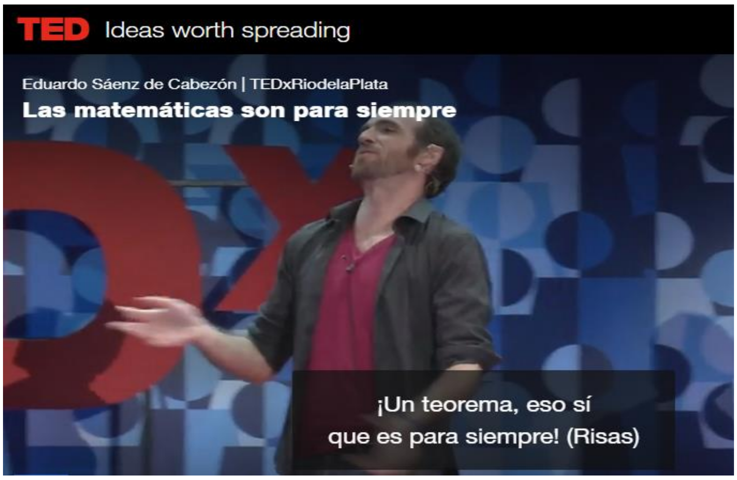

Fig. 1. Fotograma del monólogo "Las Matemáticas son para siempre"

Concepto de conjetura

Según la Real Academia de la Lengua Española se entiende por conjetura: “Juicio que se forma de algo por indicios u observaciones”. Este juicio se entiende desde distintos aspectos: moral, ético o matemático, de las cosas o sucesos por indicios y observaciones. En Matemáticas, el concepto de conjetura se refiere a una afirmación que se supone cierta, pero que no ha sido probada ni refutada hasta la fecha. Una vez que se demuestra la veracidad de una conjetura, esta pasa a ser considerada un teorema de pleno derecho y puede utilizarse como tal para construir otras demostraciones formales.

Hasta hace poco, la conjetura más conocida era el mal llamado último teorema de Fermat ya que, tras su muerte, no se ha podido encontrar ninguna demostración entre sus escritos. Esta conjetura burló a la comunidad matemática durante más de tres siglos, hasta que Andrew Wiles, ayudado por Richard Lawrence Taylor, pudo demostrar el teorema en 1993 y la elevó al rango de teorema. En este artículo se presentan algunas conjeturas relevantes que consideramos tienen un gran valor desde el punto de vista didáctico.

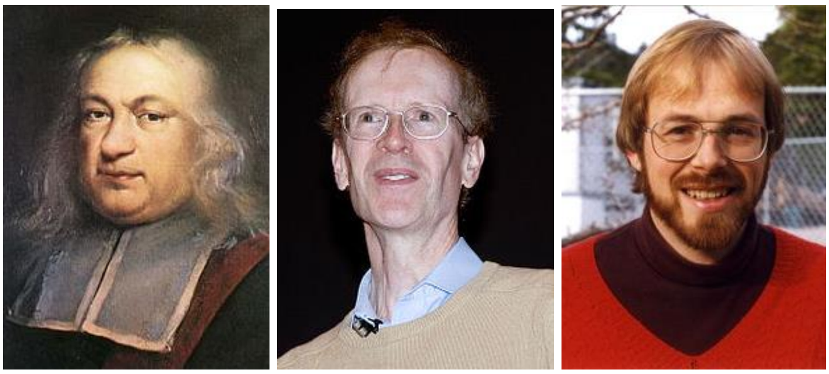

Fig. 2. De izquierda a derecha: Pierre de Fermat (1601-1665), Andrew John Wiles (1953-) y Richard Lawrence Taylor (1962-)

Sáenz (2001) señala que el reconocido matemático, especialista en la resolución de problemas, G. Polya distinguía entre dos tipos de razonamiento: el demostrativo y el plausible. Mientras que el primero nos asegura la validez de una hipótesis, el segundo no ha adquirido el rango de definitivo.

En la escuela, apenas se trata el pensamiento plausible o, dicho de otra manera, apenas se presta atención a enseñar a los estudiantes a desarrollar el pensamiento intuitivo.

El citado autor indica que estos dos tipos de razonamiento no son contradictorios sino que, por el contrario, se complementan entre sí y señalan que en el demostrativo, lo principal es distinguir una prueba de una intuición, mientras que, en el plausible lo que prima es distinguir entre intuciones según su grado de razonabilidad.

Veamos, a continuación, algunas de las conjeturas que más han llamado nuestra atención.

Sobre los números perfectos

Un número perfecto es un número natural que es igual a la suma de sus divisores propios positivos. Dicho de otra forma, un número perfecto es aquel que es amigo de sí mismo.

Así, 6 es un número perfecto porque sus divisores propios son 1, 2 y 3; y $6 = 1 + 2 + 3$. Los siguientes números perfectos son 28, 496 y 8128.

$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$

$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$

El matemático Euclides descubrió que los cuatro primeros números perfectos vienen dados por la fórmula:

$$P(n) = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1), \qquad n = 2,3,5,7.$$

$n = 2{:}\ 2^1 \cdot (2^2 - 1) = 6$

$n = 3{:}\ 2^2 \cdot (2^3 - 1) = 28$

$n = 5{:}\ 2^4 \cdot (2^5 - 1) = 496$

$n = 7{:}\ 2^6 \cdot (2^7 - 1) = 8128$

A partir de esto, surgen dos conjeturas:

- Existen infinitos números perfectos (hasta enero del año 2018 se conocen 50 números perfectos).
- No existen números perfectos impares.

Conjetura (fuerte) de Goldbach

En Teoría de números, la conjetura (fuerte) de Goldbach es uno de los problemas abiertos más antiguos en Matemáticas. A veces se lo califica como el problema más difícil en la historia de esta ciencia. Concretamente, en 1921, el eminente matemático británico G.H. Hardy, en su famoso discurso pronunciado en la Sociedad Matemática de Copenhague, comentó que, probablemente, la conjetura de Goldbach no es sólo uno de los problemas no resueltos más difíciles de la teoría de números, sino de todas las Matemáticas. Su enunciado es el siguiente:

Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos.

Esta conjetura, ya conocida por René Descartes, ha sido investigada por muchos teóricos de números y ha sido comprobada por ordenadores para todos los números pares menores que 1018. La mayor parte de los matemáticos creen que la conjetura es cierta, y se basan, mayoritariamente, en las consideraciones estadísticas sobre la distribución probabilística de los números primos en el conjunto de los números naturales: cuanto mayor sea el número entero par, se hace más «probable» que pueda ser escrito como suma de dos números primos.

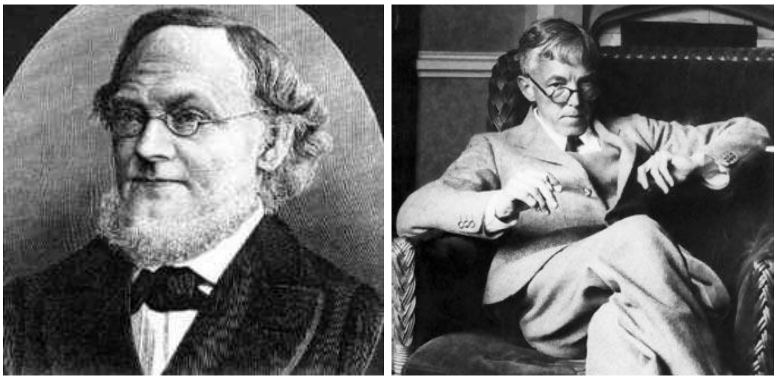

Fig. 3. De izqda. a dcha. Christian Goldbach (1690-1764) y Godfrey Hardy (1877-1947)

Conjetura de los números primos gemelos

Dos números primos se denominan gemelos si uno de ellos es igual al otro más dos unidades. Así pues, los números primos 3 y 5 forman una pareja de primos gemelos. Otros ejemplos de pares de primos gemelos son 11 y 13 o 41 y 43.

Esta conjetura postula la existencia de infinitos pares de primos gemelos:

Existe un número infinito de primos p tales que p + 2 también es primo.

La conjetura ha sido investigada por muchos expertos en teoría de números. La mayoría de matemáticos cree que la conjetura es cierta, y se basan en evidencias numéricas y razonamientos heurísticos sobre la distribución probabilística de los números primos. En 1849, el matemático francés Alphonse de Polignac formuló una conjetura más general según la cual, para todo número natural k, existen infinitos pares de primos cuya diferencia es 2k. El caso k = 1 corresponde a la conjetura de los números primos gemelos.

Fig. 4. Alphonse de Polignac (1826 - 1863)

Conjetura de Collatz

Esta conjetura, conocida también como conjetura $3n + 1$ o conjetura de Ulam (entre otros nombres), fue enunciada por el matemático Lothar Collatz en 1937, y todavía no se ha resuelto. La conjetura establece que siempre alcanzaremos el 1 (y por tanto el ciclo **4, 2, 1**) para cualquier número con el que comencemos. Se muestran algunos ejemplos:

- Comenzando en $n = 6$, se obtiene la siguiente sucesión hasta llegar a 1: 6, 3, 10, 5, 16, 8, **4, 2,** 1.
- Empezando en $n = 11$, la sucesión tarda un poco más en alcanzar el 1: 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, **4, 2, 1**.
- Empezando en $n = 27$, la sucesión tiene 112 pasos, llegando hasta 9232 antes de descender a 1: 27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445,

1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, **4, 2, 1**.

Figura 5. Lothar Collatz (1910-1990)

Hipótesis de Riemann

Fue formulada por primera vez por Bernhard Riemann en 1859. La mayoría de los matemáticos del mundo coincide en que la Hipótesis de Riemann es, posiblemente, el problema más importante de las Matemáticas que aún no se ha resuelto.

Considera los números naturales, 1, 2, 3, 4, 5, … y desecha los que sean divisibles por el cuadrado de un natural mayor que 1; es decir, borramos de la lista el 4, 8, 9, 16, 18, 20, 24, …, etc., para obtener los naturales **libres de cuadrados**: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, …

Cada uno de los naturales de la lista anterior, excepto el 1, tiene una factorización única como producto de números primos diferentes. Algunos de estos naturales libres de cuadrados son el producto de un número par de primos distintos, y otros son el producto de un número impar de primos diferentes.

Llamemos a un número natural **“bueno”** si es el 1 o si es el producto de un número par de primos distintos, y llamémoslo **“malo”** si es el producto de un número impar de primos diferentes. Así, $6 = 2 \cdot 3$ es bueno y $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ es malo.

Fig. 6. Bernard Riemann (1826-1866)

La Hipótesis de Riemann establece que, para cualquier natural n grande, la diferencia numérica entre los “buenos” y los “malos” que hay entre 1 y n no es mucha. De manera más precisa:

Sea $e > 0$. *Entonces, existe* N *tal que para todo* $n > N$, *la cantidad de naturales malos en* $[1, n]$ *no difiere de la cantidad de naturales buenos en* $[1, n]$ *por más de* $n^{\left(\frac{1}{2}+\mathrm{e}\right)}$.

Por ejemplo, si $n = 30$, los naturales libres de cuadrados entre 1 y 30 son:

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30.

Entre estos, solo hay ocho “buenos”: 1, 6, 10, 14, 15, 21, 22 y 26, y once “malos”: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 y 30. Vemos que la diferencia entre ellos es de tres números malos y $3 < 30^{1/2}$. Si se calcula la diferencia entre "malos" y "buenos" (o entre "buenos" y "malos") en $[1, n]$, para otros n, el resultado será < $n^{1/2}$; lo cual parece indicar que en la Hipótesis de Riemann debería tomarse igual a 0. Esto mismo pensó un matemático alemán, llamado Franz Mertens, en 1897, y de ahí nace su conjetura:

Para todo $n > 1$, la disparidad entre los naturales malos y buenos en $[1, n]$ es menor que $n^{1/2}$.

Mertens murió mucho antes de que otros matemáticos refutaran su conjetura. En 1985, Odlyzko y te Riele, demostraron que existen infinitos valores de n para los cuales los "buenos" exceden a los "malos" en el intervalo $[1, n]$ por más de (1,06) $n^{1/2}$. Pero también demostraron que existen infinitos valores de n para los cuales los "malos" exceden a los "buenos" en el intervalo $[1, n]$ por más de (1,009) $n^{1/2}$.

Conjetura de Poincaré

Henri Poincaré (1854-1912) estableció esta conjetura en 1904, al indicar que la esfera tridimensional era única y que ninguna de las otras variedades tridimensionales compartía sus propiedades. Grigori Perelman (1966-) resolvió la hipótesis de Poincaré. Justamente por resolver este problema, Perelman había recibido en 2006 la medalla Fields, considerada el Nobel de las Matemáticas, otro premio que también rechazó.

Fig. 7. De izquierda a derecha Henri Poincaré y Grigori Perelman

Conjetura de Morgan

La conjetura (hoy teorema) denominada "de los 4 colores", como se ve en la Fig. 8, afirma:

Dado cualquier mapa geográfico con regiones continuas, este puede ser coloreado con cuatro colores diferentes, de forma que no queden regiones adyacentes con el mismo color.

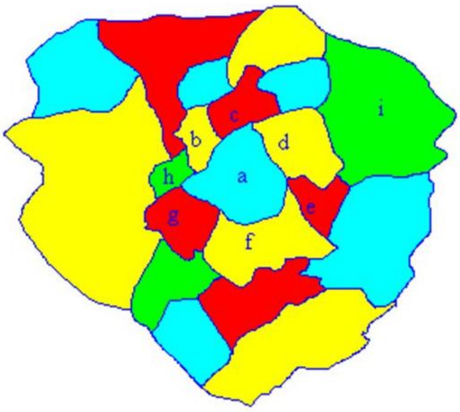

Fig. 8. Simulación de mapa geográfico con 4 colores

El enunciado es sencillo y de apariencia inofensiva, pero esconde numerosas sutilezas. La conjetura se hizo famosa con la declaración de Arthur Cayley, en

1878, en el sentido de que la había abordado. Fue resuelta, a mediados de 1970, por Kenneth Appel y Wolfgang Haken quienes, con la colaboración de Koch, publicaron la demostración completa del teorema. Esta fue muy complicada, con un gran número de páginas y más de mil horas de ordenador. Era el primer ejemplo de un problema buscado en muchos frentes que logró resolverse con el uso de los ordenadores.

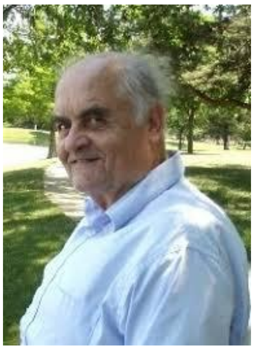

Fig. 9. De izquierda a derecha Kenneth Appel (1932 – 2013)
y Wolfgang Haken (1928 -)

Conjetura de Pappus

La conjetura del panal de abeja ya constituye teorema matemático que afirma que un teselado hexagonal (retícula en forma de panal de abeja como se presenta en la Fig. 10) es la mejor manera de dividir una superficie en regiones de la misma área y con el mínimo perímetro total. El primer registro de la conjetura se remonta al 36 a.C., y es debida a Marco Terencio Varrón, aunque a menudo se atribuye a Pappus de Alejandría (284-305).

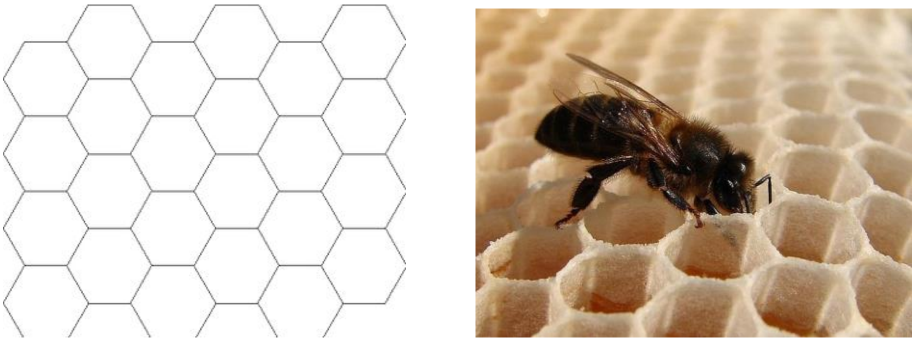

Fig. 10. Retícula hexagonal (izquierda) como en un panel de abeja (derecha)

El teorema fue demostrado en 1999 por el matemático Thomas Callister Hales (1958 -), quien menciona en su obra que hay razones para creer que la conjetura pudo haber estado presente en la mente de los matemáticos antes de Varrón.

Conjetura de Kelvin

Lord Kelvin conjeturó a finales del siglo XIX que la figura tridimensional que, a igualdad de volumen, tiene menor área sería un octaedro truncado. Kelvin no consiguió demostrar que, en realidad, esa figura es la mejor para rellenar el espacio. A partir de aquí, este tema pasó a denominarse problema de Kelvin o conjetura de Kelvin.

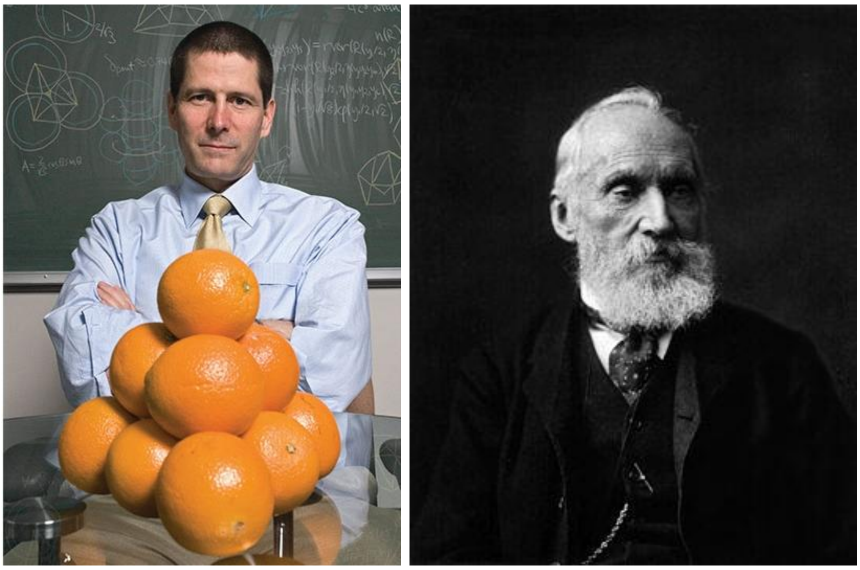

Fig. 11. De izquierda a derecha, Thomas Callister Hales (1958 -), y *William Thomson, Lord Kelvin (1824 - 1907)*

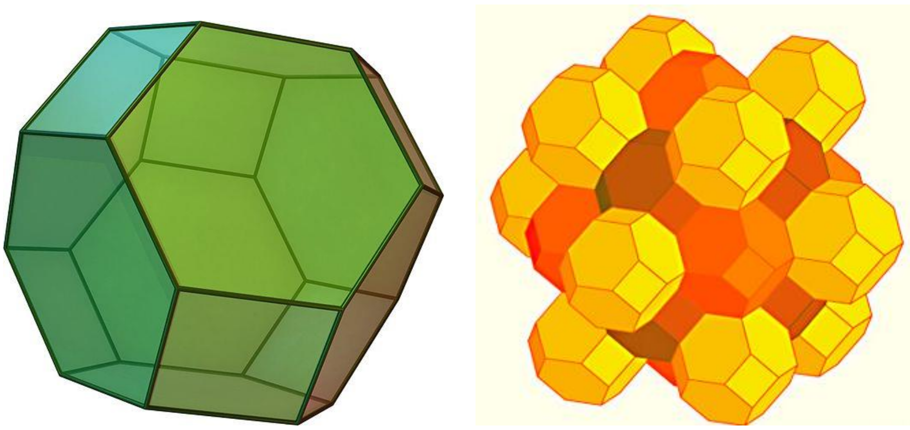

Fig. 12. Un octaedro truncado (izquierda) y su desarrollo espacial (derecha)

Conjetura de Weaire - Phelan

En 1993, Denis Weaire y Robert Phelan encontraron un contraejemplo a la conjetura de Kelvin sobre rellenado del espacio tridimensional. Estos autores encontraron una figura que, a igualdad de volumen, tiene menor área que el octaedro truncado, y la denominaron (después de un gran alarde de imaginación) estructura de Weaire-Phelan, que está formada por dos dodecaedros irregulares con caras pentagonales y seis tetradecaedros con dos caras hexagonales y doce caras pentagonales pegados como puede verse en la Fig. 14.

El área de la estructura de Weaire-Phelan es un 0,3% menor que la de la estructura de Kelvin. No se sabe si la estructura de Weaire-Phelan es “la más eficiente” o si, por el contrario, existe otra figura tridimensional que, a igualdad de volumen con ella, tenga un área menor.

Fig. 13. Denis Weaire y Robert Phelan

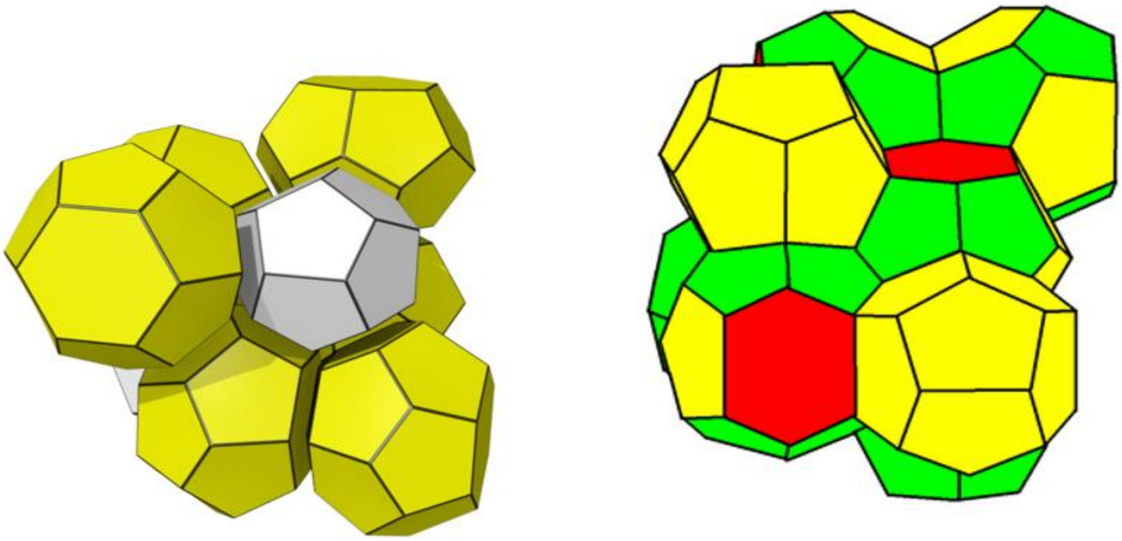

Fig. 14. Estructura de Weaire y Phelan

Conclusiones

En este artículo hemos querido presentar una serie de conjeturas, algunas de ellas con un importante soporte visual, que podrían ser adecuadas para presentarlas en las aulas a nuestros estudiantes del Grado de Maestro con el fin de despertar su interés por las Matemáticas a partir de la idea de que, si bien estas constituyen una ciencia en la que es necesario demostrar lo que se plantea como una hipótesis para que esta pueda considerarse como un teorema, no resulta menos importante el uso del pensamiento intuitivo, toda vez que en este radica la fuente de la creatividad y que difícilmente podremos estar convencidos en que una hipótesis puede ser cierta si esta repugna nuestra intuición o, dicho de otra forma, las demostraciones deben ser intuitivamente convincentes.

En relación con lo expuesto, no podemos dejar de citar tanto la frase de Santaló para quien “no hay que demostrar lo obvio” como aquella, pronunciada por un estudiante de geometría elemental, según la cual “la maestra dibujó en la pizarra un triángulo isósceles y dedicó toda la clase a demostrar que, en efecto, era isósceles”.
Asimismo, pensamos que resulta imprescindible tratar de potenciar al máximo el pensamiento visual (visual thinking) de nuestro alumnado, tan denostado durante muchos años, debido probablemente a la influencia que, en la enseñanza de las Matemáticas, tuvo el Grupo Bourbaki y que, afortunadamente, parece resurgir con fuerza. No en vano, para Gauss “la Matemática es una ciencia del ojo”.

Autores como Miguel de Guzmán (con su libro “El rincón de la pizarra”) y R. B. Nelsen (Proofs without words: exercises in visual thinking) han contribuido muy eficazmente a recuperar esta forma de acceso al conocimiento matemático.
En definitiva, consideramos muy importante enseñar al alumnado tanto a apreciar la certeza como a sentir la necesidad de realizar una demostración de lo conjeturado pues en esto consiste, esencialmente, la actividad matemática.

Referencias bibliográficas

Davis, P.J.; Hersh, R. (1988). *Experiencia Matemática*. Barcelona, España: MEC-Labor.

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra*. Madrid, España: Pirámide.

García-Gigante, B. (1990). *Conjeturas en el aula de Matemáticas*. XV Jornadas Luso-Espanholas de Matemática: Universidade de Évora (Portugal), pp. 179-184.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones*. La lógica del descubrimiento matemático. Madrid, España: Alianza Universidad.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words: exercises in visual thinking*. Washington, USA: Mathematical Association of America (MAA).

Rubio, J.P. (2010). Descubriendo los sólidos platónicos. *Uno: revista de didáctica de las Matemáticas*, 53, 80-91.

Sáenz, C. (2002). *Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las Matemáticas*. En Moreno, M. F.; Gil, F.; Socas, M.; Godino, J. (Eds.), Investigación en Educación Matemática, Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), pp. 45-62. Almería, España: SEIEM, Universidad de Almería, Servicio de Publicaciones.

Sáenz, E. (2014). Las Matemáticas son para siempre. TED-Talk Río de la Plata. Recuperado el 1 de mayo de 2018 de https://www.ted.com/talks/eduardo_saenz_de_cabezon_math_is_forever?language=es#t-287993