RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y USO DE SISTEMAS DE GEOMETRÍA DINÁMICA. UN EJEMPLO

Matías Camacho Machín
Alexánder Hernández Hernández
Universidad de La Laguna

Resumen

Los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) son considerados, cada vez más, como herramientas útiles para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, principalmente en la Educación Secundaria. Es evidente que el currículo tradicional de Matemáticas debe ser repensado para elaborar otro que contemple las potencialidades y restricciones que surgen a partir de tales herramientas, así como al tipo de actividades o tareas que se propongan. En este trabajo se presenta una tarea en la que se pide reconstruir una figura a partir de su representación geométrica y se analizan diferentes actividades que surgen a partir de su propia resolución.

Abstract

Dynamic Geometry Systems (DGS) are considered lately as a useful tool for teaching and learning Mathematics in Secondary Schools. It is clear that the traditional curriculum of Mathematics must be approximate in terms of the potentialities, affordances and constraints arising from the use of the digital tools, as well as the type of activities or tasks that are designed. A task that requires to reconstruct a figure from their geometric representation is presented in this paper and different activities and properties that arise from its own resolution are discussed.

Introducción

Es sabido y reconocido por las instituciones educativas que la resolución de problemas de Matemáticas debe ser uno de los elementos directores del currículo de esta asignatura de todos los niveles y, especialmente, en el de la Educación Secundaria y así lo explicitan los documentos oficiales:

> La resolución de problemas y los proyectos de investigación constituyen ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. La habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas es una de las capacidades esenciales de la actividad matemática, ya que permite a las personas emplear los procesos cognitivos para abordar y resolver situaciones interdisciplinares reales, lo que resulta de máximo interés para el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico (MECD, p. 408).

Por ello, desde el punto de vista institucional, se considera que es esencial que los estudiantes se involucren en un proceso de enseñanza y aprendizaje sustentado por la resolución de problemas. Para implementar estos aspectos, la LOMCE establece un bloque de contenidos (de los cinco que aparecen en los diferentes niveles educativos), es decir, una quinta parte del propio currículo. Ese bloque, denominado "Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas" destaca la importancia de la reproducción, por parte de los estudiantes, del quehacer matemático en términos de la resolución de problemas. Concretamente, señala que:

> El bloque "Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas" es un bloque común a la etapa y transversal que debe desarrollarse de forma simultánea al resto de bloques de contenido y que es el eje fundamental de la asignatura; se articula sobre procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático: la resolución de problemas, proyectos de investigación matemática, la matematización y modelización, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos (MECD, p. 408).

La utilización de medios tecnológicos, también desempeña un papel relevante desde el punto de vista institucional. En la formación inicial del profesorado de Matemáticas para Educación Secundaria, es importante mostrar la importancia y la necesidad de involucrarse en ambientes de resolución de problemas y de uso de tecnología, para que este pueda extraer, desde su propia formación, los heurísticos y estrategias que luego deberán ser enseñados a su alumnado. Los profesores de

Matemáticas de la Educación Secundaria son cada vez más conscientes de la importancia que debe tener el uso de tecnologías digitales con sus estudiantes. Dispositivos móviles, tales como tabletas y smartphones, así como las redes sociales e, incluso, la gran cantidad de aplicaciones gratuitas accesibles en la web requieren ser aprovechadas por el profesorado con funciones educativas. Su implementación en las aulas de Secundaria necesita de la selección adecuada de los diferentes recursos y del diseño de actividades o tareas que doten de significado a los dispositivos y a las distintas aplicaciones para conseguir que el alumnado alcance las competencias matemáticas y digitales requeridas en su formación.

Consideramos que en la formación de profesores de Matemáticas de Educación Secundaria, debe hacerse explícita esta necesidad que acabamos de señalar y debe suministrarse a estos estudiantes para profesores un buen número de oportunidades para reflexionar sobre el uso de tales tecnologías digitales. Nos centraremos en presentar en la práctica, de qué manera un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como GeoGebra permite, mediante la construcción de configuraciones geométricas sencillas y el aprovechamiento de su dinamismo, desempeñar un papel importante en la formación de profesores cuando resuelven problemas de Matemáticas que, posteriormente, deberán ser considerados cuando desarrollen su labor profesional en las aulas de Educación Secundaria.

Al hablar de que se deben utilizar SGD en el diseño y resolución de tareas, debemos ser conscientes del amplio “espectro epistémico” (Leung y Bolite-Frant, 2014) que aparece desde la construcción hasta la exploración de nuevos teoremas que exigen el planteamiento de argumentaciones que justifiquen los descubrimientos. Santos-Trigo y Camacho-Machín (2016) señalan que:

> “el uso de SGD permite a los estudiantes representar de manera exacta y observar o visualizar patrones de comportamiento de algunos parámetros, así como formular y comprobar la plausibilidad de algunas conjeturas” (p. 7).

Todo esto requiere, además del desarrollo de ciertas destrezas y estrategias manipulativas para construir las figuras presentadas en los problemas, darse cuenta de un amplio abanico de potencialidades que posee el propio SGD (búsqueda de lugares geométricos, variabilidad de parámetros, uso de deslizadores…) que facilitan la justificación de las diferentes propiedades y relaciones que se observan. Santos-Trigo y Camacho-Machín (2016), tratan de mostrar cómo, a partir de la reconstrucción de una figura, aparece una serie de relaciones matemáticas que tienen que ser justificadas haciendo uso de argumentos matemáticos válidos. En ese caso, el orden de construcción de la configuración geométrica presentada en el problema (que incluye un ángulo, dos circunferencias y un triángulo equilátero), da lugar a un nuevo conjunto de problemas y situaciones.

En este artículo nos proponemos mostrar que, dependiendo de los comandos que se utilicen en la construcción de la figura que suministra el problema, las propiedades y cuestionamientos que surgen pueden resultar complementarios. Para ello, se analizaron las diversas aproximaciones que utilizaron los estudiantes, así como el estudio detallado, por parte del equipo investigador, de las estrategias, propiedades y resultados que fueron obteniendo los estudiantes cuando resuelven un problema en el que se les pide probar una propiedad geométrica verificable fácilmente solamente con desarrollar una construcción de la gráfica que nos presenta su enunciado.

Metodología

En el marco de la materia *Matemáticas para la enseñanza*, impartida en cuarto curso del Grado en Matemáticas, se llevó a cabo un Taller de resolución de problemas con el uso de tecnología. Durante las nueve sesiones del taller, dieciocho estudiantes, agrupados en parejas, resolvieron cuatro problemas haciendo uso del GeoGebra y de modo que se podían apoyar en los recursos disponibles en la Red.

A partir de las grabaciones de las pantallas de los estudiantes, se observó el proceso de resolución de éstos y se apreciaron distintas construcciones de las configuraciones geométricas y de las diferentes figuras. Asimismo, se pudo analizar cómo los estudiantes extrajeron, durante el proceso de resolución, una amplia variedad de propiedades que facilitaban la comprensión de la tarea, así como la búsqueda de diferentes aproximaciones que deberían preceder a su solución final. En definitiva, hubo momentos explícitos en los que se evidenciaba la necesidad de, no solo usar el SGD, sino de buscar en la Red ideas para obtener la solución. Las discusiones matemáticas o de índole tecnológico de los participantes, que surgían durante todo el proceso, ayudaron enormemente a la resolución definitiva de las tareas. Para el desarrollo de este ejemplo, seguiremos los diferentes episodios propuestos por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013).

El problema: *Dadas dos circunferencias de centros A y C. Desde el centro de cada circunferencia se trazan rectas tangentes a la otra. Los puntos de intersección de las rectas tangentes con las circunferencias definen dos cuerdas IJ y KL (ver Figura 1). Probar que la longitud de las cuerdas es la misma, IJ=KL.*

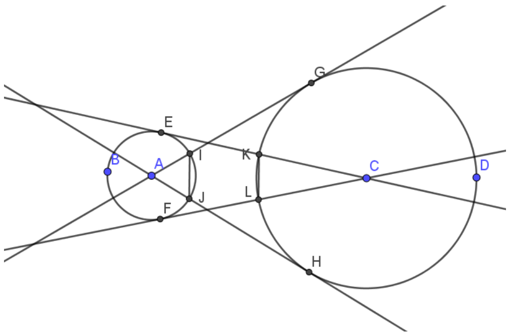

Figura 1. Imagen presentada en el enunciado del problema.

A la hora de resolver el problema con lápiz y papel, normalmente, el estudiante se centrará en la figura para buscar una manera de identificar algunas propiedades y relaciones que podrían ayudarle a detectar y justificar la relación de igual entre las longitudes de las cuerdas. En este caso, el empleo del SGD GeoGebra añade una nueva dimensión a la tarea, que es la siguiente: los estudiantes se preguntan ¿cómo podré dibujar la figura que presenta el problema planteado?

En este entorno de trabajo que les proporciona GeoGebra, el hecho de pensar en la construcción de la figura constituye el punto de partida para representar el problema basándose en las propiedades geométricas que la define. El orden de la construcción puede ser un elemento importante que debemos considerar (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2016), ya que fija la posibilidad de arrastrar unos elementos u otros.

Otro elemento que debemos tener en cuenta es el modo en que definen un objeto, qué herramienta utilizan y en qué objetos ya representados deben apoyarse. Esto marca (en parte) si una construcción mantiene las condiciones impuestas al arrastrar alguno de los objetos en los que se apoya. Cuando esto ocurra, la llamaremos construcción robusta, en el sentido de Gómez-Arciga y Poveda-Hernández (2017), quienes se refieren a figuras robustas como "…familias que mantienen las propiedades esenciales de la construcción" (p. 71).

Primer episodio: Comprensión del problema

El abordaje del problema, haciendo uso de GeoGebra, requiere realizar, en primer lugar, la construcción dinámica que permita estudiar las relaciones entre las circunferencias (radio y centro), las rectas tangentes y las cuerdas. En el problema no se especifica ningún valor concreto, ni ninguna posición, para los objetos que intervienen. Eso sí, la figura aporta una información valiosa para el planteamiento y la comprensión del problema.

A partir de las soluciones dadas por los estudiantes, se observaron dos construcciones:

<u>Construcción 1.</u> Se pierde la propiedad de tangencia al arrastrar alguno de los puntos.

Paso 1: Dibujar las circunferencias. Utilizando la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** se trazan dos circunferencias (en negro) de centros A y C, cuyos radios vienen determinados por las distancias a B y D respectivamente (Figura 2). Paso 2: Trazar las rectas tangentes. Utilizando la herramienta **Recta** se trazan cuatro rectas (en azul). Para ello, se selecciona el centro de una de las circunferencias, por ejemplo A; al hacerlo, en la pantalla aparece una recta que se mueve siguiendo el cursor. Luego se selecciona otro punto, al acercarse al borde de la circunferencia con el cursor, GeoGebra automáticamente coloca el punto sobre la circunferencia. De esta forma, se consigue una recta que, a simple vista, es tangente (Figura 3).

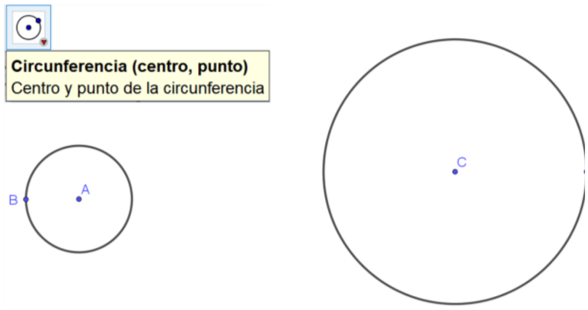

Figura 2. Construcción de las circunferencias.

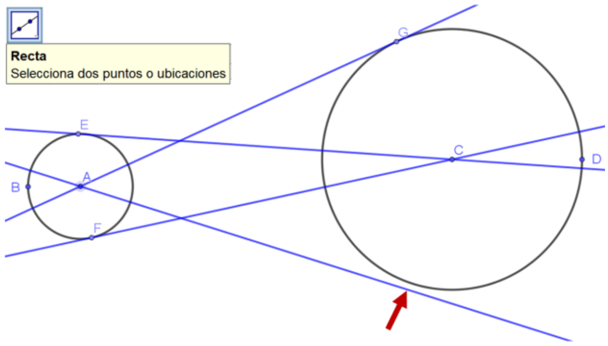

Figura 3. Construcción de las rectas tangentes.

Paso 3: Trazar las cuerdas. Utilizando la herramienta **Segmento** se marca la intersección entre las circunferencias y las rectas. Así, resultan dos cuerdas (en rojo) que, aparentemente, tienen la misma medida ya que, al usar dos cifras decimales no se aprecian diferencias (Figura 4).

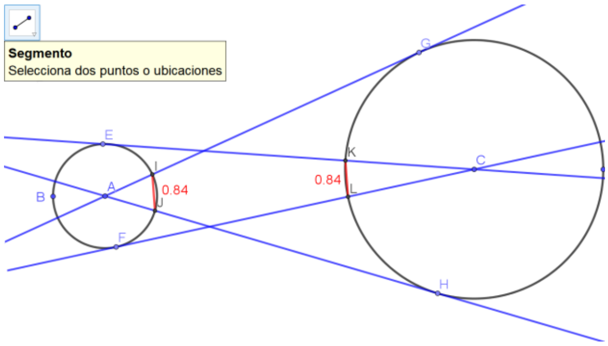

Figura 4. La construcción dada por el problema.

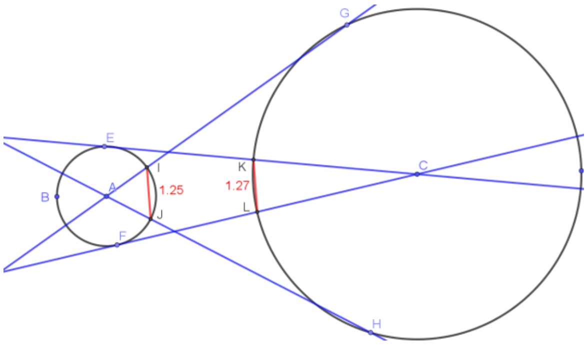

Figura 5. Comprobación de que no es una construcción robusta.

Prueba de Arrastre: Arrastrando el punto C. Al mover el punto C se modifica la distancia hasta el centro A y el punto D. En el ejemplo se puede ver cómo los centros A y C están más cerca y el radio de la circunferencia de centro C ha aumentado. Además, se observa con claridad, que las rectas que pasan por el centro A no son tangentes a la circunferencia de centro C y las cuerdas no tienen la misma medida (Figura 5).

<u>Construcción 2: Conserva las propiedades al arrastrar.</u>

Nos interesa tener una construcción robusta que mantenga la propiedad de tangencia de las rectas, a la vez que permita arrastrar distintos puntos y poder variar los centros y los radios de las circunferencias. La siguiente propuesta (ENLACE), que utiliza la herramienta **Tangentes** para trazar las rectas tangentes desde uno de los centros a la otra circunferencia (Figura 6). Al arrastrar los puntos A, B, C o D podemos visualizar distintas figuras que siempre verifican que la longitud de las cuerdas (en rojo) es la misma.

Paso 1: Dibujar las circunferencias. Utilizando la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** se trazan dos circunferencias (en negro) de centros A y C, cuyos radios vienen determinados por las distancias a B y D, respectivamente.

Paso 2: Trazar las rectas tangentes. Utilizando el comando **Tangentes** se trazan las cuatro rectas de dos en dos. Se selecciona primero uno de los centros y luego la otra circunferencia. En el ejemplo, ya se han dibujado las rectas que pasan por

C; al seleccionar A y, luego, la circunferencia de centro C, aparecen las dos rectas que pasan por A y son tangentes a dicha circunferencia de centro C.

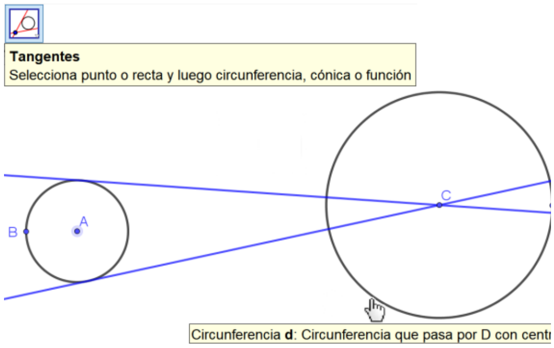

Figura 6. Construcción de las rectas tangentes.

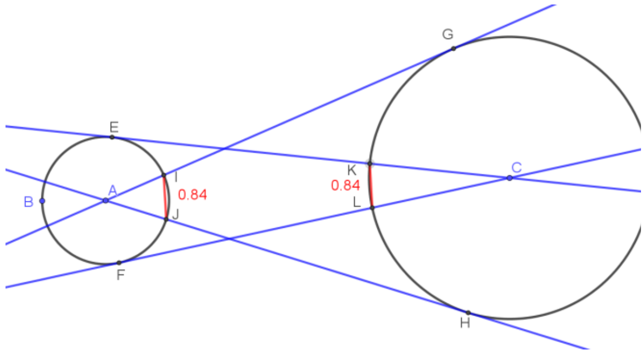

Figura7. Construcción de las cuerdas.

Paso 3: Trazar las cuerdas. Utilizando la herramienta **Segmento** se marca la intersección entre las circunferencias y las rectas. De este modo, resultan dos cuerdas (en rojo) de la misma medida (Figura 7).

Prueba de arrastre: Arrastrando el punto C. Al mover el punto C se modifica la distancia hasta el centro A y el punto D. En el ejemplo, al igual que antes, se puede ver cómo los centros A y C están más cerca y el radio de la circunferencia de centro C ha aumentado. La manera de trazar las rectas tangentes hace que la propiedad se conserve. Las cuatro rectas siguen siendo tangentes y las cuerdas siguen teniendo las mismas medidas.

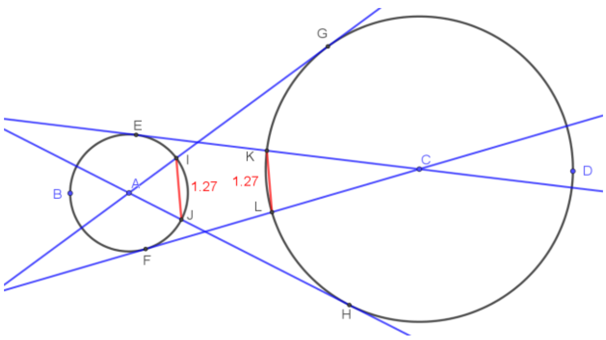

Figura 8. La propiedades que determinanan el problema se conservan con el arrastre.

Segundo episodio: Exploración

Algo importante en este tipo de problemas es que, para estudiar la figura, es necesario apoyarse en otros objetos y medidas que no aparecen en la figura del enunciado. Añadiendo otros puntos y rectas, además de visualizar la medida de los ángulos se pueden hacer algunas observaciones:

Los estudiantes que participaron en el taller, durante las dos sesiones que se dedicaron a este problema, exploraron distintas propiedades que les llevaran a la solución. Para ello, se decantaron por la segunda construcción, que les permitía verificar las igualdades y arrastrar elementos sin que se perdiera la igualdad de medidas entre las cuerdas. A esta construcción inicial le añadieron otros objetos, algunos de los cuales pueden verse en el ejemplo. Los distintos objetos que añadieron fueron (Figura 9):

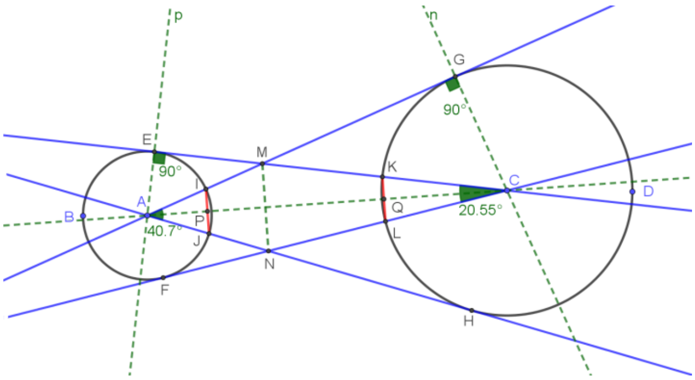

Figura 9. Rectas y segmentos adicionales.

- La recta que pasa por ambos centros A y C
- Los puntos de corte, P y Q, de la recta AC con las cuerdas.
- El segmento MN, donde M y N designan los puntos de corte de las dos rectas que pasan por A con las dos rectas que pasan por C.
- Las rectas que pasan por el centro de las circunferencias y por sus puntos de tangencia.
- Varios ángulos, como los que forman las rectas tangentes a las circunferencias entre sí y los que forman con la recta AC. También se

observan los distintos ángulos rectos que aparecen, como los que se forman entre los radios de las circunferencias y los puntos de tangencia.

A partir de la manipulación de estos objetos, establecieron una serie de consideraciones, algunas de la cuales se reorientaron para la resolución del problema y otras no (Figura 10):

- La mediatriz de la cuerda IJ es la recta AC; igualmente la de la cuerda KL.
- La bisectriz del ángulo GAH es la recta AC; igualmente la bisectriz de ECF.
- El segmento MN es paralelo a las cuerdas IJ y KL, que también son paralelas.
- Los puntos P y Q son los puntos medios de los segmentos IJ y KL. Por tanto, basta demostrar que la distancia IP es igual a la KQ.
- La recta AC es un eje de simetría de la construcción.
- Los triángulos AIJ y AMN son semejantes. También lo son CLK y CNM
- Los triángulos rectángulos AEC y KQC, al igual CGA y API, son semejantes.

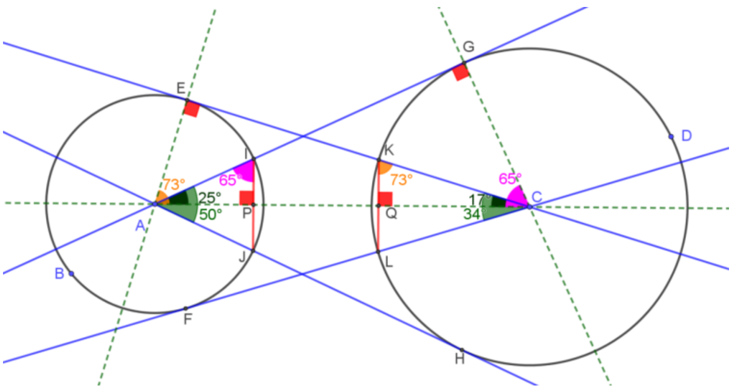

Figura 10. Propiedades de congruencia e igualdad que se verifican.

Episodio 3: Búsqueda de múltiples aproximaciones

Aproximación Geométrica

Esta aproximación se basa en las propiedades de semejanza de triángulos observada. Se utiliza que la recta AC es la bisectriz de los ángulos que abarcan las rectas tangentes y la mediatriz de las cuerdas. Veamos que se cumplen ambas propiedades:

- Por construcción G y H son puntos de tangencia entre las rectas y la circunferencia (Figura 11). Teniendo en cuenta que una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio de extremos el punto de tangencia y el centro, podemos asegurar que la distancia de C a cualquiera de las tangentes coincide con el radio de la circunferencia (R). Por tanto, C equidista de ambas rectas y, como la bisectriz es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo, tendremos que C pertenece a la bisectriz del ángulo GAH. Como A también pertenece a la bisectriz, la recta AC es bisectriz del ángulo AGH. De forma análoga se demuestra que también es bisectriz del ángulo ECF (Figura 11).

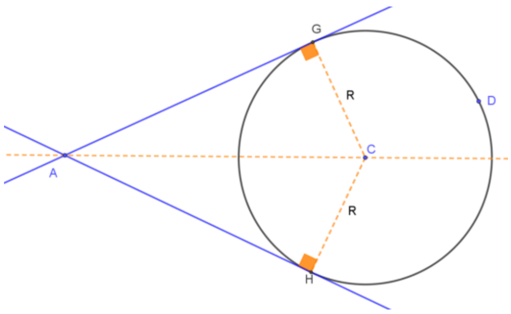

Figura 11. AC es la bisectriz de HAG.

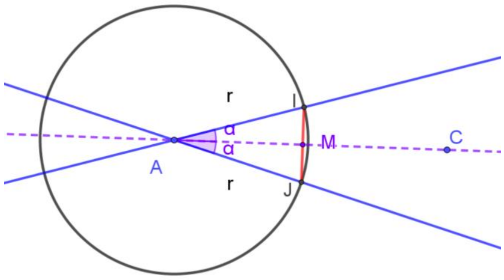

Figura 12. El triángulo AIJ es isósceles.

La recta AC es la mediatriz de la cuerda IJ (también es la mediatriz de KL). Por construcción el triángulo AIJ (Figura 12) es isósceles al tener dos lados iguales. Si tenemos en cuenta el resultado anterior, tenemos que el ángulo IAJ queda dividido por la recta AC (bisectriz) en dos ángulos. Teniendo en cuenta la propiedad que establece que *En un triángulo isósceles el eje de simetría coincide con la bisectriz del ángulo diferente y con la mediatriz del lado opuesto. Además, contiene una altura y una mediana* se cumplirá que la recta AC es también la mediatriz de IJ. De forma homóloga se demuestra que es mediatriz de KL. Por construcción, se observa que el triángulo AGC es un triángulo rectángulo que comparte el ángulo α con el triángulo API, que también es un triángulo rectángulo (Figura 13). Utilizando el criterio de semejanza AAA, tenemos que API y AGC son semejantes. Análogamente, KQC y AEC son triángulos semejantes (Figura 13).

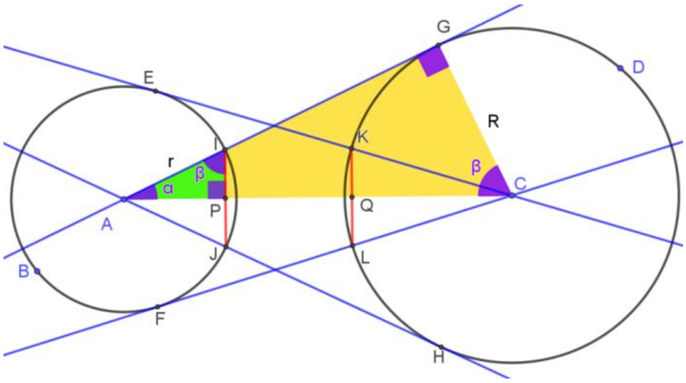

Figura 13. Triángulos semejantes API y AGC.

A partir de la semejanza de los cuatro triángulos y atendiendo a la proporcionales de sus lados homólogos, se tendrá:

$$\begin{gathered} Sean\ r\ y\ R, los\ radios\ de\ las\ circunferencias\ y \\ \overline{PI}, \overline{KQ} y\ \overline{AC}\ las\ longitudes\ de\ los\ segmentos \\ \text{API y AGC, y KQC y AEC son semejantes} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{R}{\overline{\overline{PI}}} = \dfrac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \dfrac{R \cdot r}{\overline{\overline{AC}}} = \overline{PI} \\ \dfrac{r}{\overline{\overline{KQ}}} = \dfrac{\overline{AC}}{R} \Rightarrow \dfrac{R \cdot r}{\overline{\overline{AC}}} = \overline{KQ} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{PI} = \overline{KQ} \end{gathered}$$

Obviamente, como P y Q son los puntos medios de las cuerdas IJ y KL, respectivamente, al ser AC la mediatriz de las cuerdas, podemos afirmar que la longitud de IJ es la misma que la de KL.

Aproximación algebraica (analítica)

Se utiliza, al igual que en la aproximación anterior, la propiedad según la cual la recta AC es la bisectriz de los ángulos que abarcan las rectas y la mediatriz de las cuerdas. En este caso, se sitúa el centro de una de las circunferencias en el origen de coordenadas y la otra tendrá su centro sobre el eje X (Figura 14). De esta forma, el eje X será la mediatriz de las cuerdas IJ y KL, por lo que el objetivo del problema se transforma en verificar que la segunda coordenada de los puntos I y K coinciden.

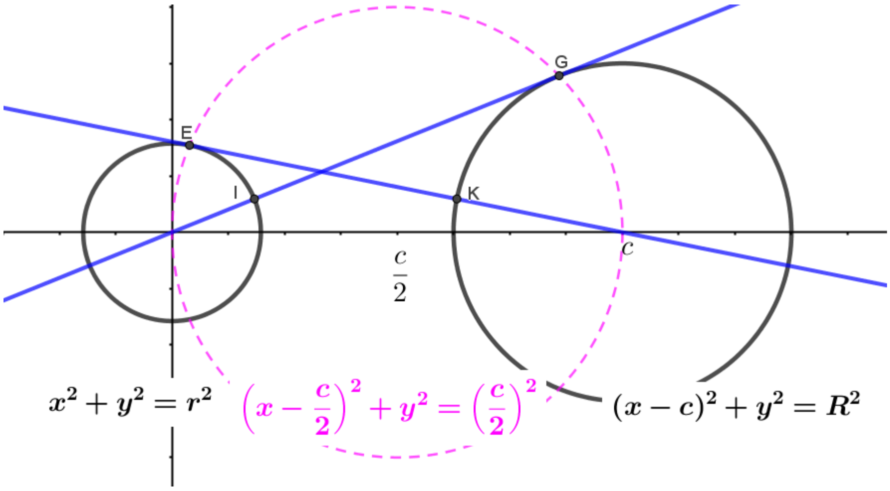

Figura 14. Representación en el plano coordenado.

Sean r, el radio de la circunferencia centrada en el origen y R el de la circunferencia centrada en el punto $C\ (c, 0)$. Sea ahora la circunferencia de centro $\left(\frac{c}{2},\ 0\right)$ y de radio $\frac{c}{2}$. El punto G es el punto de intersección de esta última circunferencia y la de centro C y radio R. Para obtener sus coordenadas se resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{c}(x-c)^2+y^2=R^2\\ \left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2\end{array}\right\}\Rightarrow (x-c)^2-\left(x-\frac{c}{2}\right)^2=R^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2+c^2-2cx-x^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2+2\frac{c}{2}x=R^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x=\frac{c^2-R^2}{c}\xrightarrow{\text{sustituyendo}}\left(\frac{c^2-R^2}{c}-c\right)^2+y^2=R^2\Rightarrow y=\pm\frac{R\sqrt{c^2-R^2}}{c}$$

Como G está en el primer cuadrante, sus coordenadas son $G=\left(\frac{c^2-R^2}{c},\frac{R\sqrt{c^2-R^2}}{c}\right)$.

Obviamente, la ecuación de la recta tangente que pasa por los puntos $A=(0,0)$ (el origen de coordenadas) y G es de la forma:

$$y=\frac{R\sqrt{c^2-R^2}}{c^2-R^2}x$$

El punto I es la intersección de esta recta con la circunferencia centrada en el origen y de radio r, que se obtiene resolviendo el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{c} y=\dfrac{R\sqrt{c^2-R^2}}{c^2-R^2}x \\ x^2+y^2=r \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+\frac{R^2(c^2-R^2)}{(c^2-R^2)^2}x^2=r \Rightarrow x=\pm\frac{r\sqrt{c^2-R^2}}{c}$$

$$\text{I está en el primer cuadrante} \rightarrow y=\frac{R\sqrt{c^2-R^2}}{c^2-R^2}\cdot\frac{r\sqrt{c^2-R^2}}{c} \Rightarrow y=\frac{R\cdot r}{c}$$

Luego, las coordenadas del extremo de la cuerda son $I=\left(\frac{r\sqrt{c^2-R^2}}{c},\frac{R\cdot r}{c}\right)$.

De manera análoga, el punto E es la intersección de la circunferencia centrada en el origen y de radio r, con la circunferencia de centrada en $\left(\frac{c}{2},\ 0\right)$ y de radio $\frac{c}{2}$, resultando $E=\left(\frac{r^2}{c},\ \frac{r\sqrt{c^2-r^2}}{c}\right)$. Por último, el punto K se obtiene al intersecar la recta tangente que pasa por los puntos E y C, de ecuación $y=-\frac{r\sqrt{c^2-r^2}}{c^2-r^2}(x-c)$ con la circunferencia de centro C y radio R; de esta manera resulta el punto K de coordenadas $K=\left(c-\frac{R\sqrt{c^2-R^2}}{c},\ \frac{R\cdot r}{c}\right)$.

Los puntos I y K tienen como segunda coordenada el valor $\frac{R\cdot r}{c}$, lo que implica que las cuerdas IJ y KL tienen la misma longitud $\frac{2\cdot R\cdot r}{c}$, donde c simboliza la distancia entre los centros de las circunferencias.

Episodio 4: Algunas extensiones

Un hecho que también se puede observar en la construcción es la relación que existe entre los puntos de tangencia y las dos circunferencias; para ello habría que plantearse: ¿de qué manera los podríamos trazar sin usar la herramienta?

¿Se podría usar el lugar geométrico para analizar propiedades de la variación de los centros?

A partir de la construcción robusta, se puede observar que, al dejar fijos los centros A y C y arrastrar el punto D (que hace variar el radio), los puntos de tangencia E y G generan una semicircunferencia (véase Figura 15). Para poder utilizar la herramienta “Lugar geométrico”, hay que limitar el punto D; para ello, se traza la semirrecta AC y se hace variar a D sobre ella. De esta forma, se pueden dibujar dos lugares geométricos: el lugar geométrico de G cuando varía D y el lugar geométrico de H cuando varía D (Figura 16).

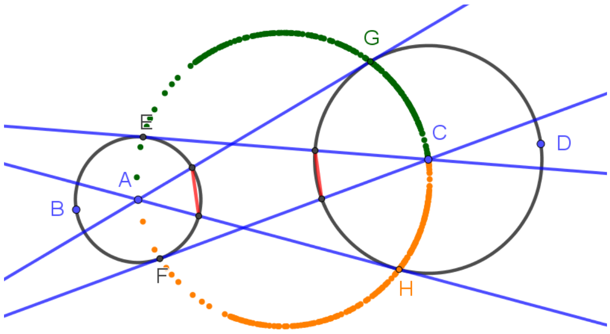

Figura 15. Circunferencia que contiene a los centros A y C con el rastro.

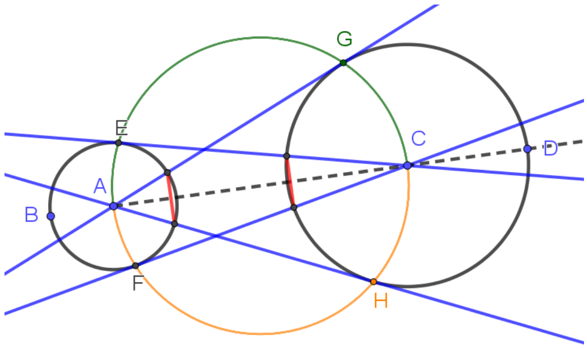

Figura 16. Circunferencia que contiene a los centros A y C, como lugar geométrico

Algunas reflexiones finales

Hemos podido observar que para resolver la tarea haciendo uso del SGD GeoGebra, la "comprensión del problema" (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013) "se ha transformado" en "hagamos la construcción que nos propone el planteamiento del problema haciendo uso de la tecnología".

Esta etapa ha resultado ser fundamental para la resolución y justificación de la propiedad de igualdad de las medidas de las cuerdas que se pide. Las preguntas que surgen a partir del enfoque de construcción inicial que requiere el problema, como, por ejemplo: ¿dónde se deben situar los puntos de tangencia? ¿influye el orden de elección? ¿cómo encontrar exactamente las tangentes? son cruciales para ir determinando propiedades y argumentos necesarios para la prueba. Es importante entender la propiedad de la perpendicularidad de los radios de las circunferencias, uno de cuyos extremos es el punto de tangencia de las rectas tangentes a las circunferencias.

La visualización y los criterios de semejanza de triángulos resultan esenciales para la justificación final obtenida a partir de la re-construción en Geogebra de la figura propuesta por el problema

AGRADECIMIENTOS: Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Proyecto I+D+i del Programa Estatal de Investigación, Desarrollo e Innovación Orientada a los Retos de la Sociedad, del Ministerio de Economía Ciencia e Innovación con referencia EDU2017-84276-R.

Referencias bibliográficas

Hernández, A., Perdomo-Díaz, J., & Camacho-Machín, M. (2018). Prompts, Technology and Problem Solving. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 5, p. 61. Umeå.

Leung, A. & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematical tasks: The role of tools. In A. Watson, & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education*, pp. 191-225. NY: Springer.

Gómez-Arciga, A.; Poveda-Fernández (2017). El uso de tecnologías digitales en actividades que extienden la discusión matemática de los estudiantes. En A. Alvarado, G. Carmona y A. Mata (Eds.) *Una visión integradora. Tópicos Selectos de Educación en CITeM*. ECORFAN- México.

Ministerio de Educación Cultura y Deportes (2015) *Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* BOE Núm. 3 de 3 de enero de 2015, pp. 169-422

Santos-Trigo, M.; Camacho-Machín, M. (2016). Digital Technologies and Mathematical problem solving: Redesigning resources, materials, and extending learning environments. En Newton, K. (Ed.) *Problem-Solving: Strategies, Challenges and Outcomes*, pp. 31-49. Nova Science Publishers. New York.

Santos-Trigo, M. (To appear). Mathematical problem solving and the use of digital technologies. In P. Liljedahl, & M. Santos-Trigo (Eds.), *Problem solving in mathematics education*, *ICME-13 Topic Study Group Report*, Springer.

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematical Enthusiast*, *10*(1 & 2), 279-302.