Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2020; Vol. 7(2): 222-233.

Una generalización del conjunto ternario de Cantor

A generalizations of the ternary Cantor set

Andrés Merino* and Sebastián Heredia F.†

Received, May. 13, 2020 *Accepted, Nov. 04, 2020*

How to cite this article:
Merino A, Heredia S. *Una generalización del Conjunto ternario de Cantor*. Selecciones Matemáticas. 2020;7(2):222–233. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2020.02.04

Resumen
En el presente artículo, se expone una generalización del conjunto ternario de Cantor basada en la β-expansión de un número; además, se presenta que, bajo hipótesis adecuadas, esta extensión también corresponde a la manera constructiva de la definición del conjunto ternario de Cantor. Finalmente, se demuestra que los conjuntos que se obtienen son, en efecto, conjuntos de Cantor.
Palabras clave. Conjunto de Cantor, conjunto ternario de Cantor, β-expansión.

Abstract
In this work, we show a generalization to the ternary Cantor set based on the β-expantion of a number, futhermore, we present that, under appropriate hypotheses, this extension also corresponds to a constructive way of the definition of the ternary Cantor set . Finally, we prove that these sets that are, in effect, Cantor sets.
Keywords . Cantor set, ternary Cantor set, β-expantion.

1. Introducción. En 1883, G. Cantor introdujo el denominado Conjunto ternario de Cantor [1], a partir de ahí, varias generalizaciones de este conjunto han sido propuestas. Una de las generalizaciones más conocida es el denominado conjunto de Smith-Volterra-Cantor (ver [2]). En este trabajo presentamos una generalización del conjunto ternario de Cantor a partir de la característica que le da su nombre: la expansión ternaria.

El conjunto ternario de Cantor puede ser visto como el conjunto de todos los elementos del intervalo $[0, 1]$ que tiene un representación en base 3 en la cual el número 1 no aparece. Con esto en mente, dado cualquier número β natural mayor o igual que 3, podemos considerar el conjunto de todo los elementos del intervalo $[0, 1]$ que tiene un β-expansión en la cual un número α, con α un natural entre 0 y $\beta - 1$, no aparece. Así, la pregunta inmediata es si este tipo de conjuntos tienen las mismas propiedades que el conjunto ternario de Cantor, es decir, si son *conjuntos de Cantor*.

Para precisar lo que es un conjunto de Cantor, vamos a considerar las siguientes definiciones sobre espacios topológicos. Diremos que un subconjunto C de un espacio topológico es:

- *Denso en ninguna parte* o *diseminado* si el interior de su clausura es vacío, es decir, si $\operatorname{int}(\overline{C}) = \varnothing$.
- *Perfecto* si es igual a su conjunto derivado (el conjunto de sus puntos de acumulación), es decir, si $C = C'$.
- *Totalmente disconexo* si sus componentes conexas son conjuntos unitarios.

Con esto, tenemos la siguiente definición de un conjunto de Cantor.

Definición 1 (Conjunto de Cantor). *Un subconjunto de un espacio topológico es llamado un* conjunto de Cantor *si es totalmente disconexo, perfecto y compacto.*

*Escuela de Ciencias Físicas y Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Quito, Ecuador (aemerinot@puce.edu.ec).
†Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador (csebastianherediaf@gmail.com).

En particular, en $\mathbb{R}$, tenemos la siguiente caracterización de los conjuntos de Cantor [3, pag. 314].

Proposición 1. *Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es un conjunto de Cantor si es denso en ninguna parte, perfecto y acotado.*

Utilizaremos las siguientes notaciones para realizar el análisis de los conjuntos que plantearemos. El conjunto de los números naturales se lo representará por ω, como es habitual en la teoría de Conjuntos; de igual forma, dado un número natural $\beta \in \omega$, diferente de 0, se entenderá este como el conjunto $\{0, 1, \ldots, \beta - 1\}$. Además, denotaremos por $\mathcal{I}$ al intervalo $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$. Por otro lado, dados conjuntos A y B, A^B designará al conjunto de todas las funciones de B en A, en particular, A^ω representa el conjunto de todas las sucesiones de A. Finalmente, λ representará la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$.

Ahora, dados $\beta \in \omega$ tal que $\beta > 1$ y $x \in \mathcal{I}$, una *β-expansión de x* es una sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ de β (es decir, $x_n \in \{0, 1, \ldots, \beta - 1\}$ para todo $n \in \omega$) tal que

$$x = \sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{\beta^{n+1}}.$$

Se tiene que todo elemento de $\mathcal{I}$ posee al menos una β-expansión [4]. Con esto, definiendo la función

$$\begin{aligned} T\colon \quad \beta^\omega \quad &\longrightarrow \mathcal{I} \\ (x_n)_{n\in\omega} &\longmapsto \sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{\beta^{n+1}}, \end{aligned}$$

tenemos que una sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ de β es una β-expansión de x si $T\left((x_n)_{n\in\omega}\right) = x$. Por lo mencionado en [4], se tiene que esta función es sobreyectiva más no inyectiva.

2. Generalización de conjuntos de Cantor. En esta sección, tomaremos $\beta \in \omega$ tal que $\beta \geq 3$. Generalizamos el conjunto ternario de Cantor de la siguiente forma.

Definición 2. *Sean $\beta \in \omega$, tal que $\beta \geq 3$, y $\alpha \in \beta$; definamos*

$$\mathcal{C}(\beta, \alpha) = T\left((\beta \setminus \{\alpha\})^\omega\right) = \left\{ \sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} : (x_n)_{n\in\omega} \in (\beta \setminus \{\alpha\})^\omega \right\},$$

es decir, el conjunto de todos los elementos de $\mathcal{I}$ tales que tienen una β-expansión en la cual el número α no aparece.

Con esta definición, tenemos que $\mathcal{C}(3, 1)$ es el conjunto ternario de Cantor. Por otro lado, este conjunto puede ser "construido" partiendo el intervalo $\mathcal{I}$ en 3 partes iguales y retirando la segunda de estas y luego repitiendo este proceso sobre cada intervalo restante [5], es decir,

$$\mathcal{C}(3, 1) = \bigcap_{m\in\omega\setminus\{0\}} \left(\bigcup_{k\in 3_1^m} \left[\frac{k}{3^m}, \frac{k+1}{3^m} \right] \right),$$

donde 3_1^m representará el conjunto de todos los números naturales k menores que 3^m tales que $k \not\equiv 1 \pmod{3}$, esto retira las segundas partes de cada nueva subdivisión de intervalos.

Empezaremos demostrando que, bajo hipótesis adecuadas sobre α, $\mathcal{C}(\beta, \alpha)$ puede ser construido de igual manera, es decir, partiendo el intervalo $\mathcal{I}$ en β partes iguales y retirando la parte $(\alpha + 1)$-ésima. Esto lo podemos formalizar de la siguiente manera: para $m \geq 1$ y $k \in \beta^m$, definamos

$$A_{k,m} = \left[\frac{k}{\beta^m}, \frac{k+1}{\beta^m} \right],$$

notemos que $\{A_{k,0}\}_{k\in\beta}$ divide al intervalo $\mathcal{I}$ en β partes iguales y, de igual manera, $\{A_{k,m+1}\}_{k\in\beta^{m+1}}$ subdivide a cada uno de los intervalos de $\{A_{k,m}\}_{k\in\beta^m}$ en β partes iguales. Por otro lado, definamos $E_0 = \mathcal{I}$ y, para $m \geq 1$,

$$E_m = \bigcup_{k\in\beta_\alpha^m} A_{k,m},$$

donde

$$\beta_\alpha^m = \{k \in \beta^m : k \not\equiv \alpha \pmod{\beta}\},$$

al tomar la unión sobre este conjunto, retiramos la parte $(\alpha+1)$-ésima de cada división. Así, el conjunto

$$\bigcap_{m\in\omega} E_m,$$

representa el proceso de partir el intervalo $\mathcal{I}$ en β partes iguales y retirando la parte $(\alpha+1)$-ésima. En las Figuras 2.1 y 2.2 podemos ver ejemplos de este proceso.

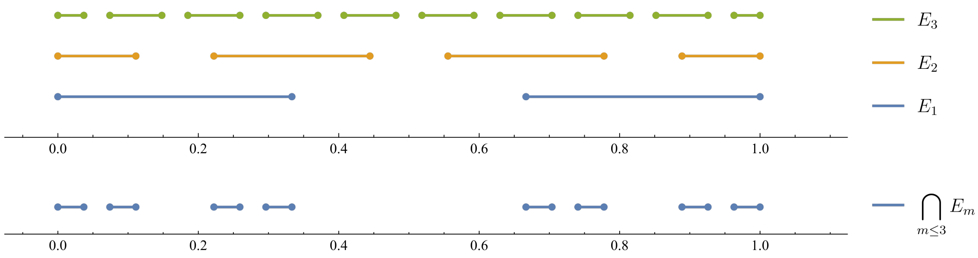

Figura 2.1: Primeros pasos de la construcción para $\beta = 3$ y $\alpha = 1$.

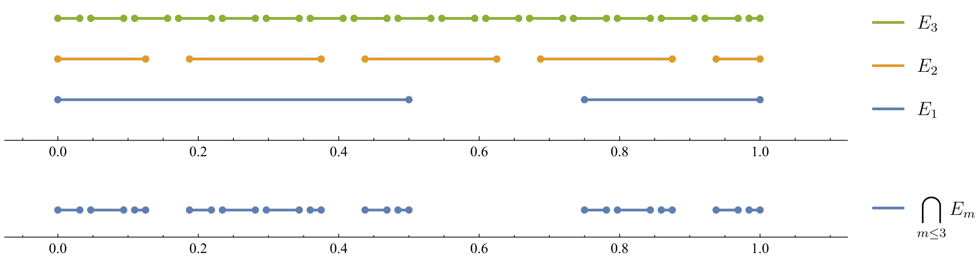

Figura 2.2: Primeros pasos de la construcción para $\beta = 4$ y $\alpha = 2$.

Nuestro objetivo es demostrar que, bajo hipótesis adecuadas, se cumple que

$$\mathcal{C}(\beta,\alpha) = \bigcap_{m\in\omega} E_m.$$

Empecemos, demostrando que, en general, se tiene una de las inclusiones.

Proposición 2. *Sean $\beta \in \omega$, tal que $\beta \geq 3$, y $\alpha \in \beta$. Se tiene que*

$$\mathcal{C}(\beta,\alpha) \subseteq \bigcap_{m\in\omega} E_m.$$

Demostración: Sea $x \in \mathcal{C}(\beta,\alpha)$, tenemos que existe $(x_n)_{n\in\omega} \in (\beta \setminus \{\alpha\})^\omega$ tal que

$$x = T((x_n)_{n\in\omega}) = \sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{\beta^{n+1}};$$

demostremos que $x \in \bigcap_{m\in\omega} E_m$. Como $x_n \in \beta$ para todo $n \in \omega$, tenemos:

$$0 \leq \sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} \leq \sum_{n\in\omega} \frac{\beta-1}{\beta^{n+1}} = 1;$$

por lo tanto, $x \in E_0$.

Ahora, sea $m \in \omega$ con $m \geq 1$, vamos a demostrar que $x \in E_m = \bigcup_{k\in\beta_\alpha^m} A_{k,m}$. Definamos

$$k = \sum_{n=0}^{m-1} \beta^{m-1-n} x_n,$$

notemos que $k \in \beta_\alpha^m$, en efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \le \sum_{n=0}^{m-1} \beta^{m-1-n} x_n \le \sum_{n=0}^{m-1} \beta^{m-1-n}(\beta-1) &= \sum_{n=0}^{m-1} (\beta^{m-n} - \beta^{m-1-n}) \\ &= \beta^m - \beta^0 = \beta^m - 1, \end{aligned}$$

de donde, $1 \le k \le \beta^m - 1$. Ahora, por reducción al absurdo, supongamos que existe $l \in \beta^{m-1}$ tal que $k - \alpha = l\beta$, con ello, $l\beta + \alpha = \sum_{n=0}^{m-1} \beta^{m-1-n} x_n$, es decir,

$$\sum_{n=0}^{m-1} \beta^{m-1-n} x_n = \beta^{m-1} x_0 + \beta^{m-2} x_1 + \ldots + \beta x_{m-2} + x_{m-1} = l\beta + \alpha,$$

así, tenemos

$$x_{m-1} = \alpha - \beta(\beta^{m-2} x_0 + \beta^{m-3} x_1 + \beta^{m-4} x_2 + \ldots + x_{m-2} - l);$$

definiendo $z := \beta^{m-2} x_0 + \beta^{m-3} x_1 + \ldots + x_{m-2} - l$ tenemos tres casos:

- Si $z < 0$, entonces $z \le -1$; así $-\beta z \ge \beta$ con ello $x_{m-1} = \alpha - \beta z \ge \alpha + \beta \ge \beta$, es decir, $x_{m-1} \notin \beta$, contradiciendo que $(x_n)_{n\in\omega} \in (\beta \setminus \{\alpha\})^\omega$.
- Si $z = 0$, entonces $x_{m-1} = \alpha$, lo cual contradice que $(x_n)_{n\in\omega} \in (\beta \setminus \{\alpha\})^\omega$.
- Si $z > 0$, entonces tenemos que $z \ge 1$; así, $-\beta z \le -\beta$, con ello $x_{m-1} = \alpha - \beta z \le \alpha - \beta < \beta - \beta = 0$, contradiciendo que $(x_n)_{n\in\omega} \in (\beta \setminus \{\alpha\})^\omega$.

Con esto, no existe $l \in \beta^{m-1}$ tal que $k - \alpha = l\beta$, es decir, $k \not\equiv \alpha \pmod{\beta}$, por ende, $k \in \beta_\alpha^m$.

Finalmente, observemos que $x \in \left[\frac{k}{\beta^m}, \frac{k+1}{\beta^m}\right]$, en efecto,

$$\frac{k}{\beta^m} = \frac{\sum_{n=0}^{m-1} \beta^{m-1-n} x_n}{\beta^m} = \sum_{n=0}^{m-1} \beta^{-1-n} x_n = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} \le \sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} = x.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} x = \sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} \\ &= \frac{1}{\beta^m} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} \beta^m + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} \\ &= \frac{k}{\beta^m} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} \le \frac{k}{\beta^m} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{\beta-1}{\beta^{n+1}} \\ &= \frac{k}{\beta^m} + \frac{1}{\beta^m} = \frac{k+1}{\beta^m}. \end{aligned}$$

Con esto, tenemos que $x \in E_m$ para todo $m \in \omega$. Así, concluimos que $\mathcal{C}(\beta,\alpha) \subseteq \bigcap_{m\in\omega} E_m$.

Para demostrar la otra inclusión, primero observemos el siguiente lema.

Lema 1. *Sean $x \in \bigcap_{m\in\omega} E_m$ y $(x_n)_{n\in\omega}$ una β-expansión de x. Para $m \in \omega$, tomemos $k_{m+1} \in \beta^{m+1}$ tal que $x \in \left[\frac{k_{m+1}}{\beta^{m+1}}, \frac{k_{m+1}+1}{\beta^{m+1}}\right]$ y definamos $r_m = \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{x_n}{\beta^{n-m}}$. Tenemos que, para todo $m \in \omega$,*

- *si $r_m = 0$, entonces $k_{m+1} \le \sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n \le k_{m+1} + 1$;*
- *si $r_m = 1$, entonces $k_{m+1} - 1 \le \sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n \le k_{m+1}$;*
- *si $0 < r_m < 1$, entonces $\sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n = k_{m+1}$.*

Demostración: Sea $m \in \omega$, notemos que

$$x = \sum_{n \in \omega}^{+\infty} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} = \sum_{n=0}^{m} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} + \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} = \sum_{n=0}^{m} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} + \frac{1}{\beta^{m+1}} \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{x_n}{\beta^{n-m}},$$

por lo tanto,

$$x = \sum_{n=0}^{m} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} + \frac{1}{\beta^{m+1}} r_m,$$

de donde

$$\beta^{m+1} x = \sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n + r_m,$$

y, como $x \in \left[\frac{k_{m+1}}{\beta^{m+1}}, \frac{k_{m+1}+1}{\beta^{m+1}}\right]$, entonces

$$k_{m+1} \leq \sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n + r_m \leq k_{m+1} + 1.$$

Con esto, tenemos los siguientes casos:

- Si $r_m = 0$, entonces

$$k_{m+1} \leq \sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n \leq k_{m+1} + 1.$$

- Si $r_m = 1$, entonces

$$k_{m+1} \leq \sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n + 1 \leq k_{m+1} + 1,$$

  por lo tanto,

$$k_{m+1} - 1 \leq \sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n \leq k_{m+1}.$$

- Si $0 < r_m < 1$, entonces

$$k_{m+1} \leq \sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n + r_m < \sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n + 1$$

  y

$$\sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n < \sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n + r_m \leq k_{m+1} + 1,$$

  de donde

$$k_{m+1} - 1 < \sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n < k_{m+1} + 1,$$

  y, como $\sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n \in \omega$, concluimos que $\sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n = k_{m+1}$.

Ahora, demostraremos que, bajo las hipótesis adecuadas, se tiene la inclusión faltante.

Proposición 3. *Sean $\beta \in \omega$, tal que $\beta \geq 3$, y $\alpha \in \beta \setminus \{0, \beta - 1\}$. Se tiene que*

$$\bigcap_{m \in \omega} E_m \subseteq \mathcal{C}(\beta, \alpha).$$

Demostración: Sea $x \in \bigcap_{m\in\omega} E_m$. Como $x \in \mathcal{I}$, tenemos que posee al menos una β-expansión, es decir, existe $(x_n)_{n\in\omega} \in \beta^\omega$ tal que $T((x_n)_{n\in\omega}) = x$. Con esto, vamos a demostrar que $x_n \neq \alpha$ para todo $n \in \omega$ o que existe $(y_n)_{n\in\omega} \in (\beta \smallsetminus \{\alpha\})^\omega$ tal que $T((y_n)_{n\in\omega}) = x$.

Supongamos que $\{n \in \omega : x_n = \alpha\} \neq \varnothing$, vamos a demostrar que existe $(y_n)_{n\in\omega} \in (\beta \smallsetminus \{\alpha\})^\omega$ tal que $T((y_n)_{n\in\omega}) = x$.

Sea $m = \text{mín}\{n \in \omega : x_n = \alpha\}$; con esto, notemos que $x_n \neq \alpha$ para todo $n < m$ y $x_m = \alpha$. Por otro lado, como $x \in \bigcap_{m\in\omega} E_m$, existe $k_{m+1} \in \beta_\alpha^{m+1}$ tal que $x \in \left[\frac{k_{m+1}}{\beta^{m+1}}, \frac{k_{m+1}+1}{\beta^{m+1}}\right]$; además, definamos $r_m = \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{x_n}{\beta^{n-m}}$, tenemos que

$$x = \sum_{n=0}^{m} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} + \frac{1}{\beta^{m+1}} r_m,$$

de donde

$$\beta^{m+1} x = \sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n + r_m. \tag{2.1}$$

Tenemos tres casos:

1. Si $r_m = 0$, tenemos que

$$x = \sum_{n=0}^{m} \frac{x_n}{\beta^{n+1}}.$$

Además, por el Lema 1, se tiene que

$$k_{m+1} \leq \sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n \leq k_{m+1} + 1,$$

de aquí, como $\sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n \in \omega$, tenemos las siguientes alternativas:

- Si $\sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n = k_{m+1}$, tenemos que

$$k_{m+1} = \sum_{n=0}^{m-1} \beta^{m-n} x_n + x_m = \sum_{n=0}^{m-1} \beta^{m-n} x_n + \alpha = \beta \sum_{n=0}^{m-1} \beta^{m-n-1} x_n + \alpha.$$

Ahora, como $\sum_{n=0}^{m-1} \beta^{m-n-1} x_n \in \omega$, tenemos que $k_{m+1} \equiv \alpha \pmod{\beta}$, lo cual no puede darse ya que $k_{m+1} \in \beta_\alpha^{m+1}$; así, este caso no se tiene.

- Si $\sum_{n=0}^{m} \beta^{m-n} x_n = k_{m+1} + 1$, definamos:

$$y_n = \begin{cases} x_n & \text{si } n < m, \\ x_m - 1 & \text{si } n = m, \\ \beta - 1 & \text{si } n > m. \end{cases}$$

Notemos que $(y_n)_{n\in\omega} \in (\beta \smallsetminus \{\alpha\})^\omega$, en efecto, tenemos que $x_n \neq \alpha$ para todo $n < m$, asimismo, como $x_m = \alpha$ tenemos que $x_m - 1 \neq \alpha$, además, como $\alpha \in \beta \smallsetminus \{0, \beta - 1\}$ tenemos que $x_m - 1 \in \beta$.

Por otro lado, tenemos que $x = T((y_n)_{n\in\omega})$, en efecto, por (2.1), sabemos que, $\beta^{m+1} x =$

$k_{m+1}+1$; con esto, se tiene que[1]

$$\begin{aligned} T((y_n)_{n\in\omega}) &= \sum_{n<m}\frac{x_n}{\beta^{n+1}}+\frac{x_m-1}{\beta^{m+1}}+\sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{\beta-1}{\beta^{n+1}} \\ &= \sum_{n<m}\frac{x_n}{\beta^{n+1}}+\frac{x_m}{\beta^{m+1}}-\frac{1}{\beta^{m+1}}+\frac{1}{\beta^{m+1}} \\ &= \sum_{n\le m}\frac{x_n}{\beta^{n+1}}=\frac{1}{\beta^{m+1}}\sum_{n=0}^{m}\beta^{m-n}x_n \\ &= \frac{k_{m+1}+1}{\beta^{m+1}}=\frac{\beta^{m+1}x}{\beta^{m+1}}=x. \end{aligned}$$

2. Si $r_m=1$, tenemos que

$$x=\sum_{n=0}^{m}\frac{x_n}{\beta^{n+1}}+\frac{1}{\beta^{m+1}}.$$

Además, por el Lema 1, se tiene que

$$k_{m+1}-1\le\sum_{n=0}^{m}\beta^{m-n}x_n\le k_{m+1},$$

de aquí, como $\sum_{n=0}^{m}\beta^{m-n}x_n\in\omega$, tenemos las siguientes alternativas:

- Si $\sum_{n=0}^{m}\beta^{m-n}x_n = k_{m+1}$, de manera análoga a lo realizado en el primer caso de la parte anterior, se tiene que este caso no se da.
- Si $\sum_{n=0}^{m}\beta^{m-n}x_n = k_{m+1}-1$, definamos:

$$y_n=\begin{cases} x_n & \text{si } n<m, \\ x_m+1 & \text{si } n=m, \\ 0 & \text{si } n>m. \end{cases}$$

Análogamente a lo expuesto en la parte anterior, tenemos que $(y_n)_{n\in\omega}\in(\beta\setminus\{\alpha\})^{\omega}$. Por otro lado, tenemos que $x=T((y_n)_{n\in\omega})$, en efecto, por (2.1), sabemos que, $\beta^{m+1}x=k_{m+1}$; con esto, se tiene que

$$\begin{aligned} T((y_n)_{n\in\omega}) &= \sum_{n<m}\frac{x_n}{\beta^{n+1}}+\frac{x_m+1}{\beta^{m+1}} \\ &= \sum_{n<m}\frac{x_n}{\beta^{n+1}}+\frac{x_m}{\beta^{m+1}}+\frac{1}{\beta^{m+1}} \\ &= \sum_{n\le m}\frac{x_n}{\beta^{n+1}}+\frac{1}{\beta^{m+1}}=\frac{1}{\beta^{m+1}}\left(\sum_{n=0}^{m}\beta^{m-n}x_n+1\right) \\ &= \frac{k_{m+1}}{\beta^{m+1}}=\frac{\beta^{m+1}x}{\beta^{m+1}}=x. \end{aligned}$$

3. Si $0<r_m<1$, por el Lema 1, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{m}\beta^{m-n}x_n=k_{m+1},$$

de manera análoga a lo realizado en los primeros casos de las partes anteriores, se tiene que este caso no se da.

[1] Si $m=0$, entendemos que la primera suma se realiza sobre un conjunto vacío y, por ende, es igual a 0.

Con esto, concluimos que $x \in C(\beta, \alpha)$.

Así, de las Proposiciones 2 y 3, se obtiene directamente el siguiente teorema.

Teorema 1. *Sean $\beta \in \omega$, tal que $\beta \geq 3$, y $\alpha \in \beta \setminus \{0, \beta - 1\}$. Se tiene que*

$$\mathcal{C}(\beta, \alpha) = \bigcap_{m \in \omega} E_m.$$

En los casos en que $\alpha = 0$ o $\alpha = \beta - 1$, durante la construcción de los conjuntos, se obtiene puntos aislados, como se puede observar en la Figura 2.3. Por esta razón, tenemos las hipótesis colocadas en el teorema precedente son necesarias, para confirmar esto, se presenta la siguiente proposición.

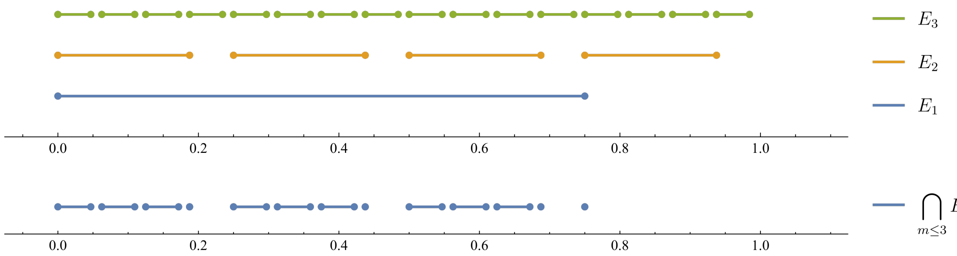

Figura 2.3: Primeros pasos de la construcción para $\beta = 4$ y $\alpha = \beta - 1 = 3$.

Proposición 4. *Sean $\beta \in \omega$, tal que $\beta \geq 3$. Si $\alpha = 0$ o $\alpha = \beta - 1$ entonces $\bigcap_{m \in \omega} E_m \neq \mathcal{C}(\beta, \alpha)$; es más, se tiene que*

1. $\frac{1}{\beta} \in \bigcap_{m \in \omega} E_m$ *pero* $\frac{1}{\beta} \notin \mathcal{C}(\beta, 0)$;
2. $\frac{\beta-1}{\beta} \in \bigcap_{m \in \omega} E_m$ *pero* $\frac{\beta-1}{\beta} \notin \mathcal{C}(\beta, \beta - 1)$.

Demostración: De [6] sabemos que para todo $x \in [0, 1]$, x tiene a lo más dos β-expansiones, es más, si posee dos β-expansiones, una de ellas termina con una cola de ceros, mientras que la otra, con una cola de $\beta - 1$. Con esto en mente, tenemos los siguiente:

1. Para $\frac{1}{\beta}$, se tiene que sus dos β-expansiones son

$$(1, 0, 0, 0, \ldots) \qquad \text{y} \qquad (0, \beta - 1, \beta - 1, \beta - 1, \ldots);$$

por lo tanto, $\frac{1}{\beta} \notin \mathcal{C}(\beta, 0)$.

Por otro lado, para $m \in \omega$, con $m \neq 0$, tomemos $k = \beta^{m-1} - 1$, tenemos que $k \in \beta^m$; además, $k \not\equiv \beta - 1 \pmod{\beta}$, pues, de no ser así, existiría $j \in \beta^{m-1}$ tal que $\beta^{m-1} - 1 = \beta j$, con ello $j = \beta^{m-2} - \frac{1}{\beta}$ lo que implicaría que $j \notin \omega$, lo cual es contradictorio. Así $k \in \beta^m_\alpha$. Finalmente, notemos que

$$\left[\frac{k}{\beta^m}, \frac{k+1}{\beta^m}\right] = \left[\frac{\beta^{m-1} - 1}{\beta^m}, \frac{1}{\beta}\right],$$

de donde, $\frac{1}{\beta} \in \left[\frac{k}{\beta^m}, \frac{k+1}{\beta^m}\right]$ y, por lo tanto, $\frac{1}{\beta} \in E_m$. Así, se concluye que $\frac{1}{\beta} \in \bigcap_{m \in \omega} E_m$.

2. Para $\frac{\beta-1}{\beta}$, se tiene que sus dos β-expansiones son

$$(\beta - 1, 0, 0, 0, \ldots) \qquad \text{y} \qquad (\beta - 2, \beta - 1, \beta - 1, \beta - 1, \ldots);$$

por lo tanto, $\frac{\beta-1}{\beta} \notin \mathcal{C}(\beta, \beta - 1)$.

Por otro lado, para $m \in \omega$, con $m \neq 0$, tomemos $k = (\beta - 1)\beta^{m-1}$, de manera análoga al caso anterior, obtenemos que $k \in \beta^m_\alpha$. Finalmente, notemos que

$$\left[\frac{k}{\beta^m}, \frac{k+1}{\beta^m}\right] = \left[\frac{\beta - 1}{\beta}, \frac{(\beta - 1)\beta^{m-1} + 1}{\beta^m}\right],$$

de donde, $\frac{\beta-1}{\beta} \in \left[\frac{k}{\beta^m}, \frac{k+1}{\beta^m}\right]$ y, por lo tanto, $\frac{\beta-1}{\beta} \in E_m$. Así, se concluye que $\frac{\beta-1}{\beta} \in \bigcap_{m \in \omega} E_m$.

Ahora, teniendo el resultado del Teorema 1, podemos demostrar que los conjuntos definidos son, en efecto, conjuntos de Cantor, para esto, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2. *Sean $\beta \in \omega$, tal que $\beta \geq 3$, y $\alpha \in \beta \setminus \{0, \beta-1\}$. Se tiene que $\mathcal{C}(\beta,\alpha)$ es un conjunto de Cantor.*

Demostración: Dividiremos la demostración en cuatro partes:

1. *Cerrado:* por el Teorema 1, $\mathcal{C}(\beta,\alpha)$ es la intersección de uniones finitas de conjuntos cerrados; así, es también cerrado y, por lo tanto, $\mathcal{C}(\beta,\alpha) = \overline{\mathcal{C}(\beta,\alpha)}$
2. *Denso en ninguna parte:* utilizando el literal anterior, es suficiente demostrar que $\operatorname{int}(\mathcal{C}(\beta,\alpha)) = \varnothing$, para ello vamos a demostrar que $\bigcap\limits_{m\in\omega} E_m$ no contiene intervalos abiertos. Sea $I \subseteq \mathcal{I}$ un intervalo abierto tal que $\lambda(I) = \gamma$. Tomemos $n \in \omega$ tal que $\frac{1}{\beta^n} < \gamma$. Dado que E_n es la unión de intervalos cuya medida de Lebesgue es $\frac{1}{\beta^n}$, a cada uno de ellos le denominaremos componentes de E_n. Ahora, sea $L \subseteq E_n$ un componente de E_n, notemos que $\lambda(L) < \gamma$. Dado que la medida de L es menor que la de I, tenemos que $I \nsubseteq L \subseteq E_n$ y, con ello,
$$I \nsubseteq \bigcap_{m\in\omega} E_m.$$
Así, como $\mathcal{C}(\beta,\alpha) \subseteq \bigcap_{m\in\omega} E_m$, tenemos que $\mathcal{C}(\beta,\alpha)$ no contiene intervalos abiertos, es decir, $\operatorname{int}(\mathcal{C}(\beta,\alpha)) = \varnothing$.
3. *Perfecto:* dado que $\mathcal{C}(\beta,\alpha)$ es cerrado, basta demostrar que $\mathcal{C}(\beta,\alpha) \subseteq \mathcal{C}(\beta,\alpha)'$. Sea $x \in \mathcal{C}(\beta,\alpha)$ y $\epsilon > 0$, tomemos $m \in \omega$ tal que $\dfrac{2}{\beta^m} < \epsilon$. Como $x \in \mathcal{C}(\beta,\alpha)$, existe $(x_n)_{n\in\omega} \in (\beta \setminus \{\alpha\})^\omega$ tal que $x = \sum\limits_{n\in\omega} \dfrac{x_n}{\beta^{n+1}}$. Definamos, para $n \in \omega$,
$$y_n = \begin{cases} z & \text{si } n = m+1, \\ x_n & \text{si } n \neq m+1, \end{cases}$$
donde $z \in \beta$ es tal que $z \neq x_{m+1}$ y $z \neq \alpha$. Con esto, tomemos $y = \sum\limits_{n\in\omega} \dfrac{y_n}{\beta^{n+1}}$, tenemos que $y \in \mathcal{C}(\beta,\alpha) \setminus \{x\}$; además,
$$|x-y| = \left| \frac{x_{m+1}}{\beta^{m+2}} - \frac{z}{\beta^{m+2}} \right| < \frac{2\beta}{\beta^{m+2}} = \frac{2}{\beta^m} < \epsilon.$$
Así, $\mathcal{C}(\beta,\alpha)$ es perfecto.
4. *Acotado:* dado que $\mathcal{C}(\beta,\alpha) \subseteq \mathcal{I}$, se tiene que $\mathcal{C}(\beta,\alpha)$ es un conjunto acotado.

De aquí, concluimos que $\mathcal{C}(\beta,\alpha)$ es un conjunto de Cantor.

Dada la existencia de los denominados conjuntos *fat Cantor* [7, pag. 185], que son conjuntos de Cantor de medida diferente de 0, cabe calcular la medida de los conjuntos que hemos definido, obteniendo en los siguientes resultados que, los conjuntos definidos tiene medida nula, es decir no son conjuntos *fat Cantor*.

Proposición 5. *Sean $\beta \in \omega$, tal que $\beta \geq 3$, y $\alpha \in \beta$. Se tiene que $\bigcap\limits_{m\in\omega} E_m$ es de medida nula.*

Demostración: Definamos $T_0 = \mathcal{I}$, $T_m = E_m \cap E_{m-1}$ para todo $m \geq 1$. Así, tenemos que
$$\bigcap_{m\in\omega} E_m = \bigcap_{m\in\omega} T_m$$
y, además, por la construcción realizada, tenemos que la sucesión $(T_n)_{n\in\omega}$ es decreciente.

Por otro lado, podemos demostrar (utilizando inducción) que, para cada $m \in \omega$, T_m está conformado por $(\beta-1)^m$ intervalos de longitud $\dfrac{1}{\beta^m}$; con esto,
$$\lambda(T_m) = \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^m$$
para todo $m \in \omega$.

Así, tenemos que
$$\lambda\left(\bigcap_{m\in\omega} E_m\right) = \lambda\left(\bigcap_{m\in\omega} T_m\right) = \lim_{m\to+\infty} \lambda(T_m) = \lim_{m\to+\infty} \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^m = 0.$$

De aquí, junto a la Proposición 2, se obtiene directamente el siguiente corolario.

Corolario 1. *Sean $\beta \in \omega$, tal que $\beta \geq 3$, y $\alpha \in \beta$. Se tiene que $\mathcal{C}(\beta,\alpha)$ es de medida nula.*

3. Extensión de la generalización de conjuntos de Cantor. Sea $\beta \in \omega$ tal que $\beta \geq 3$. En la sección anterior, definimos los conjuntos de todos los elementos de $\mathcal{I}$ tales que tienen una β-expansión en la cual no aparece un número dado. En esta sección, analizaremos algunas características de cuando, en lugar de exigir que no aparezca un número dado, exigimos que no aparezca un conjunto de números en la β-expansión.

Definición 3. *Sean $\beta \in \omega$, tal que $\beta \geq 3$, y $J \subseteq \beta$, definamos*

$$\mathcal{C}(\beta, J) = T\left((\beta \smallsetminus J)^{\omega}\right) = \left\{ \sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} : (x_n)_{n\in\omega} \in (\beta \smallsetminus J)^{\omega} \right\},$$

es decir, el conjunto de todos los elementos de $\mathcal{I}$ tales que tienen una β-expansión en la cual los elementos de J no aparecen en ella.

Notemos que si $\alpha \in \beta$ y definimos $J = \{\alpha\}$, entonces

$$\mathcal{C}(\beta, \alpha) = \mathcal{C}(\beta, J).$$

Una pregunta que nace luego de esto es si, para $J \subseteq \beta$, puedo construir $\mathcal{C}(\beta, J)$ a partir de la familia $\{\mathcal{C}(\beta, \alpha)\}_{\alpha\in J}$. Notemos los siguientes resultados.

Proposición 6. *Sea $J \subseteq \beta$. Se tiene que*

$$\mathcal{C}(\beta, J) \subseteq \bigcap_{\alpha\in J} \mathcal{C}(\beta, \alpha).$$

Demostración: Sea $x \in \mathcal{C}(\beta, J)$, así, existe $(x_n)_{n\in\omega} \in (\beta \smallsetminus J)^{\omega}$ tal que

$$x = \sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{\beta^{n+1}}.$$

Sea $\alpha \in J$, como $x_m \notin J$ para todo $m \in \omega$, tenemos que $x_m \neq \alpha$ para todo $m \in \omega$, de donde $x \in \mathcal{C}(\beta, \alpha)$. Así, $x \in \bigcap_{\alpha\in J} \mathcal{C}(\beta, \alpha)$.

Por otro lado, podemos notar que la inclusión contraria, en general, no se da. Por ejemplo, tomando $\beta = 4$ y $J = \{1, 2\}$, tenemos que $\frac{2}{4} \in \bigcap_{\alpha\in J} \mathcal{C}(4, \alpha)$ pero $\frac{2}{4} \notin \mathcal{C}(4, J)$. En efecto, notemos que las dos expansiones de $\frac{2}{4}$ en base 4 son

$$(2, 0, 0, 0, \ldots) \qquad \text{y} \qquad (1, 3, 3, 3, \ldots);$$

por lo tanto, $\frac{2}{4} \in \mathcal{C}(4, 1) \cap \mathcal{C}(4, 2)$ pero $\dfrac{2}{4} \notin \mathcal{C}(4, J)$.

Ya que, en general, no es posible construir $\mathcal{C}(\beta, J)$ a partir de la familia $\{\mathcal{C}(\beta, \alpha)\}_{\alpha\in J}$, cabe preguntarnos si es posible construir el conjunto $\mathcal{C}(\beta, J)$ retirando sucesivamente intervalos a partir de $\mathcal{I}$; es decir, tener un resultado análogo al Teorema 1. Para esto, definamos $F_0 = \mathcal{I}$ y, para $m \geq 1$, tomemos $A_{k,m} = \left[\dfrac{k}{\beta^m}, \dfrac{k+1}{\beta^m}\right]$ y $F_m = \bigcup_{k\in\beta_J^m} A_{k,m}$, donde $\beta_J^m = \bigcap_{\alpha\in J} \beta_\alpha^m$. Con esto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 7. *Sean $\beta \in \omega$, tal que $\beta \geq 3$, y $J \subseteq \beta$. Se tiene que*

$$\mathcal{C}(\beta, J) \subseteq \bigcap_{m\in\omega} F_m.$$

Demostración: Sea $x \in C(\beta, J)$, tenemos que existe $(x_n)_{n\in\omega} \in (\beta \smallsetminus J)^{\omega}$ tal que

$$x = T((x_n)_{n\in\omega}) = \sum_{m\in\omega} \frac{x_n}{\beta^{n+1}};$$

demostremos que $x \in \bigcap_{m\in\omega} F_m$. Como $x_n \in \beta$ para todo $n \in \omega$, tenemos:

$$0 \leq \sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{\beta^{n+1}} \leq \sum_{n\in\omega} \frac{\beta - 1}{\beta^{n+1}} = 1;$$

por lo tanto, $x \in F_0$. Ahora, sea $m \in \omega$, con $m \geq 1$, vamos a demostrar que $x \in F_m = \bigcup_{k \in \beta_J^m} A_{k,m}$.

Definamos

$$k = \sum_{n=0}^{m-1} \beta^{m-1-n} x_n,$$

análogamente a lo realizado en la demostración de la Proposición 2, tenemos que $1 \leq k \leq \beta^m - 1$. Ahora, por reducción al absurdo, supongamos que existen $l \in \beta^{m-1}$ y $\alpha \in J$ tales que $k - \alpha = l\beta$, nuevamente, de manera análoga a la demostración de la Proposición 2, tenemos que esto no es posible, por lo tanto, $k \not\equiv \alpha \pmod{\beta}$ y, dado que α era arbitrario, $k \in \beta_J^m$. Finalmente, tenemos que $x \in \left[\frac{k}{\beta^m}, \frac{k+1}{\beta^m}\right]$ (ver demostración de la Proposición 2). Con ello tenemos que $x \in F_m$ para todo $m \in \omega$. Así, concluimos que $\mathcal{C}(\beta, J) \subseteq \bigcap_{m \in \omega} F_m$.

Para demostrar la otra inclusión, debemos incluir hipótesis adicionales, tal como en la sección anterior.

Proposición 8. *Sean $\beta \in \omega$, tal que $\beta \geq 3$, y $J \subseteq \beta \smallsetminus \{0, \beta - 1\}$. Se tiene que*

$$\bigcap_{m \in \omega} F_m \subseteq \mathcal{C}(\beta, J).$$

Demostración: La demostración es análoga a la demostración de la Proposición 2.

Con esto, de las Proposiciones 7 y 8, se obtiene directamente el siguiente teorema.

Teorema 3. *Sean $\beta \in \omega$, tal que $\beta \geq 3$, y $J \subset \beta \smallsetminus \{0, \beta - 1\}$. Se tiene que*

$$\mathcal{C}(\beta, J) = \bigcap_{m \in \omega} F_m.$$

Además, considerando la Proposición 4, tenemos que la hipótesis de que J no contenga a 0 ni a $\beta - 1$ es esencial.

Por otro lado, gracias al Teorema 3, tenemos que estos conjuntos son conjuntos de Cantor.

Proposición 9. *Sean $\beta \in \omega$, tal que $\beta \geq 3$, y $J \subseteq \beta \smallsetminus \{0, \beta - 1\}$. Se tiene que $\mathcal{C}(\beta, J)$ es un conjunto de Cantor.*

Demostración: Dividiremos la demostración en cuatro partes.

1. *Cerrado:* por el Teorema 3, $\mathcal{C}(\beta, J)$ es la intersección de uniones finitas de conjuntos cerrados; así, es también cerrado y, por lo tanto, $\mathcal{C}(\beta, J) = \overline{\mathcal{C}(\beta, J)}$.
2. *Denso en ninguna parte:* sea $\alpha \in J$, como $\mathcal{C}(\beta, J) \subseteq \mathcal{C}(\beta, \alpha)$, y $\mathcal{C}(\beta, \alpha)$ es denso en ninguna parte por el Teorema 2, concluimos que $\mathcal{C}(\beta, J)$ es denso en ninguna parte.
3. *Perfecto:* análogo a la demostración del Teorema 2, tomando $z \neq y_{m+1}$ y $z \neq \alpha$ para todo $\alpha \in J$, como $|J| < \beta - 1$, es posible tomar z que cumpla estas condiciones.
4. *Acotado:* dado que $\mathcal{C}(\beta, J) \subseteq \mathcal{I}$, se tiene que $\mathcal{C}(\beta, J)$ es un conjunto acotado.

De aquí, concluimos que $\mathcal{C}(\beta, J)$ es un conjunto de Cantor.

Para terminar, notemos que $\mathcal{C}(\beta, J)$ también tiene medida nula, pues, por la Proposición 6, están contenidos en conjuntos de medida nula.

Proposición 10. *Sean $\beta \in \omega$, tal que $\beta \geq 3$, y $J \subseteq \beta$. Se tiene que $\mathcal{C}(\beta, J)$ es de medida nula.*

4. Conclusiones.

- Dados $\beta \in \omega$ tal que $\beta \geq 3$ y $\alpha \in \beta \smallsetminus \{0, \beta - 1\}$, tenemos que $\mathcal{C}(\beta, \alpha)$ puede ser construido partiendo el intervalo $\mathcal{I}$ en β partes iguales y retirando la parte $(\alpha + 1)$-ésima. Más aún, bajo las mismas hipótesis, tenemos que $\mathcal{C}(\beta, \alpha)$ es un conjunto de Cantor de medida nula.
- Dados $\beta \in \omega$ tal que $\beta \geq 3$ y $J \subseteq \beta \smallsetminus \{0, \beta - 1\}$, se tiene que $\mathcal{C}(\beta, J)$ puede ser construido partiendo el intervalo $\mathcal{I}$ en β partes iguales y retirando la parte $(\alpha + 1)$-ésima para todo $\alpha \in J$. Análagomente, bajo las mismas hipótesis, tenemos que $\mathcal{C}(\beta, J)$ es un conjunto de Cantor de medida nula.
- Dados $\beta \in \omega$ tal que $\beta \geq 3$ y $\alpha \in \{0, \beta - 1\}$, tenemos que $\mathcal{C}(\beta, \alpha)$ no puede ser construido partiendo el intervalo $\mathcal{I}$ en β partes iguales y retirando la parte $(\alpha + 1)$-ésima. Además, no es perfecto pues tiene puntos aislados. Para un trabajo futuro, se podría analizar si eliminando los puntos aislados, es decir, tomando su derivado, este es perfecto y coincide con la construcción planteada.

5. Agradecimientos. El presente artículo se lo terminó de escribir durante la cuarentena establecida por la pandemia COVID-19.

ORCID and License
Andrés Merino https://orcid.org/0000-0002-5404-918X
Sebastián Heredia F. https://orcid.org/0000-0003-0604-1244

Referencias

[1] Cantor G. Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situes dans un espace continu à N dimensions. Acta Math Djursholm. 1883; 2:409–414.
[2] Bresoud D. A Radical Approach to Lebesgue's Theory. New York: Cambridge University Press; 2008.
[3] Dasgupta A. Set Theory with an Introduction to Real Point Sets. New York: Springer; 2013.
[4] Rényi A. Representations for real numbers and their ergodic properties. Acta Math Acad Sci H. 1957; 8(3):477–493.
[5] Cantor G. De la puissance des ensembles parfaits de points. Acta Math Djursholm. 1884; 4(1):381–392.
[6] de Vries M, Komornik V. Unique expansions of real numbers. Adv Math. 2009; 221:390–427.
[7] Vallin R. The Elements of Cantor Sets: With Applications. New Jersey: John Wiley and Sons; 2013.