

La influencia de las características diagramáticas de los dibujos de los estudiantes en la matematización para la resolución de problemas geométricos

The influence of the schematic characteristics of the students' drawings on mathematization for solving geometry problems

Manuel Ponce de León Palacios,¹ José Antonio Juárez López²

Resumen: Un número significativo de estudios ha encontrado que el uso de las representaciones gráficas tiene el potencial de contribuir al éxito en la resolución de problemas de matemáticas. Sin embargo, los resultados de las investigaciones también apuntan a que el uso efectivo de estas representaciones depende de ciertas condiciones específicas. A partir de ello, se establece como un campo de oportunidad para la investigación el conocer más sobre estas condiciones particulares. El objetivo de esta investigación fue analizar la influencia que tienen las características de las representaciones gráficas producidas por los estudiantes en su desempeño al resolver problemas de modelización matemática. Para llevar a cabo la indagación se analizaron los dibujos realizados por 63 estudiantes de primero de secundaria de una escuela en México al resolver problemas geométricos de modelización. En el estudio se aplicaron un conjunto de herramientas de análisis dirigidas a la clasificación de las representaciones gráficas y su implicación en las estrategias y procesos de solución. Los resultados mostraron evidencia de una relación relevante entre

Fecha de recepción: 13 de junio de 2020. **Fecha de aceptación:** 5 de mayo de 2022.

¹ Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla, manuel.poncedeleon@upaep.mx, orcid.org/0000-0002-3937-5147

² Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, jajul@fcfm.buap.mx, orcid.org/0000-0003-2501-943X

las características de los dibujos de los estudiantes y la planeación y ejecución de métodos para la solución del problema.

Palabras clave: *Educación matemática, representaciones, geometría, problemas verbales, modelización matemática*

Abstract: A significant number of studies have found that the use of graphical representations can contribute to success in solving math problems. However, research results also suggest that the effective use of these representations depends on certain specific conditions. From this, it is established as a field of opportunity for research to learn more about these particular conditions. This research's objective was to analyze the influence that the characteristics of the students' graphic representations have on their performance when solving mathematical modelling problems. To carry out the investigation, we analyzed the drawings made by 63 seventh grade students from a school in Mexico when solving geometric modelling problems. In the study, we applied a set of analysis tools to classify graphic representations and their involvement in solution strategies and processes. The results showed evidence of a relevant relationship between the characteristics of the students' drawings and the planning and execution of solving methods.

Keywords: *Mathematics Education, representations, geometry, word problems, mathematical modeling*

INTRODUCCIÓN

Resolver problemas de matemáticas es un proceso de etapas (Polya, 1965) donde comprender el problema y establecer un plan de acción son elementos clave para el éxito. La comprensión del problema se refleja en la construcción de un modelo mental sobre la situación (comprender lo que el enunciado del problema describe) paso que es fundamental para los procesos posteriores de solución (Leiss *et al.*, 2010). Este modelo mental sobre la situación facilita la transición hacia la matematización, donde se llevará a cabo la traducción de esta realidad en términos matemáticos.

Ahora bien, cabe resaltar que la matematización y los procesos asociados requieren de un conjunto de competencias específicas por parte de los estudiantes para completarse de manera efectiva. Entre estas competencias específicas para resolver problemas verbales con éxito a través de este proceso de comprensión se encuentran las relacionadas con la representación. Las competencias de representación se manifiestan en la capacidad de construirlas con ciertas características que las hacen efectivas (Rellensmann *et al.*, 2016) así como transitar entre diferentes clases o registros (Duval, 2006) considerando las condiciones del problema.

La capacidad que el estudiante tenga de construir modelos adecuados y de expresarlos a través de sus respectivas representaciones tendrá una influencia importante en su proceso de matematización. Entre las diferentes formas que tiene el estudiante de representar gráficamente se encuentran los dibujos (a diferencia de otro tipo de representaciones como símbolos, letras y numerales). Los dibujos, como representaciones gráficas realizadas por el estudiante, pueden ser de gran ayuda para comprender y resolver problemas verbales de matemáticas. Sin embargo, los estudiantes deben poseer un conjunto de conocimientos específicos para sacar el máximo provecho del uso de los dibujos como una herramienta de apoyo en la resolución de problemas (Schnotz, 2002).

A pesar de que los dibujos tienen el potencial de ser útiles para los procesos de solución de problemas verbales de matemáticas, un gran número de estudiantes tiene dificultades para hacer un uso eficaz de estos en el contexto de la resolución de problemas matemáticos, principalmente debido a la falta de conocimientos específicos (Schnotz, 2002). De igual forma, la costumbre de trabajar con modelos de naturaleza mecanicista (Dewolf *et al.*, 2014) y el peso del contrato didáctico en la solución de problemas de matemáticas (Brousseau, 1988; D'Amore, 2011) que se enfoca en la capacidad de resolver operaciones, dificulta el uso práctico de las representaciones gráficas.

Por lo anterior, se presenta como relevante desarrollar estrategias de procesamiento de información derivadas de la integración de textos e imágenes. Este desarrollo debe producirse sistemáticamente en la educación matemática, ya que a veces, los estudiantes carecen de las estrategias pertinentes para la integración de la información textual y gráfica (Hochpöchler *et al.*, 2013).

ANTECEDENTES TEÓRICOS

De acuerdo con Borromeo Ferri (2015) la modelización matemática es un proceso por el cual se conecta el mundo real y las matemáticas en ambas direcciones: consiste en traducir la realidad en términos matemáticos y finalmente llevar los resultados de regreso a la realidad para darles sentido. El proceso de modelización es una actividad cognitivamente demandante ya que involucra un conjunto amplio de competencias (Niss y Højgaard, 2011). Al llevar a cabo esta tarea los estudiantes ponen en juego conocimientos, tanto sobre el mundo real como sobre las matemáticas (Blum, 2014), y requieren habilidades como comprensión lectora y representación efectiva.

Según Leiss *et al.* (2010) el ciclo de modelización matemática, desde el punto de vista cognitivo, tiene siete transiciones: (1) comprensión de la tarea, (2) simplificación y estructuración, (3) matematización, (4) trabajo matemático, (5) interpretación, (6) validación y (7) presentación. En este modelo del ciclo de modelización matemática, el puente que conecta el dominio real con el matemático es la transición llamada matematización, que se produce entre lo que se ha llamado el modelo real y el modelo matemático.

El modelo real es el resultado de un proceso de simplificación y estructuración, que incluye la aplicación de supuestos y la selección de datos relevantes (Borromeo Ferri, 2006). Por lo tanto, esta transición es un momento crucial en la resolución de problemas matemáticos. Si los estudiantes no cruzan este puente correctamente, tendrán problemas para poder hacer matemáticas de manera efectiva. Es por la relevancia de este momento en la secuencia del proceso de modelización, que resulta útil estudiar los procesos, elementos y condiciones que operan en este cambio de fase y que permiten construir un modelo matemático sólido a partir de la elaboración del modelo real (Galbraith y Stillman, 2006; Juárez *et al.*, 2014; Maaß, 2006).

Como observa Borromeo Ferri (2006) la transición de la matematización y sus procesos previos requieren un dominio mínimo de conocimientos extramatemáticos (CEM), es decir, aquellos conocimientos que van más allá de las matemáticas, pero que resultan necesarios para construir un modelo real y por lo tanto matemático del problema.

Este requisito implica que los CEM y sus respectivos productos sean esenciales para la construcción del modelo matemático. Dependiendo de la tarea, algunos CEM serán más útiles o necesarios que otros. Por ejemplo, en problemas donde se pide encontrar el área de figuras geométricas, parece haber beneficios

importantes en la aplicación de representaciones gráficas (dibujos), particularmente cuando estas permiten observar claramente la información que es matemáticamente relevante para hallar la solución.

En el contexto de la resolución de problemas verbales, el realizar dibujos puede ejercer una función mediadora que permite a los estudiantes “observar” objetos matemáticos que de otro modo permanecen ocultos (Arcavi, 2003). Esta capacidad de observar en el contexto de los problemas de matemáticas permite comprender mejor la situación y la tarea, así como identificar los objetos y conceptos matemáticos implicados.

La construcción de dibujos que resulten efectivos en el contexto de la resolución de problemas de matemáticas implica poner en juego un conjunto de conocimientos y herramientas cognitivas específicas (Schnotz, 2014). La aplicación efectiva de representaciones gráficas generadas por estudiantes para la resolución de un problema complejo requiere cumplir con ciertas condiciones mínimas de relación con el mundo, con la situación y con las matemáticas; en términos específicos, un dibujo será efectivo para hacer matemáticas en tanto corresponda con el enunciado del problema, represente de manera adecuada la estructura matemática de los objetos y sus relaciones y, cuente con un grado de abstracción mínimo para visualizar únicamente información que es matemáticamente relevante (Ott, 2016).

El uso de representaciones gráficas para la resolución de problemas matemáticos no siempre se relaciona con un mejor desempeño. Como se muestra en los estudios, es importante considerar el tipo de problema y el tipo de representaciones que se utilizan (Hegarty y Kozhevnikov, 1999; Ott, 2017; Rellensmann *et al.*, 2016). En este sentido, las representaciones diagramáticas han demostrado ser más útiles ya que presentan selectivamente información que es relevante para resolver problemas y omiten detalles que no contribuyen a la matematización (Hegarty y Kozhevnikov, 1999). Las representaciones diagramáticas permiten al estudiante identificar más fácilmente la información que es relevante y cómo usarla; es decir, tienen una contribución más directa en la comprensión y resolución del problema.

Con el apoyo de representaciones diagramáticas gráficas, el estudiante debería ser capaz de avanzar hacia una interpretación más profunda y precisa del problema. En el caso específico de la geometría, este ejercicio debe llevar a los estudiantes desde la identificación de objetos solo por su forma, (Nivel 1 de van Hiele), hasta el reconocimiento de sus propiedades (Clements y Battista, 1992). Es decir, en la tarea de resolver problemas el uso de representaciones gráficas

adecuadas permitiría establecer una relación con los procesos de matematización y no únicamente con los de identificación.

MÉTODO

Pregunta principal

La pregunta principal de este estudio fue: ¿Cómo influyen las características de los dibujos que producen los estudiantes en los procesos de matematización cuando resuelven problemas geométricos de modelización? Para responder se realizó un estudio cualitativo analizando los dibujos realizados por estudiantes al resolver un problema de área y su desempeño en el proceso de modelización matemática mediante la aplicación de una hoja de trabajo.

PARTICIPANTES

Fueron 63 estudiantes de primero de secundaria (7o grado) de una escuela privada en México en el último mes del año escolar. Los sujetos tenían cierta experiencia con el uso de dibujos ya que, al resolver problemas matemáticos, los maestros suelen recomendar que hagan un dibujo para comprender la situación del problema. Del mismo modo, la escuela utiliza un modelo para la enseñanza que establece que los pasos para resolver un problema son: (1) obtener los datos de un texto y resolver, (2) utilizar un diagrama o un dibujo para resolver un problema gráficamente y (3) obtener los datos del dibujo para resolver un problema. Los estudiantes conocen la fórmula del área de un círculo y han trabajado problemas en este tema, tanto en la clase como en los exámenes.

MATERIAL

La hoja de trabajo

Con el fin de diseñar un instrumento que fuera adecuado y útil para la investigación, se revisaron previamente los materiales de clase con los que han trabajado los participantes. En el análisis se tomaron en cuenta los conceptos que manejan los estudiantes, el tipo de problemas que resuelven en clase y la demanda cognitiva con la que están habituados a trabajar.

Para la recolección de los datos, se diseñó y aplicó a los participantes una hoja de trabajo con un problema de área. La hoja contenía el enunciado del problema, un espacio para anotaciones y dibujos, y otro espacio para las operaciones y la solución. Las instrucciones escritas indicaban tres cosas: (1) leer el problema cuidadosamente, (2) resaltar la respuesta correcta y (3) escribir la validación de su respuesta.

El problema aplicado en la investigación es una versión adaptada del enunciado “el chivo atado” (Boaler, 2016). Este problema fue seleccionado a partir de sus características, ya que su resolución requiere que el estudiante ponga a trabajar su razonamiento y aplique estrategias.

El planteamiento del problema no presenta la figura geométrica de manera explícita, sino que esta resulta de la interacción entre los elementos enlistados en el enunciado. En estos casos, el estudiante debe completar la estructura de la situación haciendo uso de una combinación de conocimientos matemáticos y extramatemáticos. Con conocimientos extramatemáticos nos referimos a aquellos que van más allá de la disciplina matemática, por ejemplo, el saber de qué forma se mueve un animal cuando está atado a un punto fijo. Este tipo de problemas resultan particularmente útiles para observar el uso estratégico que los estudiantes hacen de las representaciones gráficas.

A partir de este proceso de recolección de datos se obtuvieron las representaciones gráficas de la situación (dibujos y sus etiquetas), el modelo matemático construido, las operaciones realizadas y la redacción de validación de respuesta.

El problema

El enunciado del problema incluido en la hoja de trabajo es el siguiente:

Un borrego está atado a la esquina de un granero cuadrado de 4 x 4 metros. ¿Cuál es el área máxima que el borrego puede pastar si la cuerda tiene una longitud de 3 metros? Nota: el borrego únicamente puede moverse fuera del granero y no sobre él.

Para la respuesta se utilizó un formato de opción múltiple. La hoja de trabajo presentaba cuatro opciones de respuesta: una correcta y tres distractores.

Procedimiento

La escuela cuenta con tres grupos de tercero de secundaria (7º grado). La hoja de trabajo se aplicó sin un proceso de intervención previo a 63 estudiantes en tres sesiones (una por cada grupo). Los estudiantes tuvieron un total de 28 minutos para completar la resolución del problema.

Estrategia de análisis

Para observar evidencias de la relación entre las características de los dibujos y el desempeño en modelización matemática se utilizaron un conjunto de herramientas de análisis, prestando especial atención a los procesos de representación y matematización.

En el proceso de análisis de los datos, se delimitaron cinco componentes para la revisión de las respuestas en las hojas de trabajo: (1) respuesta elegida, (2) validación por escrito, (3) uso explícito de la fórmula, (4) operaciones realizadas, (5) dibujos y sus características. Posteriormente, se aplicaron las herramientas de análisis para el proceso de categorización.

Categorías de análisis

Para este estudio, se definieron cuatro categorías de análisis agrupadas en dos dimensiones. Las dos grandes dimensiones son las características de los dibujos y la modelización matemática. La dimensión de las características de los dibujos se centró en describir las características de los dibujos y sus relaciones a través de tres categorías: la estructura matemática, la correspondencia informacional y el grado de abstracción. Con la dimensión de modelización matemática se buscó evaluar el desempeño de los estudiantes en este proceso a través de la categoría correspondiente. Es importante mencionar que después del análisis individual por categoría se llevó a cabo un análisis cruzado para observar las relaciones entre las categorías. En la tabla 1 se presenta la organización de las dimensiones de análisis, sus respectivas categorías, indicadores e instrumentos.

Tabla 1. Categorías de análisis (Ott, 2017; Rellensmann, 2016)

Dimensión	Categoría	Indicador	Instrumento / ítem
Características de los dibujos	Estructura matemática	Clasificación de los dibujos con respecto a sus características a partir de los niveles jerárquicos de Ott (2017)	Hoja de trabajo / sección de dibujos
	Correspondencia informacional	Nivel de relación entre los dibujos y la información del enunciado verbal del problema en cuanto a valores, unidades y operaciones.	Hoja de trabajo / sección de dibujos
	Grado de abstracción	Nivel de abstracción de a) los objetos representados y b) las relaciones representadas	Hoja de trabajo / sección de dibujos
Modelización matemática	Desempeño en la modelización matemática	Nivel de desempeño en modelización matemática considerando la construcción correcta del modelo matemático y la respuesta correcta a partir de la herramienta de Rellensmann (2016)	Hoja de trabajo / sección de operaciones

Herramientas de análisis

Los dibujos generados por los estudiantes se procesaron aplicando las herramientas de análisis propuestas por Ott (2017) y Rellensmann *et al.* (2016). La propuesta de clasificación de representaciones gráficas de Ott (2017) se compone de tres categorías de análisis: la estructura matemática, la correspondencia informacional y el grado de abstracción.

Las herramientas de clasificación de Ott (2017) se centran en las características de los dibujos de los objetos y la relación que guardan con la estructura matemática y la información del problema. La clasificación de la estructura matemática se propone a través de una revisión de seis niveles jerárquicos que se determinan de acuerdo con las características de los dibujos: cuando no se trata de una representación gráfica se clasifica como (1) no gráfico (figura 2), cuando el dibujo no guarda relación con el texto del enunciado del problema verbal se clasifica como (2) fuera del texto (por ejemplo, que el dibujo incluyera

un automóvil cuando el problema trata de un borrego); cuando tiene relación con el enunciado del problema, pero no incluye los elementos estructuralmente relevantes para la resolución del problema se clasifica como (3) ilustrativo (figura 3), cuando incluye objetos estructuralmente relevantes, pero no sus relaciones, se clasifica como (4) orientado a objetos (figura 4); si incluye los objetos estructuralmente relevantes y sus relaciones se trata de un dibujo diagramático, que a su vez se clasifica considerando la inclusión explícita de información sobre estas relaciones en forma de indicaciones o texto, si no las incluye es clasificado como (5) implícitamente diagramático (figura 5), y si las incluye se trata de un dibujo (6) explícitamente diagramático.

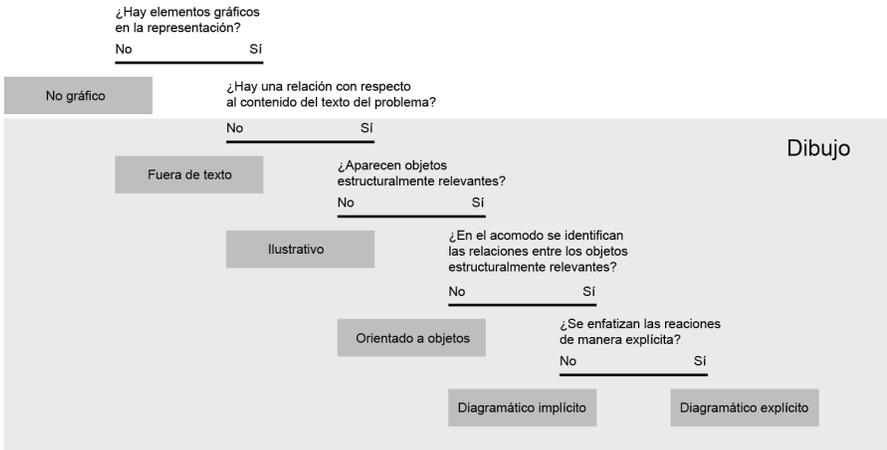


Figura 1. Clasificación de las representaciones de acuerdo con la estructura matemática (Ott, 2017).

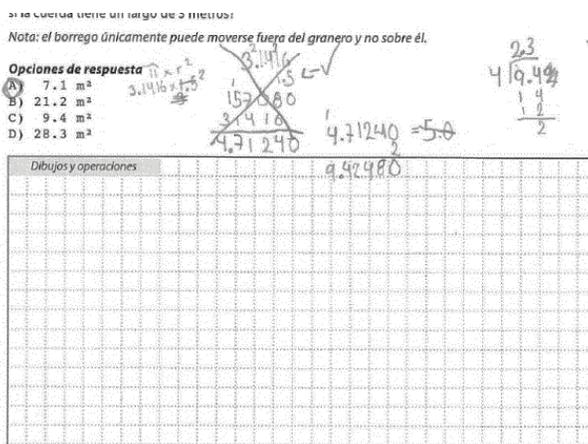


Figura 2. Ejemplo de trabajo de participante clasificado como no gráfico. Se puede notar que la estudiante únicamente realizó operaciones y no aparece ningún dibujo en el área de trabajo.

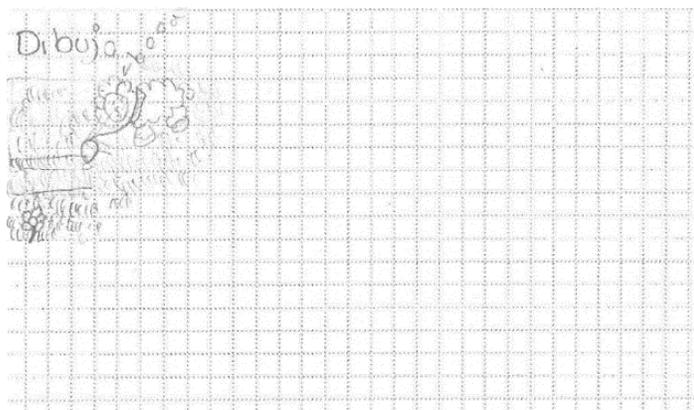


Figura 3. Ejemplo de dibujo clasificado como ilustrativo. El único que realizó la participante en el área de trabajo, solo dibuja objetos que no son matemáticamente relevantes.

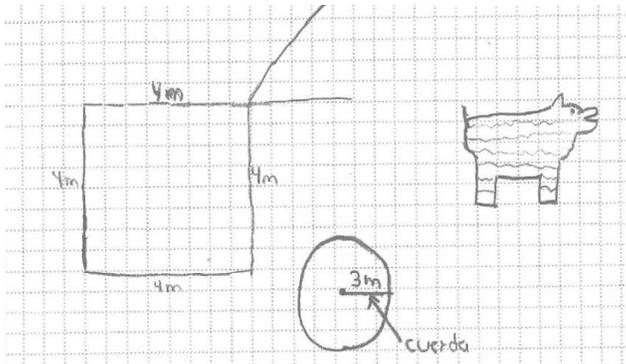


Figura 4. Ejemplo de dibujo clasificado como orientado a objetos ya que solo aparecen los objetos estructuralmente relevantes del problema por separado, sin sus relaciones.

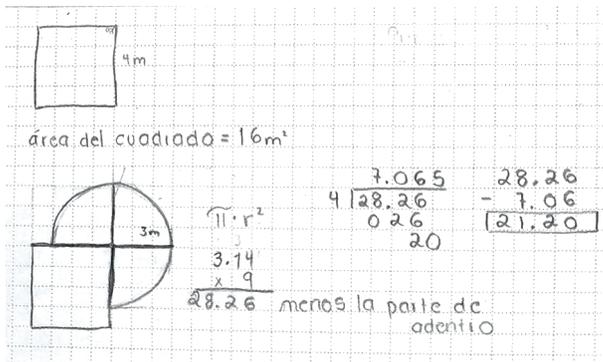


Figura 5. Ejemplo de dibujo diagramático implícito. En él aparecen representados claramente los objetos estructuralmente relevantes y sus relaciones.

Para el análisis de la correspondencia informacional, es decir, qué tanto corresponden los dibujos con la información que se presenta en el enunciado verbal del problema, se revisaron tres variables: correspondencia del valor, correspondencia de las unidades de medida y correspondencia de las operaciones. La correspondencia de valor se refiere a que las cantidades del problema corresponden a las que se representan en el dibujo. La correspondencia de las unidades de medida está relacionada con que se utilicen en los dibujos las unidades correspondientes, por ejemplo: metros cuadrados. Esto es, que, si el enunciado dice que una cuerda mide tres metros, en el dibujo se señale el objeto

que representa a la cuerda con una etiqueta que diga “3 metros” o “3 m.” La correspondencia de operaciones quiere decir que el estudiante plantea las operaciones correspondientes a lo que se describe en el enunciado. Por ejemplo, cuando un problema verbal dice en su redacción “gasta”, el estudiante lo plantea en su área de trabajo como una resta. Para la valoración de esta categoría se utilizan cuatro posibles opciones. Tres de estas opciones corresponden al nivel de correspondencia entre el dibujo y el texto con el enunciado del problema. Estas tres opciones son: “completa” (si corresponde totalmente con el enunciado), “parcial” (si corresponde únicamente parcialmente), e “inexistente” (si es que no hay correspondencia con la información del enunciado). La cuarta opción, “no se cumple”, se utiliza en caso de que no haya un dibujo con el cual realizar esta valoración de correspondencia.

El grado de abstracción se determina a partir de dos indicadores: el foco en los objetos que son estructuralmente relevantes en el dibujo, es decir, dibujos de objetos que aportan información matemáticamente relevante para la resolución del problema, y el foco en las cualidades matemáticamente relevantes de estos objetos. Ambos indicadores del grado de abstracción se valoran con un nivel de bajo o alto. Un ejemplo de grado de abstracción bajo se aprecia en la figura 3, donde se dibujaron objetos concretos con su apariencia real como el borrego y el pasto. A diferencia de esto, un ejemplo de nivel de abstracción alto se puede apreciar en la figura 5, donde aparecen objetos matemáticos abstractos como cuadrado, círculo, radio, en lugar del borrego y el pasto.

Para evaluar el desempeño en modelización se utilizó la escala propuesta por Rellensmann *et al*, (2016). Esta herramienta analítica estima la precisión de las soluciones de los participantes en una escala de tres puntos. La codificación del desempeño de evaluación de los autores considera la corrección de la respuesta y las causas de las que derivan respuestas incorrectas. La puntuación se establece de la siguiente manera: dos (2) puntos para una solución correcta del problema, un (1) punto para soluciones incorrectas derivadas únicamente de errores de cómputo y cero (0) puntos para soluciones incorrectas que resultaron de una matematización incorrecta.

RESULTADOS

A partir de la aplicación de la herramienta de análisis para evaluar el desempeño en modelización matemática propuesto por Rellensmann *et al*. (2016), 18 de los

63 estudiantes obtuvieron una puntuación máxima de dos (implicando una modelización y respuesta correctas), 23 obtuvieron una puntuación de uno y 22 obtuvieron la puntuación mínima de cero. Aunque más de 18 estudiantes seleccionaron la respuesta correcta, solo se consideraron para la puntuación máxima aquellas que incluyeron un modelo matemático u operaciones que la validaran. No se consideraron como desempeño alto en modelización los casos que obtuvieron una respuesta correcta pero que (1) no realizaron un modelo correcto, (2) llevaron a cabo estrategias alternativas que no implicaban la construcción de un modelo matemático (como la estrategia de conteo que se menciona en la sección de discusión), (3) ni los casos en los que no se incluyeron modelos ni operaciones (tabla 2).

Aunque se pidió a todos los estudiantes que argumentaran la respuesta, solo un porcentaje menor presentó una validación explícita de su estrategia de solución. Entre los 18 estudiantes que respondieron correctamente hubo quienes utilizaron diferentes estrategias en las operaciones. Una vez que aplicaron la fórmula tomaron distintos caminos para obtener las tres cuartas partes del área total del círculo. Algunos dividieron y restaron, mientras que otros dividieron y multiplicaron. Todos estos casos se consideraron en la clasificación de respuesta correcta.

Tabla 2. Desempeño en modelización

Respuesta	Total
Correcta (2 puntos)	18
Incorrecta (errores en la construcción del modelo o en las operaciones (1 punto)	22
Incorrecta (0 puntos)	23

La mayoría de las representaciones muestran características diagramáticas y aportan, al menos de manera parcial, información que es matemáticamente relevante (12 orientadas a objetos y 46 diagramáticas). En los tipos de dibujo *fuera de texto* y *no gráfico* se presentó un caso en cada una y la categoría de *dibujo explícitamente diagramático* quedó vacía con cero incidencias (tabla 3). De acuerdo con Ott (2017), el diagrama explícito debe incluir información clara sobre las relaciones entre los objetos estructuralmente relevantes. Aunque los estudiantes trabajen eficazmente, suelen omitir la escritura con la explicación de la relación entre los objetos. En el caso de los participantes del estudio,

aquellos que la comprendieron y la aplicaron, no la registraron en la hoja de trabajo.

Tabla 3. Clasificación a partir del análisis de la estructura matemática

Estructura matemática	Total
No gráfico	1
Fuera de texto	0
Ilustrativo	4
Orientado a objetos	12
Implícitamente diagramático	46
Explícitamente diagramático	0

En cuanto a la correspondencia informacional, se destaca que el resultado de la medición es, en su mayoría, una correspondencia completa en términos de valores y unidades, sin embargo, únicamente parcial en términos de la apariencia de las operaciones asociadas con el dibujo (tabla 4). Esto es, los dibujos que construyeron los estudiantes se relacionaron con el enunciado del problema, pero no con las operaciones. Es importante recordar que estas categorías de análisis se aplican a los dibujos. En la tabla 4, la correspondencia con respecto a las operaciones no se refiere a que estas se hayan realizado correctamente, sino a qué tanto corresponden con lo que se construye en el dibujo. Algunos estudiantes no construyen una relación de representación entre el dibujo y las operaciones, sin embargo, realizan una modelización adecuada y resuelven correctamente las operaciones.

Tabla 4. Correspondencia informacional

	Correspondencia completa	Correspondencia parcial	No existente	No se cumple
Valor	21	14	27	1
Unidad medida	21	9	32	1
Operaciones	7	3	52	1

Sobre el grado de abstracción, un número considerable de los dibujos (36) fue evaluado con un alto puntaje. De los dibujos identificados con bajo nivel de abstracción, la mayoría se encontraban combinados con representaciones de nivel alto. Es decir, se encontraron muy pocas representaciones gráficas que fueran totalmente de bajo nivel de abstracción (tabla 5). El nivel bajo-bajo se puede observar en la figura 3, donde no se dibujan los objetos estructuralmente relevantes ni sus relaciones. El nivel bajo-alto se ejemplifica en la figura 4, donde aparecen en el dibujo objetos que no son estructuralmente relevantes (en este caso el borrego), pero también las cualidades estructuralmente relevantes. El nivel alto-bajo se puede observar en la figura 6, donde aparecen solo los objetos estructuralmente relevantes, sin embargo, sus cualidades se encuentran “decoradas” con detalles ilustrativos. En el nivel alto-alto, se encuentra el dibujo de la figura 5, donde únicamente aparecen en el dibujo los objetos estructuralmente relevantes y sus cualidades.

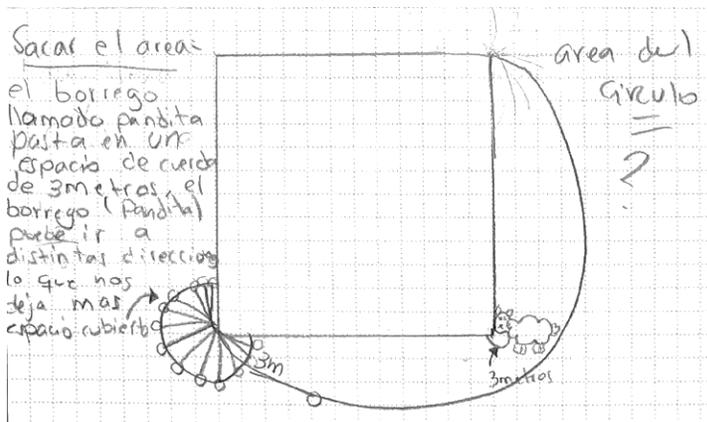


Figura 6. Ejemplo de dibujo con un nivel de abstracción alto-bajo. A pesar de que aparecen los objetos estructuralmente relevantes el énfasis está en la decoración de las relaciones en lugar de sus cualidades matemáticamente relevantes.

El producto de uno de los participantes no se evaluó en cuanto a su grado de abstracción ya que se clasificó previamente como no gráfico.

Tabla 5. Grado de abstracción

Grado de abstracción Objetos-Relaciones	Casos
Alto – Alto	36
Alto – Bajo	15
Bajo – Alto	6
Bajo – Bajo	5
No aplica (No gráfico)	1

En la mayoría de los casos se apreció una relación entre la información que provee el texto y lo que se representa en el dibujo. Al final, se presentó un número significativo de dibujos con características diagramáticas, sin embargo, solo algunos de ellos contenían información matemáticamente relevante y mostraron tener impacto en el proceso de modelación matemática. Los dibujos diagramáticos y las notas sobre las hojas de trabajo muestran que, a partir de este tipo de representación gráfica, los estudiantes fueron capaces de identificar la figura, tomar decisiones y seleccionar la fórmula necesaria.

Clasificación de los dibujos por sus características

La figura 5 es un ejemplo de dibujo diagramático implícito, ya que contiene elementos estructuralmente relevantes (se identifica la figura circular y su radio), y se puede apreciar la relación entre estos objetos a partir del acomodo en el área de trabajo. En este caso, se observa claramente en el dibujo la división de la figura en cuartos, aspecto que es clave para establecer el modelo matemático y llegar a la respuesta correcta.

En la figura 7 se presenta también un dibujo diagramático implícito (pues aparecen los objetos estructuralmente relevantes y sus relaciones) con nivel de abstracción alto, sin embargo, no aparece ninguna etiqueta y la correspondencia informacional es parcial. En este caso no se construyó un modelo matemático a partir de fórmulas y operaciones, sino que el participante resolvió el problema aplicando una estrategia de conteo de cuadrados. Lo anterior dio como resultado que su desempeño en modelización se evaluara como cero (0), ya que, aunque es una estrategia que se podría considerar válida para la solución del problema, no incluye el proceso de construcción de un modelo matemático. Como este caso, se

presentaron varios que mostraron que, aun cuando el dibujo tenga características diagramáticas, la falta de correspondencia informacional y la carencia de conocimientos específicos para lograr la matematización a partir del dibujo impiden que se lleve a cabo una modelización matemática adecuada.

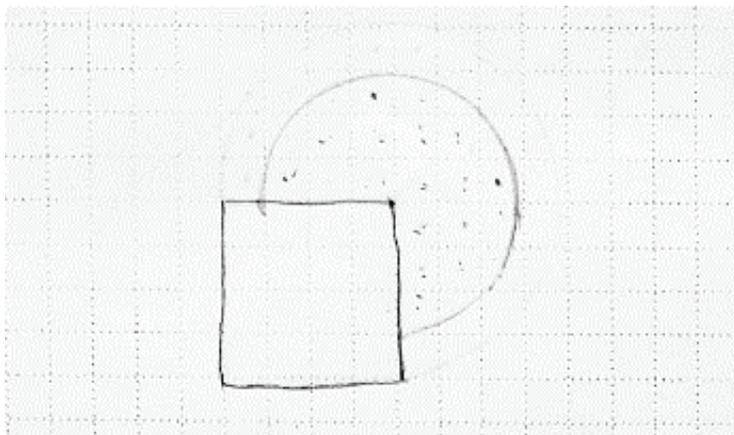


Figura 7. Dibujo que presenta la evidencia de la estrategia de conteo de cuadrados. Se pueden apreciar claramente los puntos marcados sobre el sector circular

Es importante destacar que el hecho de que los dibujos se clasifiquen como diagramáticos no significa que la información que representan es correcta o guarde relación con el texto del enunciado del problema. De acuerdo con la clasificación de Ott (2017), un dibujo se considera diagramático si contiene objetos que son matemáticamente relevantes y sus relaciones, pero no lo condiciona a su corrección o relación con el texto del problema ya que eso se evalúa con las herramientas de grado de abstracción y correspondencia informacional. Algunos casos de dibujo se clasificaron como diagramático implícito pues corresponden con la representación de objetos con sus respectivas relaciones, sin embargo, su dibujo es incorrecto, ya sea porque no corresponde completamente con el texto (correspondencia informacional parcial) o por errores con respecto a la figura y sus características (esto se aprecia en la figura 8 en la que a pesar de tener características de diagrama representa una figura cuadrada en lugar de circular). Ambos casos derivaron en una calificación de desempeño en modelización de cero (0), porque presentaron dificultades para construir un modelo matemático adecuado y no llegaron a la respuesta correcta.

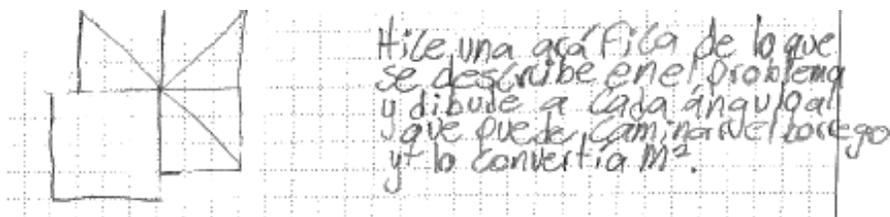


Figura 8. Ejemplo de error en la identificación de la figura que describe el movimiento del animal. En este caso se identifica una figura cuadrada en lugar de circular.

Relación entre la clasificación de las representaciones y el desempeño

Con respecto del desempeño de modelización, todos los participantes que construyeron un modelo adecuado y llegaron a la respuesta correcta realizaron un dibujo clasificado como diagramático con una correspondencia informacional completa. Es decir, no todos los estudiantes que realizaron un dibujo diagramático lograron un buen desempeño en la resolución del problema, sino solo aquellos que además de esto cumplían con la correspondencia informacional o congruencia del dibujo con respecto del planteamiento del problema. En todos los casos de éxito en modelización matemática se presentó en el dibujo una correspondencia completa con el texto del problema y un manejo correcto de los objetos, sus dimensiones y proporciones (tabla 6). Se interpreta que, la condición para que el dibujo contribuyera al éxito en la tarea de matematizar es la realización de un dibujo diagramático, con un grado de abstracción alto y una correspondencia informacional al menos parcial.

Tabla 6. Relación entre características del dibujo – desempeño en modelización

Desempeño en modelización	Clasificación del dibujo	Correspondencia informacional del dibujo	Cantidad de participantes
0	No gráfico	N/A	1
0	Ilustrativo	Parcial	2
0	Orientado a objetos	Parcial	7
0	Diagramático implícito	Parcial	13
1	Ilustrativo	Parcial	2
1	Orientado a objetos	Completa	5
1	Diagramático implícito	Completa	15
2	Diagramático implícito	Parcial	8
2	Diagramático implícito	Completa	10

Precisión del trazo y herramientas de dibujo

Es importante aclarar que la precisión del trazo del dibujo no entra dentro de las categorías de análisis de este trabajo de investigación, sin embargo, surgió como un aspecto emergente que fue llamativo durante el proceso. En el caso del nivel de precisión del trazo del dibujo, no se relaciona con las categorías de análisis, ya que no hay una herramienta aplicada que la considere. Más bien, se refiere a una característica de los dibujos. La cuadrícula y el uso del compás contribuyeron a la precisión del trazo del dibujo en términos de su forma y dimensiones. En algunos casos, la precisión del trazo del dibujo derivada del uso del compás y la cuadrícula ayudó a los estudiantes a identificar el objeto matemático y sus características. Sin embargo, algunos estudiantes demostraron ser capaces de llevar a cabo un proceso de matematización adecuado sin necesidad de una precisión alta en el trazo (figura 5). Aunque el uso de representaciones gráficas con características diagramáticas y la correspondencia informacional mostraron una relación con un mejor desempeño en modelización, la precisión del trazo no parece desempeñar un papel tan importante. Esto es, siempre y cuando el dibujo presente de manera correcta y coherente a los objetos relevantes y sus relaciones.

Recordar la fórmula

En cuanto a la resolución del problema, se observaron dos categorías entre los estudiantes: aquellos que recordaban la fórmula para el área del círculo y aquellos que no.

Algunos de los estudiantes lograron matematizar de manera exitosa gracias a que el dibujo les permitió identificar la figura y recordaban la fórmula de área de figura circular. Sin embargo, no todos los que recordaban la fórmula pudieron realizar una matematización adecuada. Se dio el caso de estudiantes que aun cuando recordaban la fórmula del área del círculo no respondieron correctamente, pues no identificaron que se trataba de un sector circular y lo consideraron como un círculo completo. En estos casos los estudiantes aplicaron la fórmula e hicieron la multiplicación correcta, pero no llevaron a cabo las operaciones correspondientes para obtener el área del sector circular ($3/4$ del círculo).

Muchos de los estudiantes tuvieron problemas para dar el paso a la matematización ya que no recordaron la fórmula para obtener el área de un círculo (πr^2). En esta situación, se presentaron tres casos:

Primer caso: aquellos estudiantes que abandonaron el ejercicio hasta el dibujo. Estos solo llegaron al dibujo y desde allí, al no encontrar un vínculo con la matematización, renunciaron a la resolución del problema. De ellos, algunos no dieron respuesta y otros seleccionaron una respuesta de manera aleatoria.

Segundo caso: aquellos que configuraron y resolvieron operaciones sin una conexión lógica con el dibujo, haciendo diferentes combinaciones de operaciones básicas (especialmente multiplicación y división) con las cantidades dadas en el problema. Según los datos obtenidos, los estudiantes tendieron a relacionar los cálculos de área con la multiplicación. Es posible que esto se deba a que la mayoría de las fórmulas de área incluyen esta operación.

Tercer caso: aquellos que eligieron utilizar un método alternativo para determinar el área; gracias a la presencia de la cuadrícula en la hoja de trabajo, los estudiantes fueron capaces de aplicar la estrategia alternativa de contar los cuadrados dentro del sector circular y a partir de eso, hacer una estimación, como se aprecia en la figura 7.

Características de los dibujos

Contrario a lo que se esperaba, hubo pocos casos de estudiantes que se quedaron estancados en la fase del dibujo ilustrativo sin avanzar a uno diagramático o a la propuesta de un modelo matemático. La mayoría fueron directamente de la lectura a un dibujo con características diagramáticas. Solo un par de casos que utilizaron dibujos ilustrativos se quedaron atascados en esa fase del proceso y no pudieron resolver el problema con éxito. En los otros casos, los estudiantes complementaron los dibujos ilustrativos con dibujos diagramáticos y lograron la solución correcta o al menos acercarse a ella.

A manera de resumen, entre los estudiantes que utilizaron representaciones gráficas, se observó una relación significativa entre las características de los dibujos y su desempeño en modelización matemática. La combinación de dibujos diagramáticos con alto grado de abstracción y con completa correspondencia informacional resultó en un mejor desempeño de modelización. Cabe resaltar que no resultan igualmente efectivos si solo cuentan con una de estas tres características. Los dibujos diagramáticos contienen información que es matemáticamente relevante, por lo que ayudaron a los estudiantes a identificar al objeto matemático, sus respectivas características y propiedades, y por lo tanto a dar el paso hacia los procedimientos matemáticos, es decir en la transición de la matematización (figura 9). En este sentido el dibujo con características diagramáticas que corresponde con la información que se presenta en el enunciado del problema parece hacer la función de un puente más efectivo hacia la matematización.

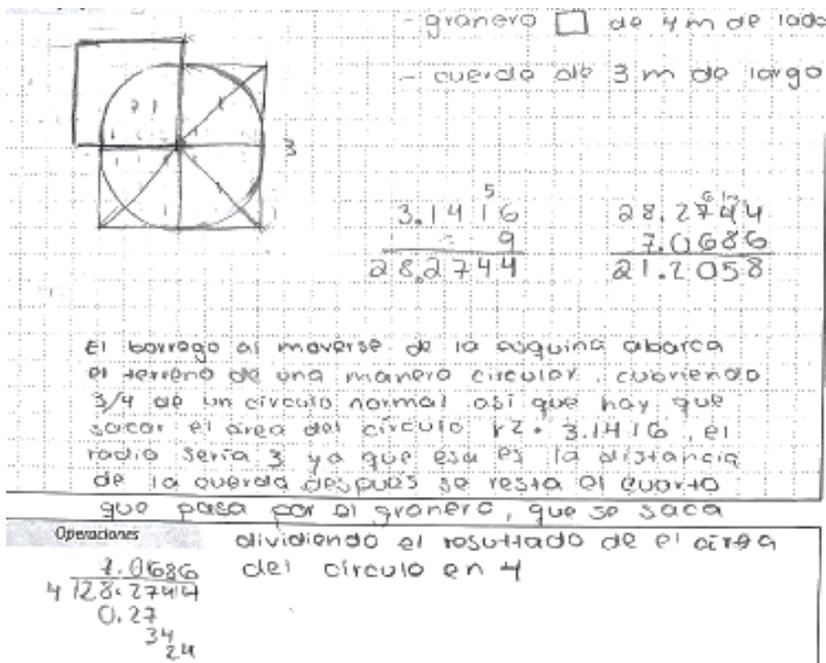


Figura 9. Ejemplo de dibujo diagramático implícito con modelo matemático correcto. Se aprecia la relación entre el dibujo, el modelo y la validación de la respuesta.

DISCUSIÓN

A partir de los hallazgos de este estudio se refuerza la idea de que las representaciones con características diagramáticas (al contrario de las ilustrativas) contribuyen a un mejor desempeño en la resolución de problemas matemáticos que implican razonamiento (Hegarty y Kozhevnikov, 1999; Rellensmann *et al*, 2016). En el proceso de construir un modelo matemático, la transición hacia la matemática, es decir la matematización implica el procesamiento de información. Es por ello, por lo que parece que las representaciones gráficas que incluyen información que es matemáticamente relevante son particularmente útiles para este propósito.

Por los resultados en la relación entre la clasificación del dibujo realizado por el participante y el desempeño en modelización se puede inferir que la realización del dibujo diagramático (con alto grado de abstracción y

correspondencia informacional completa) es un requisito, mas no una garantía de éxito para el subproceso de matematización. Conforme se alejan los estudiantes de la realización de dibujos con características diagramáticas, la probabilidad de tener éxito en el proceso de modelización disminuye considerablemente, como lo evidencian los resultados concentrados en la tabla 6.

En cuanto a las herramientas de análisis, a diferencia de las clasificaciones dicotómicas, la herramienta analítica de representaciones gráficas de Ott (2017) funciona como un predictor más preciso, ya que no solo considera las características diagramáticas o ilustrativas (dependiendo del grado de abstracción), sino también otros factores involucrados en el éxito del proceso de modelización matemática en problemas matemáticos, como lo son: la relación con el texto, la presencia de elementos estructuralmente relevantes, la correspondencia informacional con el texto del problema, y la relación visible de los elementos entre sí a partir de su acomodo.

Sobre las principales dificultades y barreras que presentaron los estudiantes para resolver el problema exitosamente se dieron diferentes casos. Algunas dificultades tuvieron que ver con la falta de modelos o representaciones adecuados, otras con la falta de conocimientos matemáticos, como la fórmula de área, y algunas más con la ausencia de una relación correcta del movimiento del animal. Sobre este último punto, a pesar de no ser claro, esta situación de relación incorrecta sobre el movimiento del animal llama la atención y podría deberse a limitaciones del conocimiento matemático o del mundo real. Ya sea por un modelo equivocado que establece una relación fija entre el concepto de área y las figuras exclusivamente cuadradas o por la ausencia de conocimiento real sobre el comportamiento del movimiento que describe un animal cuando está atado. Un ejemplo de tal comportamiento se puede apreciar en la figura 8.

El formato de opción múltiple para la respuesta pareció influir en los procesos de los estudiantes, especialmente en la verificación de la respuesta. Los estudiantes aceptaron o descartaron las posibilidades de respuesta obtenidas a partir de la comparación con las cuatro opciones. Algunos de ellos incluso lo expresaron por escrito, como lo mencionó un participante: "Conté las casillas y obtuve 22, así que elegí la que se acercó más". La aplicación de entrevistas podría ayudar a hacer interpretaciones más profundas sobre la influencia del formato de opción múltiple en los problemas verbales de área.

Dado el potencial mediador de las representaciones gráficas, es importante analizar cómo el proceso de dominio del uso de dibujos puede llevar a los estudiantes hacia la formalización donde sean capaces de marcar la diferencia

entre el dibujo y la figura representada (Duval, 2006), entre las características del trazo y la propiedades del objeto matemático. De manera que el uso abstracto del dibujo no solo está dado porque contiene características de diagrama, sino porque puede ser utilizado como un medio de relación de propiedades geométricas con posibles estrategias aplicables a su solución.

CONCLUSIONES

La aportación de este estudio consiste en recabar más información sobre la influencia de las características y uso de las representaciones gráficas en el desempeño de modelización matemática. De manera específica, en esta investigación se buscó abordar los resultados del análisis del uso de representaciones gráficas con tipos de problemas y contextos culturales diferentes. Otra aportación del estudio está dada por la revisión de algunos aspectos implicados en el uso efectivo de las representaciones gráficas que no han sido abordados en otras indagaciones, como el uso de estrategias alternativas de solución a partir del ejercicio del dibujo y las condiciones de su construcción.

Algunos autores sostienen que el uso de representaciones gráficas tienen el potencial de impedir que los estudiantes obedezcan ciegamente el contrato didáctico (Deliyianni *et al.*, 2009). Sin embargo, las investigaciones también apuntan a que la utilidad de las representaciones en la resolución de problemas matemáticos depende de sus características y de cómo se utilicen. Como se observó en el estudio de Dewolf *et al.* (2014) la inclusión de representaciones en el enunciado del problema no impidió que los estudiantes hicieran a un lado el sentido común y, por lo tanto, dieran respuestas poco realistas. A partir de esto, se puede concluir que el simple hecho de incluir representaciones gráficas no elimina la carga del contrato didáctico que propicia una tendencia a la simple mecanización. Hay más trabajo de investigación por hacer para determinar si el uso de las representaciones gráficas incide de manera positiva en la solución exitosa de problemas de modelización.

Esto podría estar relacionado con que un gran número de estudiantes no conciben la resolución de los problemas como una oportunidad para pensar, sino como un proceso mecanizado de operar las cantidades que presentan los enunciados del problema. El uso estratégico del dibujo tiende a surgir cuando hay una necesidad de comprender la situación para construir un modelo matemático. La concepción de la resolución de problemas como un proceso mecanizado reduce la

definición de dibujo como una herramienta útil para hacer matemáticas, mientras que asociar la resolución de problemas con el proceso de exploración la fomenta.

En el contexto de la resolución de problemas geométricos de modelización, la acción de dibujar se puede dar en dos posibles escenarios. Por un lado están los dibujos que hacen los estudiantes cuando el texto del problema lo solicita y los dibujos que los estudiantes deciden hacer por iniciativa propia a partir de las características del problema, es decir los dibujos espontáneos (Cuoco y Curcio, 2001; Kamii *et al.*, 2001). El escenario de los dibujos espontáneos implica que los estudiantes consideran que las representaciones gráficas forman parte del repertorio de estrategias de las que cuentan para la resolución de problemas matemáticos; por lo tanto, es posible definir su uso como deliberado y estratégico (Rellensmann *et al.*, 2019).

Futuras investigaciones podrían profundizar en el conocimiento que los estudiantes ponen en juego cuando se enfrentan a problemas matemáticos. Del mismo modo, se necesita más investigación sobre el papel que desempeña el dibujo como centro de actividad e información en las estrategias de resolución de problemas. Algunas preguntas clave que quedan abiertas son: ¿Cuál es el propósito de los dibujos que hacen los estudiantes ante un problema de modelización matemática?, ¿qué función dan los estudiantes a los dibujos? y ¿de qué dependen estas decisiones?

Los hallazgos de esta investigación muestran que los estudiantes reconocen la utilidad de los dibujos como una herramienta para entender la situación del problema, identificar los objetos matemáticos en cuestión y proponer el modelo matemático para su solución. Sin embargo, la falta de habilidades específicas en la representación y de conocimientos matemáticos impide que algunos de ellos aprovechen al máximo la actividad de dibujo. La información que se acumula sobre el tema parece apuntar a que una formación más sólida en el uso efectivo de representaciones gráficas en el contexto matemático, llevaría a los estudiantes a obtener mejores resultados en la comprensión y resolución de problemas geométricos de modelización.

REFERENCIAS

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241. <https://doi.org/ED419696>
- Blum, W. (2014). Mathematical Modeling: How Can Students Learn to Model? *Conference on Mathematical Modeling*, 54–61.

- Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets*. Josey-Bass.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 86–95.
- Borromeo Ferri, R. (2015). Learning and teaching of Mathematical Modeling chances and challenges for a broad Mathematics Education in school. En L. A. Hernández, J. A. Juárez, y J. Slisko (Eds.), *Tendencias en la educación matemática basada en la investigación* (pp. 39–52). Benemerita Universidad Autónoma de Puebla.
- Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 9(3), 309–336.
- Clements, D. H., y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). Macmillan.
- Cuoco, A. A., y Curcio, F. R. (2001). *The roles of representation in School Mathematics* (A. A. Cuoco y F. R. Curcio (eds.)). National Council of Teachers of Mathematics.
- D'Amore, B. (2011). *Didáctica de la Matemática*. Magisterio.
- Deliyianni, E., Monoyiou, A., Elia, I., Georgiou, C., y Zannettou, E. (2009). Pupils' visual representations in standard and problematic problem solving in mathematics: their role in the breach of the didactical contract. *European Early Childhood Education Research Journal*, 17(1), 95–110. <https://doi.org/10.1080/13502930802689079>
- Dewolf, T., Van Dooren, W., Ev Cimen, E., y Verschaffel, L. (2014). The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically. *Journal of Experimental Education*, 82(1), 103–120. <https://doi.org/10.1080/00220973.2012.745468>
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(103–2), 103–131.
- Galbraith, P. L., y Stillman, G. A. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 143–162. <https://doi.org/10.1007/BF02655886>
- Hegarty, M., y Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91(4), 684–689. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.4.684>
- Hochpöchler, U., Schnotz, W., Rasch, T., Ullrich, M., Horz, H., McElvany, N., y Baumert, J. (2013). Dynamics of mental model construction from text and graphics. *European Journal of Psychology of Education*, 28(4), 1105–1126. <https://doi.org/10.1007/s10212-012-0156-z>
- Juárez, J. A., Slisko, J., y Hernández, L. A. (2014). La construcción del modelo situacional de un problema matemático: El análisis basado en el marco del Experimentador inmerso. *Números*, 87, 165–173.

- Kamii, C., Kirkland, L., y Lewis, B. A. (2001). Representation and abstraction in young children's numerical reasoning. En A. A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in School Mathematics* (pp. 24–34). NCTM.
- Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., y Pekrun, R. (2010). The Role of the Situation Model in Mathematical Modelling–Task Analyses, Student Competencies, and Teacher Interventions. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31, 119–141.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 113–142. <https://doi.org/10.1007/BF02655885>
- Ott, B. (2016). *Textaufgaben grafisch darstellen. Entwicklung eines Analyse- instruments und Evaluation einer Interventionsmaßnahme*. Waxmann.
- Ott, B. (2017). Children's drawings for word problems – design of a theory and an analysis tool. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of European Research in Mathematics Education*.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. <https://doaj.org/article/33627bd287174c2c9cba12eaca324ee2>
- Rellensmann, J., Schukajlow, S., y Leopold, C. (2016). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, 95(1), 53–78. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1>
- Rellensmann, J., Schukajlow, S., y Leopold, C. (2019). Measuring and investigating strategic knowledge about drawing to solve geometry modelling problems. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, August. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01085-1>
- Schnotz, W. (2002). Towards an integrated view of learning from text and visual displays. *Educational psychology review*, 14(1), 101–120. <https://doi.org/10.1023/A:1013136727916>
- Schnotz, W. (2014). Visuelle kognitive Werkzeuge beim Mathematikverstehen. En J. Roth y J. Ames (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 48. Tagung für Didaktik der Mathematik* (pp. 45–52). WTM.

Autor de correspondencia

JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ

Dirección: Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B, Ciudad Universitaria, C.P. 72570, Puebla, México. jajul@cfm.buap.mx