 https://doi.org/10.24844/EM3403.09

La integral definida en la formación de un ingeniero químico: Análisis praxeológico

The definite integral in the training of a chemical engineer: Praxeological analysis

Walter Gonzales Caicedo,[1]
Cecilia Gaita Iparraguirre[2]

Resumen: En el presente trabajo se analiza el papel que cumple la integral definida en la formación de estudiantes de ingeniería química. Se identifican praxeologías en las que interviene la integral definida, tanto en la disciplina matemática como en la disciplina intermediaria con la profesión. Para ello, se analizan libros de texto de matemáticas y de cursos de especialidad, teniendo en cuenta elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Se emplean nociones como generador de un tipo de tareas (GT) y variables (V_i) para identificar las praxeologías, pues permiten relacionar lo específico y lo genérico. Los modelos praxeológicos identificados sustentan el ámbito de la actividad matemática en juego y hacen explícitos aquellos elementos técnicos y tecnológicos en donde se debería colocar mayor énfasis al organizar un curso de cálculo integral dirigido a estudiantes de ingeniería química, de modo que se responda a actividades propias de su entorno profesional.

Fecha de recepción: 13 de abril de 2021. **Fecha de aceptación**: 29 de noviembre de 2021.

[1] Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Perú, wgonzalesc@unprg.edu.pe, orcid.org/0000-0003-1253-8169.

[2] Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú, cgaita@pucp.edu.pe, orcid.org/0000-0002-7827-9262.

Palabras clave: *Integral Definida, Teoría Antropológica de lo Didáctico, praxeología, disciplinas intermediarias.*

Abstract: This paper analyzes the role of the Definite Integral in the training of chemical engineering students. The praxeologies in which the definite integral is involved are identified, both in the mathematical discipline and in the intermediate discipline with the profession. For this purpose, the textbooks of mathematics and specialty courses are analyzed, taking into account elements of the Anthropological Theory of Didactics. The notions of generator of a type of tasks (GT in spanish) and variables (V_i in spanish) are used to identify the praxeologies as they allow to relate the specific and the generic. The praxeological models identified support the field of mathematical activity at stake. This makes explicit those technical and technological elements that should be emphasised when organising a course in integral calculus for chemical engineering students. In this way, the course will respond to activities in their professional environment.

Keywords: Definite integral, Anthropological Theory of the Didactic, praxeology, intermediary disciplines.

1. INTRODUCCIÓN

En la Teoría Antropológica de lo Didáctico, Chevallard (1999) desarrolla un modelo para describir cualquier actividad humana a través de la noción de praxeología, según la cual en una Organización Matemática el saber se ordena en dos niveles: el de la *praxis* o del *saber–hacer*, constituido por los tipos de tareas y las técnicas que se usan para resolverlas, y el del *logo* o del *saber*, constituido por las tecnologías que son los discursos que describen, explican y argumentan las técnicas que se emplean. Los dos niveles conforman un conjunto de tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría, que se representa por [$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\Theta}$], es decir una praxeología.

Las prácticas se desarrollan en instituciones, es decir, en organizaciones sociales estables donde se realizan ciertas actividades, considerando restricciones específicas. Una institución crea un marco que relaciona las actividades que se desarrollan en su entorno de tal forma que las hacen posibles, proporcionando ciertos recursos materiales, organizativos y cognitivos, tal como señala Castela (2016).

Las instituciones de enseñanza son las responsables de transmitir las praxeologías matemáticas; en estas instituciones se operan las transposiciones necesarias para adaptarlas a las condiciones y restricciones de la enseñanza. Se reconocen dos instituciones de enseñanza, la de Enseñanza de las Matemáticas E(M) y la de Enseñanza de las Disciplinas Intermediarias E(DI), tal como señala Romo (2014). En particular, un curso de cálculo integral impartido en la carrera de Ingeniería Química, se considerará como parte de la institución de E(M); mientras que un curso de termodinámica, fundamental en la formación de un ingeniero químico, se asociará a una institución de E(DI).

Sin embargo, cuando miembros de una comunidad se trasladan a otra, estos llevan sus formas de actuar, sus herramientas, normas y lenguaje (Castela, 2016). De modo que, así como los estudiantes transitan de una institución a otra, los saberes también lo hacen y las prácticas matemáticas que los involucran serán distintas. En ese proceso, se ha identificado que la razón de ser, es decir, las cuestiones matemáticas o extramatemáticas a las que responden las matemáticas enseñadas (Gascón, 2011), están ausentes en los contenidos matemáticos oficiales, aún en entornos tan favorables a la modelación matemática como son los centros de formación de ingenieros (Fonseca, 2011).

La descripción de las praxeologías se puede apoyar en la noción de "generador de tipos de tareas" ($\mathbf{GT}$) y de "variables" ($\mathbf{V}_i$), desarrollada por Chaachoua y Bessot (2019), así como por Chaachoua, Bessot, Romo y Castela (2019). El propósito de ello es identificar praxeologías que relacionen lo especifico y lo genérico, creando un conjunto estructurado de subtipos de tareas. Estos autores proponen una extensión del modelo praxeológico de referencia, al cual llamaron modelo praxeológico T4TEL, donde T4 se refiere a la praxeología clásica, como son las tareas, técnicas, tecnología y teoría y TEL se refiere a la Tecnología de Aprendizaje Mejorado, donde consideran una definición más amplia respecto a la noción de tipo de tareas, que se basa en el alcance de la técnica. Estos elementos pueden ser de gran ayuda para identificar los modelos praxeológicos dominantes, tanto en la institución de Enseñanza de las matemáticas E(M) como en la institución de Enseñanza de las disciplinas intermediarias E(DI).

Se adopta la notación introducida por los autores en los trabajos señalados. Así, los tipos de tareas se representan por ($\boldsymbol{T_i}$), los subtipos de tareas por ($\boldsymbol{t_{i,j}}$), el generador de tipos de tareas por ($\boldsymbol{GT_i}$) y las variables por ($\boldsymbol{V_i}$). El generador de tipos de tareas se define mediante un tipo de tareas y un sistema de variables, donde las variables ($\boldsymbol{V_i}$) corresponden a valores específicos que se pueden tomar dentro de un dominio de la disciplina. Al considerar los valores de las variables de un generador de tipos de tareas, se distingue lo epistemológico, de lo institucional y lo didáctico.

Por ejemplo, el tipo de tarea $\boldsymbol{T_1}$**:** Aproximar el área de una región limitada por la gráfica de la función. Para establecer y notar de lo genérico y especifico, haremos uso del generador de tipos de tareas y sistemas de variables $\boldsymbol{GT_1}$: [Aproximar el área de una región limitada por la gráfica de la función; V_1, V_2], donde V_1 es el tipo de función y V_2 es la operación entre las funciones involucradas.

A partir de una variable se generan subtipos de tareas; por ejemplo, $\boldsymbol{t_{1,1}}$**:** Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de una función algebraica en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es menor que el área A. $\boldsymbol{t_{1,2}}$**:** Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de una función trascendente en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es menor que el área A. $\boldsymbol{t_{1,3}}$**:** Aproximar el área A delimitada por la gráfica de una función algebraica en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es mayor que el área A. $\boldsymbol{t_{1,4}}$**:** Aproximar el área A de una región delimitada por la gráfica de una función trascendental en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es mayor que el área A. $\boldsymbol{t_{1,5}}$**:** Aproximar el área A de una región gráfica de funciones algebraicas o trascendentes relacionadas con sumas o restas en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es mayor que el área A. $\boldsymbol{t_{1,6}}$**:** Aproximar el área A de una región limitada por la gráfica de funciones algebraicas o trascendentes relacionadas con sumas o restas en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es menor que el área A. $\boldsymbol{t_{1,7}}$**:** Aproximar el área A de una región delimitada por la gráfica de la composición de funciones elementales en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es mayor que el área A. $\boldsymbol{t_{1,8}}$**:** Aproximar el área A de una región delimitada por la gráfica de la composición de funciones elementales en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es menor que el área A.

Los distintos valores que toman las variables modifican el rango de técnicas posibles de un tipo de tareas. En este caso nos referimos a una variable epistemológica. Los valores institucionales que toman las variables modelan condiciones y limitaciones de forma explícita o implícita bajo las cuales una praxeología existe o puede existir institucionalmente; una variable didáctica se ubica dentro de una institución, potencialmente a disponibilidad para el profesor. Una variable didáctica presente en una institución puede no serlo en otra. Por otro lado, en la formación académica de los estudiantes de las carreras de ingeniería, el concepto de integral definida es fundamental debido a sus diferentes usos y aplicaciones. Si bien la integral definida se abordará en la institución de E(M), es natural que también se trate en la institución de E(DI). En este último caso, es probable que se empleen praxeologías matemáticas asociadas a la integral definida, pero que no se haga referencia a ellas de manera explícita. Por ello, consideramos que reconocer las praxeologías que se desarrollan en torno a la integral definida en estas instituciones y establecer relaciones entre ellas es un tema relevante ya que puede proporcionar elementos a considerar en la formación de un futuro ingeniero.

2. ANTECEDENTES

Resultados de diversos estudios reportan que la razón de ser de la integral definida estuvo asociada inicialmente al problema del cálculo del área de una región plana (Bobadilla, 2012; Crisóstomo, 2012; Turégano, 1994; Cabañas, 2011; Ordóñez 2011). Posteriormente se estudió la integral desde el punto de vista analítico, caracterizado por el uso de un lenguaje algebraico-aritmético, en términos de límites de una suma, independizándose del lenguaje geométrico. Es en ese contexto que se situó el trabajo de Cauchy, basado en límites, funciones continuas y convergencia, y en el que se presentó una demostración del teorema fundamental del Cálculo (Grabiner, 2005; Bobadilla, 2012). En dichas investigaciones se identificaron tipos de tareas asociadas al cálculo de área de una región plana, de volúmenes de un sólido de revolución, de área de una superficie de revolución, de longitud de arco, del trabajo, del centroide de una región plana, y al cálculo de una integral impropia como generalización de integral definida.

Por otro lado, Otero y Corica (2013) realizaron un estudio en el que proponían elaborar un modelo praxeológico de referencia para el límite y continuidad de funciones en un curso de Cálculo de nivel superior universitario. Para la construcción del modelo, partieron de una pregunta generatriz con la finalidad de obtener información sobre lo que se quiere estudiar y para qué se quiere estudiar. Consideraron cuatro tipos de género de tarea: demostrar, calcular, analizar funciones y su representación gráfica. A partir de ello, propusieron una organización matemática en la que relacionaron las tareas a través de las técnicas que estas requerían, según el tipo de género considerado.

En el mencionado trabajo se realizó también un análisis praxeológico de un libro de texto, con la finalidad de identificar la génesis institucional del límite y continuidad de funciones, así como los cambios secuenciales que en el documento se han experimentado. Concluyeron que existe desarticulación entre las tareas propuestas y que los elementos tecnológicos que sustentan las técnicas no se mencionan de manera explícita. Atribuyeron esta situación a que el saber enseñando se da en forma acabada y, por lo tanto, incuestionable.

González-Martín y Hernandes (2017) realizaron una investigación cuyo objetivo fue analizar la forma en que se abordaban nociones de Cálculo en un libro de texto clásico de Ingeniería Civil, dirigidos a estudiantes del segundo año de la carrera en una universidad brasileña. Para ese análisis, se apoyaron en la noción de praxeología y complementaron el estudio con entrevistas a ingenieros que se desempeñaban como profesores de cursos de la especialidad, a los cuales les pidieron identificar los usos de la integral definida en el contexto de la profesión. Reportan que esta se emplea en tareas asociadas al cálculo de fuerzas de corte y flexión en los diferentes tipos de vigas, las cuales se abordan en la asignatura de Resistencia de Materiales para Ingeniería Civil.

Los hallazgos señalan que las técnicas para solucionar los tipos de tareas no se justifican con la tecnología de la institución de enseñanza de la matemática; más bien, lo hacen desde tecnologías que corresponden a la Ingeniería Civil. Se evidencia que existe una desconexión entre las praxeologías desarrolladas en ambas instituciones y se plantea la necesidad de realizar otras investigaciones que permitan identificar los usos de la integral definida en instituciones usuarias, con la finalidad de relacionar los contenidos matemáticos en contextos de la disciplina.

En un trabajo posterior, relacionado con los usos de la integral definida en las carreras Ingeniería Civil e Ingeniería Eléctrica de una universidad brasileña en la cual estudiantes cursan el segundo año, González-Martín y Hernandes (2019) señalan que al trasladarse los saberes de los cursos de Cálculo hacia los cursos de las disciplinas intermediarias, los argumentos matemáticos tienden a desaparecer y las justificaciones se hacen con base en los contextos de la profesión por efectos de la transposición. Además, reportaron que no se establecen relaciones con tecnologías que se fundamentan en la institución de enseñanza de la matemática, representada por los libros de Cálculo.

3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo nos interesamos en identificar la razón de ser de la integral definida en la formación universitaria de estudiantes de Ingeniería Química, partiendo del supuesto que la respuesta dependerá de la institución en la que esta se ubique. Nos proponemos explicar los usos y las razones de ser de la Integral Definida, así como las justificaciones dadas desde las instituciones E(M) y E(DI).

Consideramos a la institución de E(M), materializada a través de los cursos de matemáticas que forman parte del plan de estudio de los estudiantes de Ingeniería Química, especialmente por el curso Matemática Superior I. A partir del análisis del plan de estudios de Ingeniería Química y de entrevistas con docentes de la institución de E(DI), se identifican dos asignaturas, Fisicoquímica I y Principios de Ingeniería Química, en donde se abordan tareas en cuyas técnicas de solución se incluye a la integral definida, y las justificaciones se fundamentan en la matemática o en la propia disciplina.

Cabe señalar que, según el Plan de estudios de un ingeniero químico en la universidad considerada en el estudio, la asignatura Matemática Superior I es pre requisito para la asignatura de Física I en tanto esta última es pre requisito para la asignatura de Física II, que a su vez es pre requisito de la asignatura de Fisicoquímica I, que corresponde al segundo año de estudios. Sin embargo, la asignatura de Principios de Ingeniería Química que corresponde al tercer año de estudios, no indica como pre requisitos las asignaturas mencionadas, pero de acuerdo con la información brindada por los especialistas del área, sirve de base para otras asignaturas, ya que también requiere de los conocimientos de Matemática y Física, específicamente de la integral definida.

A partir del análisis de textos empleados para la enseñanza de las asignaturas mencionadas, incluyendo entrevistas realizadas a docentes que las impartían, se identificaron praxeologías en las que interviene la integral definida. En particular, se describe la forma en la que aparece dicho concepto, explicitando los problemas, definiciones, teoremas y técnicas empleadas, así como la forma en que se introducen los métodos de solución de casos particulares.

Para aplicar las herramientas y procedimientos descritos, se seleccionaron textos de cada una de las instituciones descritas. La selección se llevó a cabo tomando en cuenta aquellos declarados en los programas analíticos de los cursos, que además fueron referidos por los docentes como textos de uso frecuente, tanto por ellos como por los estudiantes. Así, los textos seleccionados en la institución E(M) tienen como autores a Purcell, Varberg y Rigdon (2007), Edward y Penney (2008) y Larson y Edward (2010). Del lado de las disciplinas intermediarias, los textos considerados en el análisis corresponden a Castellan (1998) y Felder y Rousseau (2003).

Cabe señalar que los expertos interrogados, entendiendo por ello a los ingenieros químicos, reconocen a la Integral Definida como uno de los conceptos matemáticos que permite resolver problemas relacionado con la ecuación de estado (ecuación que describe el comportamiento de todas las sustancias para todas las condiciones que intervienen, como la presión, temperatura, entre otros y se plantea con derivadas parciales). Y por ello destacan la importancia de emplear textos matemáticos en donde se muestren algunas aplicaciones de los temas tratados. Los textos analizados en este trabajo cumplen con ese requisito.

4. PRAXEOLOGÍAS IDENTIFICADAS EN LA INSTITUCIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA E(M)

En una primera revisión de los libros de cálculo, se identificaron usos de la integral definida, reportados también en estudios epistemológicos previos, tales como el cálculo de *áreas de regiones limitadas por las gráficas de* funciones continuas en un intervalo cerrado, del volumen de un sólido de revolución, del *área de* un sólido de revolución, de la longitud de arco. Se identificaron, además, tipos de tareas asociados al cálculo de magnitudes estudiadas en los cursos de Física como son trabajo, fuerza, centro de masa y centroide de una región plana. Sin embargo, las técnicas y justificaciones empleadas para resolverlos son diferentes a los identificados en los estudios epistemológicos.

Se realizó un análisis de las prácticas matemáticas identificadas en los libros de textos de la E(M) relacionados con la integral definida, tomando en cuenta las preguntas: 1) ¿Qué procedimientos (técnicas, métodos) se requieren y son necesarios para la resolución de cada tarea planteada? 2) ¿Qué justificaciones (definiciones, propiedades, teoremas) garantizan los procedimientos empleados?

A continuación, y a manera de ejemplo, se muestra el generador considerado para el tipo de tarea 3: Calcular la integral definida, empleando la notación presentada en la sección 1. Su exposición es fundamental puesto que se relacionará con los otros tipos de tarea, así como con las praxeologías que se identificarán en la institución de E(DI).

– Tipo de tarea

$\boldsymbol{T_3}$: Calcular la Integral Definida.

$\boldsymbol{GT_3}$: [Calcular la Integral Definida; V_1, V_2], donde V_1 es el tipo de función y V_2 es la estructura del integrando (operaciones entre las funciones involucradas).

– *Subtipos de tareas*

$\boldsymbol{t_{3,1}}$: Calcular la Integral Definida de una o más funciones elementales algebraicas o trascendentes relacionadas con sumas o restas.

$\boldsymbol{t_{3,2}}$: Calcular la Integral Definida de la composición de funciones elementales en un intervalo cerrado.

$\boldsymbol{t_{3,3}}$: Calcular la Integral Definida del producto entre funciones algebraicas y trascendentes en un intervalo cerrado.

– *Técnica*

$\boldsymbol{\tau_{3,1}}$: Se obtiene la antiderivada conocida de la función elemental algebraica o trascendente, recurriendo a la derivada de funciones elementales conocidas para luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

$\boldsymbol{\tau_{3,2}}$: Si cumple la condición $f(g(x))g'(x)$ en $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$, realizar un cambio de variable que transforme la integral en una más simple, tomando en cuenta el cambio del diferencial respecto a la nueva variable, así como los nuevos límites de integración superior e inferior en función de la variable, para luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

$\boldsymbol{\tau_{3,3}}$: Obtener la antiderivada de una función de la forma $f(x) = A(x)\ \mathrm{T}(x)$, donde $A(x)$ es una función algebraica y $T(x)$ es función trigonométrica (senos y cosenos). En este caso, se elige $u = A(x)$ y $dv = T(x)$ y aplica $\int u\, dv = uv - \int v du$. Se realizan enseguida los cálculos correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Si la función es de la forma $f(x) = \mathrm{L}(x)\ \mathrm{A}(x)$, donde $A(x)$ es una función algebraica y $L(x)$ logarítmica, se elige $u = L(x)$ y $dv = A(x)\, dx$ y aplica $\int u\, dv = uv - \int v du$. Enseguida se realizan las operaciones correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Si la función es de la forma $f(x) = \mathrm{I}(x)\ \mathrm{A}(x)$, donde $A(x)$ es una función algebraica e $I(x)$ es trigonométrica inversa, se elige $u = I(x)$ y $dv = A(x)\ dx$ y aplica $\int u\, dv = uv - \int v du$. Enseguida se realizan las operaciones correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

Si la función es de la forma $f(x) = \mathrm{A}(x)\ \mathrm{E}(x)$, donde $A(x)$ es una función algebraica y $E(x)$ exponencial, se elige $u = A(x)$ y $dv = E(x)\ dx$ y aplica $\int u\ dv = uv - \int vdu$. A continuación, se realizan las operaciones correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.
Si la función es de la forma $f(x) = \mathrm{T}(x)\ \mathrm{E}(x)$, donde $T(x)$ es una función trigonométrica (senos y cosenos) y $E(x)$ exponencial, se elige $u = T(x)$ y $dv = E(x)\ dx$ y aplica $\int u\ dv = uv - \int vdu$**.** Enseguida se realizan las operaciones correspondientes para obtener la antiderivada y luego aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo.

– Tecnología

$\boldsymbol{\theta_{3,1} = \theta_{3,2} = \theta_{3,3}}$**:** Teorema fundamental del Cálculo. Supongamos que f es una función continua en el intervalo $[a, b]$.
Parte 1: Si la función F está definida en $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^X f(t)dt$$

entonces F es una antiderivada de f. Es decir, $F'(x) = f\ (x)$ para x en $[a, b]$.
Parte 2: Si G es una antiderivada de la función f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

– Teoría

$\boldsymbol{\theta_3}$**:** Análisis real.
Para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$, es posible considerar como ejemplo los subtipos de tareas siguientes:
$\boldsymbol{t_{3,1}}$: Calcular la Integral Definida de la función $f(x) = x^3 - 1$ en el intervalo $[-1, 2]$.
$\boldsymbol{t_{3,2}}$: Calcular la Integral Definida de la función $f(x) = \sqrt{\frac{arcsen(x)}{5-5x^2}}$ en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
$\boldsymbol{t_{3,3}}$: Calcular la Integral Definida de la función $f(x) = (1 - x)e^{-x}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

En la figura 1, se presenta un esquema en el cual se articulan los subtipos de tareas, técnicas, tecnologías y variables consideradas.

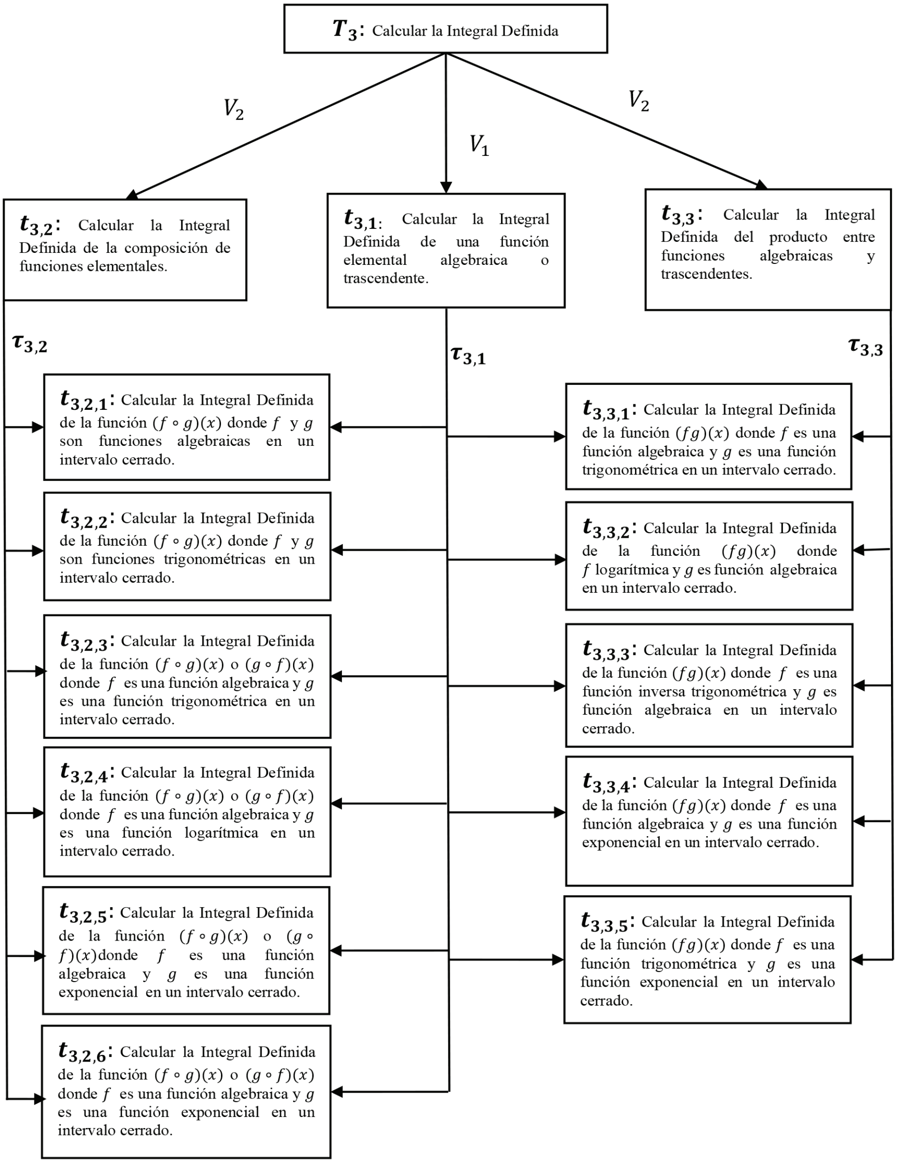


Figura 1. Ejemplo del uso de generador del tipo de tarea.

Se realiza un análisis similar al anterior con los otros tipos de tareas identificadas en los textos de la institución de E(M). Como resultado del análisis realizado, se propone una organización matemática para la integral definida (figura 2); asociada a la institución de enseñanza de las matemáticas.

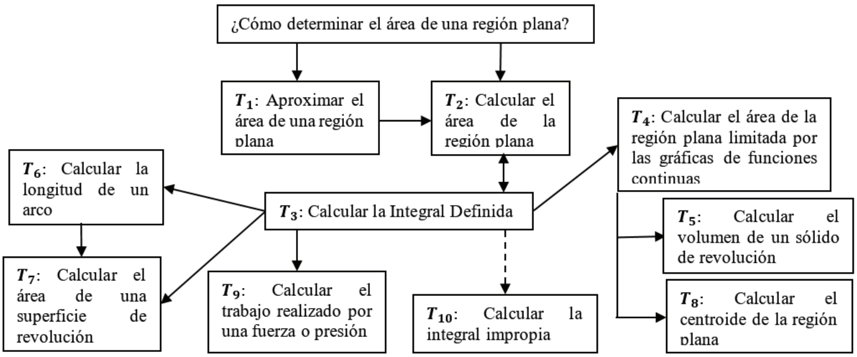


Figura 2. Modelo praxeológico de la Integral Definida en la institución E(M).

El tipo de tarea $\boldsymbol{T_1}$: "realizar una aproximación del área de una región plana", se considera fundamental y, a partir de ella, se obtiene un generador de tipos de tareas $\boldsymbol{GT_1}$, donde las variables didácticas $\boldsymbol{V_i}$ generan subtipos de tareas más específicas que el tipo de tarea $\boldsymbol{T_1}$. Del mismo modo, surge la necesidad de desarrollar técnicas, las cuales se apoyan en la tecnología $\boldsymbol{\theta_1}$, fundamentales para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_2}$, relacionada con calcular el área de la región plana donde se obtiene un generador de tareas $\boldsymbol{GT_2}$, y a partir de las técnicas obtenidas para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_1}$ se especifica una de las formas de obtener el área para una determinada región plana que cumple ciertas condiciones.

Por otro lado, la técnica para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_2}$ es fundamental puesto que lleva a obtener una técnica (herramienta matemática) importante para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$, la cual permite calcular la integral definida, convirtiéndose así en el eje central sobre el que giran los otros tipos de tareas.

Asimismo, a partir del generador $\boldsymbol{GT_3}$, se obtienen dos subtipos de tareas $\boldsymbol{t_{3,2}}$ y $\boldsymbol{t_{3,3}}$, las cuales admiten técnicas diferentes para sus respectivas soluciones, justificadas por las tecnologías $\boldsymbol{\theta_{3,2}}$ y $\boldsymbol{\theta_{3,3}}$ y relacionadas con la propia definición de integral definida y el teorema fundamental del Cálculo.

El tipo de tarea $\boldsymbol{T_4}$, corresponde a la determinación del área de la región plana limitada por las gráficas de funciones continuas, requiere de la tecnología

$\boldsymbol{\theta_{3,2}}$ asociada al tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$, como parte de las técnicas para los tipos de tareas que se obtienen del generador $\boldsymbol{GT_4}$.

Los tipos de tareas obtenidos por el generador $\boldsymbol{GT_4}$ guardan relación con el tipo de tarea $\boldsymbol{T_5}$, a su vez relacionada con el cálculo del volumen de un sólido de revolución, en esta, las técnicas se complementan con otras para resolver los tipos de tareas obtenidas por el generador $\boldsymbol{GT_5}$.

El tipo de tarea $\boldsymbol{T_6}$ está relacionada con la obtención de la longitud de arco, que precisa, como parte de su técnica, de la tecnología $\boldsymbol{\theta_{3,2}}$ para dar solución a los tipos de tareas que se obtiene del generador $\boldsymbol{GT_6}$. Del mismo modo, están relacionadas con el tipo de tareas generadas por $\boldsymbol{GT_7}$ del tipo de tarea $\boldsymbol{T_7}$, alternadas con el cálculo del área de una superficie de revolución.

Respecto al tipo de tarea $\boldsymbol{T_8}$, que refiere determinar el centroide de la región plana, se vincula con el tipo de tarea $\boldsymbol{T_4}$. El tipo de tarea $\boldsymbol{T_9}$, calcular el trabajo realizado por una fuerza o presión, se relaciona directamente con el tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$. Cabe señalar que las praxeologías asociadas a los tipos $\boldsymbol{T_8}$ y $\boldsymbol{T_9}$ también consideran tecnologías que involucran principios y definiciones de la Física.

Finalmente, el tipo de tarea $\boldsymbol{T_{10}}$, relacionado con calcular la integral impropia, se considera como una generalización de la tarea $\boldsymbol{T_3}$, donde además se emplean praxeologías asociadas a los límites de funciones.

5. PRAXEOLOGÍAS ASOCIADAS A LA INTEGRAL DEFINIDA EN LA INSTITUCIÓN E(DI)

En una primera revisión de los textos didácticos seleccionados en la institución E(DI):

- *Fisicoquímica* (2ª ed.); autor: Castellan; año: 1998.
- *Principios Elementales de los Procesos Químicos;* autor: Felder y Rousseau; año: 2003,

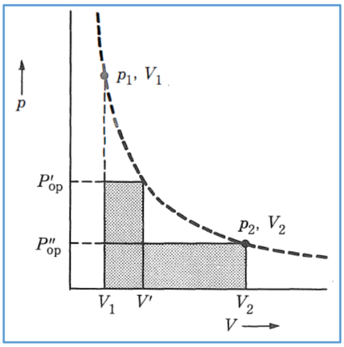
se encontró que los elementos praxeológicos que involucraban la integral definida empleaban ostensivos propios de las disciplinas intermediarias, así como tecnologías basadas en interpretaciones de la Fisicoquímica.

En particular, se observó que la integral definida permitía resolver la ecuación de estado. Esta describe el comportamiento de todas las sustancias, considerando las condiciones que intervienen, tales como la presión, temperatura, entre otras y se plantea a través de una ecuación con derivadas parciales. A partir de ella, se derivan otros problemas que también involucran a la integral definida y se estudian en cursos posteriores como es el caso de Termodinámica.

En los problemas analizados en los textos se han identificado procedimientos que permiten calcular los diferentes tipos de trabajo para los gases, según su comportamiento. Para obtener los resultados, se requiere de la aplicación del teorema fundamental de cálculo, pero solo en el caso donde las antiderivadas correspondan a funciones elementales.

A continuación, se describe con más detalle la relación entre la integral definida y el tipo de tarea $T^{*}{}_{8}$: Cálculo de la entropía de un gas ideal.

El trabajo de expansión de un gas está relacionado con la presión P y el volumen V y se presenta para un sistema de expansión en dos etapas (figura 3), donde el trabajo producido por una expansión en dos etapas, en la que se observa que la primera produce un trabajo representado por el área $P'_{op}(V' - V_1)$ y, en la segunda, el trabajo se representa por el área $P''_{op}(V_2 - V')$.



En la figura, los rectángulos sombreados representan el trabajo de expansión en dos etapas, es decir, que el trabajo total está dado por:

$$W = W_{primera\ etapa} + W_{segunda\ etapa}$$
$$= P'_{op}(V' - V_1) + P''_{op}(V_2 - V')$$

donde W representa el trabajo, P'_{op} y P''_{op} representan la presión que se opone al movimiento y V_1, V' y V_2 representan los volúmenes.

Figura 3. Trabajo producido por una expansión en dos etapas (Castellan, 1998, p. 112)

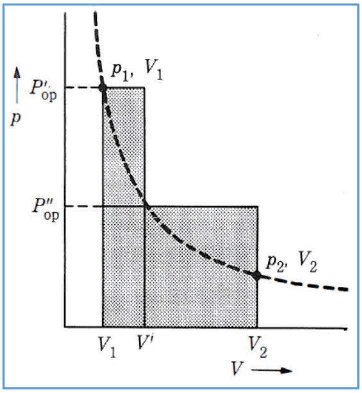
Ambos casos están en un estado inicial y se expresan en términos de una integral definida (figura 4) que representa el trabajo de expansión de un sistema cualquiera.

$$\boxed{W = \int_{V_1}^{V_2} P_{op}\, dV}$$

donde W representa el trabajo total producido en una expansión, P_{op} representa la presión que se opone al movimiento, V_1 es el volumen inicial y V_2 es el volumen final y dV representa el diferencial de volumen.

Figura 4. Trabajo total producido en una expansión (Castellan, 1998, p. 113).

Asimismo, se tiene que el trabajo de comprensión de un gas para un sistema cualquiera desarrolla un comportamiento diferente (figura 5), siendo el trabajo destruido en una expansión en dos etapas, en las que se observa que en la primera se destruye el trabajo representado por el área $P''_{op}(V_2 - V')$ y, en la segunda; se destruye el que está representado por el área $P'_{op}(V' - V_1)$.



En la figura, los rectángulos sombreados representan el trabajo destruido en la compresión en dos etapas, dado por:

W= $P''_{op}(V' - V_2) + P'_{op}(V_1 - V')$

Donde W representa el trabajo, P'_{op} y P''_{op} representan la presión que se opone al movimiento, en tanto V_1, V' y V_2 representan los volúmenes.

Figura 5. Trabajo destruido en una comprensión en dos etapas (Castellan, 1998, p. 114).

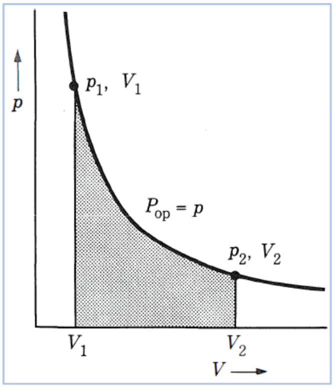
Los dos casos se encuentran en un estado inicial (o estado final) y se expresan en términos de una integral definida (figura 6), que representa el trabajo destruido en expansión de un sistema cualquiera.

$$\boxed{W = \int_{V_i}^{V_f} P_{op}\, dV.}$$

En la integral W representa el trabajo total en la expansión que va desde V_i hasta V_f (V_i, V_f volumen inicial y final), dV diferencial de volumen y P_{op} es la presión que se opone al movimiento.

Figura 6. Trabajo expandido (Castellan, 1998, p. 115).

Otro de los tipos de tareas asociados a la integral definida corresponde a calcular cantidades mínimas y máximas de trabajo en una expansión y comprensión (figura 7), donde el trabajo máximo se da en una expansión y el trabajo mínimo se da en una comprensión respectivamente.



Obsérvese que:

- En una expansión, P_{op} debe ser menor que la presión p de un gas, entonces el trabajo máximo de expansión está dado por: $W_m = \int_{V_i}^{V_f} p\, dV$
- En una compresión, P_{op} debe ser infinitesimalmente mayor que la presión p del gas, entonces el trabajo mínimo de compresión está dado por: $W_m = \int_{V_i}^{V_f} p\, dV$
- Para un gas ideal, la cantidad máxima de trabajo producido en la expansión o la cantidad mínima de trabajo destruido en la compresión es igual al área sombreada bajo la isoterma (de igual temperatura).

Figura 7. Trabajo máximo o mínimo (Castellan, 1998, p. 115).

Por otra parte, se tiene que la integral definida se aplica para calcular el trabajo máximo o mínimo en un cambio de estado isotérmico (figura 8) y también se aplica para calcular el trabajo en una expansión o en una compresión para transformaciones reversibles e irreversibles de un gas (figura 9).

Tenemos que, para un cambio de estado isotérmico, el trabajo máximo o mínimo, para $p = \frac{nRT}{V}$, está dado por:

$$W_{\text{max, min}} = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\, dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}.$$

donde $W_{max,min}$ representa el trabajo, V_i, V_f representan los volúmenes inicial y final respectivamente, dV es el diferencial volumen, n número de moles y T temperatura.

Figura 8 Trabajo máximo y trabajo mínimo (Castellan, 1998, p. 115).

$$W_{exp} = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV \qquad W_{comp} = \int_{V_2}^{V_1} p\, dV$$

Figura 9. Trabajo en la expansión y en la compresión (Castellan, 1998, p. 116).

Para describir la organización matemática identificada en torno a la integral definida en la institución E(DI), se consideró también la noción de generador de tipos de tareas. En la representación de los tipos de tareas se empleó la notación

($\boldsymbol{T^*_i}$), los subtipos de tareas se representaron por ($\mathbf{t^*_{i,j}}$), el generador de tipos de tareas con ($\boldsymbol{GT^*_i}$), variables ($\mathbf{V^*_i}$) y la tecnología ($\boldsymbol{\theta^*_i}$).

A modo de ejemplo se considera uno de los tipos de tarea, específicamente $\boldsymbol{T^*_8}$.

– Tipo de tarea

$\boldsymbol{T^*_8}$**:** Calcular el cambio de entropía de un gas ideal.

$\boldsymbol{GT^*_8}$: [Calcular el cambio de entropía de un gas ideal; $\mathbf{V^*_1}$, $\mathbf{V^*_2}$], donde $\mathbf{V^*_1}$ es la forma de expansión del trabajo y $\mathbf{V^*_2}$ es la ecuación de estado del gas (ley de los gases).

– Subtipos de tareas

$\mathbf{t^*_{8,1}}$**:** Determinar el cambio de entropía de un gas ideal. Conociendo su capacidad calorífica específica a volumen constante, se sabe que se encuentra a una temperatura y a un volumen inicialmente se transforma a otra temperatura y a otro volumen.

Una tarea específica de este tipo sería:

Determinar el cambio de entropía de un gas ideal. Si su capacidad calorífica específica a volumen constante es $\frac{3}{2}R$, e inicialmente a 20°C con un volumen de 39.35 $\frac{l}{mol}$ se transforma a una temperatura de 60°C y a un volumen de 69.22 $\frac{l}{mol}$.

$\mathbf{t^*_{8,2}}$**:** Determinar el cambio de entropía de un gas ideal. Conociendo su capacidad calorífica específica a presión constante, se sabe que inicialmente se encuentra a una temperatura y presión y se transforma a otra temperatura y presión.

– Técnica

$\boldsymbol{\tau^*_{8,1}}$**:** Identificar cada variable que interviene en la representación de la integral definida, como los límites de integración, la función integrando y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el cambio de entropía de un gas ideal en función de la temperatura y volumen, se aplica la expresión:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_v}{T} dT + nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$\tau^*_{8,2}$: Identificar cada variable que interviene en la representación de la integral definida, como los límites de integración, la función integrando y aplicar la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo. Para calcular el cambio de entropía de un gas ideal en función de la temperatura y la presión, se aplica la expresión:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p}{T} dT - nR \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

– ***Tecnología***

$\theta^*_{8,1}$: Cambios de entropía en el gas ideal en función de la temperatura y volumen.

Para los gases ideales, el comportamiento de la energía y la temperatura son variables equivalentes, es decir, $dU = C_v\, dT$. Sabemos que:

$$dS = \frac{C_v}{T} dU + \frac{p}{T} dV$$

Se tiene que la presión está dada por $p = \frac{nRT}{V}$, reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$dS = \frac{C_v}{T} dT + \frac{nR}{V} dV$$

Para una variación finita de estado, es decir para el cambio de entropía de un gas ideal en función de la temperatura y volumen, está dado por:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_v}{T} dT + nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$\theta^*_{8,2}$: Cambios de entropía en el gas ideal en función de la temperatura y la presión.

Se sabe que otra forma de representar la ecuación fundamental que relaciona a dS con variaciones de entalpía y presión es:

$$dS = \frac{1}{T} dH - \frac{V}{T} dp$$

La entropía del gas ideal puede expresarse en función de la temperatura y la presión. Además, por propiedad del gas ideal, se tiene que $dH = C_p\, dT$. Entonces:

$$dS = \frac{C_p}{T}dT - \frac{V}{T}dp$$

De aquí que el volumen esté dado por $V = \frac{nRT}{p}$, reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$dS = \frac{C_p}{T}dT - \frac{nR}{p}dp$$

Para una variación finita de estado o para el cambio de entropía de un gas ideal en función de la temperatura y la presión, está dado por:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p}{T}dT - nR\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

– ***Teoría***

$\boldsymbol{\Theta^*_8}$**:** Fisicoquímica.

En la figura 10 se presenta un modelo praxeológico para la integral definida en dicha institución.

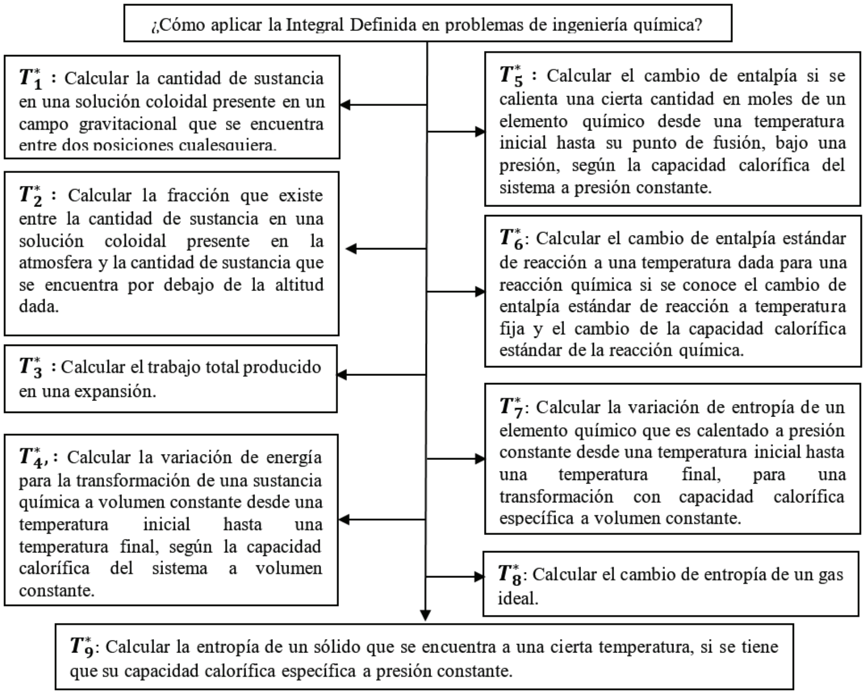


Figura 10. Modelo praxeológico sobre los usos de la Integral Definida en la institución de E(DI).

Para el tipo de tarea $\boldsymbol{T}^*_{\mathbf{8}}$**:** Calcular la cantidad de sustancia, se requiere de la formulación de la integral definida. Con respecto al tipo de tarea $\boldsymbol{T}^*_{\mathbf{2}}$**,** se requiere además de las técnicas de cálculo de una integral definida, es decir, las de la integral impropia.

En el tipo de tarea $\boldsymbol{T}^*_{\mathbf{3}}$, la técnica de solución se apoya en el teorema fundamental del Cálculo.

Por otro lado, en relación a $\boldsymbol{T}^*_{\mathbf{4}}$**,** asociada a la variación de energía, se requiere también del teorema fundamental del Cálculo.

El tipo de tarea $\boldsymbol{T}^*_{\mathbf{5}}$, relacionada con cambio de entalpía y el tipo de tarea $\boldsymbol{T}^*_{\mathbf{6}}$, relacionada con el cambio de entalpía estándar, incluyen como parte de la técnica el uso del teorema fundamental del cálculo. Su tecnología $\boldsymbol{\theta}^*_{\mathbf{5}}$ se sustenta en la ecuación de estado $H(T, p)$. Mientras que el tipo de tarea $\boldsymbol{T}^*_{\mathbf{7}}$, relacionada con la variación de entropía, se le asocia la tecnología $\boldsymbol{\theta}^*_{\mathbf{7}}$ basada en la ecuación de estado $S(T, V)$ y relaciona la primera y segunda ley de la termodinámica. Tanto

$\boldsymbol{T}^*_{7}$ como $\boldsymbol{T}^*_{8}$, también consideran al teorema fundamental del cálculo como parte de la técnica. Finalmente, el tipo de tarea $\boldsymbol{T}^*_{9}$, relacionada con la entropía de un sólido, en una de las etapas de la técnica considera al teorema fundamental del Cálculo y la tecnología $\boldsymbol{\theta}^*_{9}$ se sustenta en la tercera ley de la termodinámica.

Del análisis praxeológico realizado, se tiene que la integral definida se relaciona con los conceptos de presión hidrostática en un líquido, concentración promedio en la capa de una columna de fluido en un campo gravitacional, energía cinética promedio de las moléculas de un gas, trabajo total, variación de la energía, cambio de estado a presión constante de un gas, presión osmótica, entalpía a una temperatura fija, cambio de entropía, cambio de entalpía y fuerza externa. Dichos elementos tienen significados en su campo de acción y son considerados en la programación curricular de disciplinas intermediarias de la especialidad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Se puede verificar que en la organización matemática en la institución de E(M) se desarrollan praxeologías centradas en la resolución de tareas que involucran aplicaciones; sin embargo, se ha identificado que el trabajo se centra en el desarrollo de las técnicas para el cálculo de integrales y la justificación de estas se fundamenta desde la institución productora de saberes matemáticos. De otro lado, en el modelo praxeológico sobre los usos de la integral definida en la institución E(DI) se consideran tareas para cuya solución se requieren modelos previamente aceptados, de modo que las praxeologías matemáticas se convierten en una herramienta, como el caso de la integral definida.

6. RESULTADOS

El análisis de los libros de textos de la matemática escolar, en términos de los elementos práctico-teóricos, ha permitido verificar cómo se aborda el concepto integral definida, en la institución de enseñanza de matemáticas E(M), donde se desarrollan praxeologías centradas en la resolución de tipos de tareas propias de dicha institución, como también consideran tipos de tareas que involucran aplicaciones, esto es, su razón de ser.

Se encontró que la integral definida se relaciona con tipos de tareas relativas al cálculo del área de una región plana, del volumen de un sólido de revolución, del área de una superficie, de la longitud de una curva, del centro de masa, del trabajo efectuado por una fuerza y considera a la integral impropia como una generalización de la integral definida.

El análisis de los capítulos de los dos libros de texto seleccionados en la institución E(DI) ha permitido reconocer la razón de ser de la integral definida en la institución de enseñanza de las disciplinas intermediarias estudiadas; esto es, se han logrado identificar los usos de la integral definida, la forma en la que esta se representa y emplea, así como las justificaciones que sustentan su uso.

El análisis de los libros de textos relacionados con la especialidad de Ingeniería Química, en términos de los elementos práctico-teóricos, ha permitido explicitar la forma en la que se emplea la integral definida, así como su relación entre conceptos propios de las disciplinas intermediarias.

En particular, se ha encontrado que el tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$ es el eje fundamental de la organización matemática en la institución de enseñanza de la integral definida, ya que se relaciona con los otros tipos de tareas identificados.

El generador $\boldsymbol{GT_3}$ permitió identificar los subtipos de tareas específicos $\boldsymbol{t_{3,1}}$, $\boldsymbol{t_{3,2}}$, $\boldsymbol{t_{3,3}}$ y al analizar cuáles estaban también presentes en la institución de E(DI) de la Ingeniería Química se encontró que sólo aparecían tareas específicas del subtipo $\boldsymbol{t_{3,1}}$ y $\boldsymbol{t_{3,2}}$. Esto es, un futuro ingeniero químico, sólo requiere resolver problemas de las disciplinas intermediarias en donde aparecerán como parte de la solución integrales definidas de función polinómicas de grado 3) y de funciones racionales de la forma $\frac{p(x)}{q(x)}, p(x) \neq q(x)$, donde el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$.

También se encontró que los subtipos de tareas $\mathbf{t^*_{3,1}}$, $\mathbf{t^*_{3,2}}$ y $\mathbf{t^*_{3,3}}$, del tipo de tarea $\mathbf{T^*_3}$, así como el tipo de tarea $\mathbf{T^*_7}$ y los subtipos de tareas $\mathbf{t^*_{8,1}}$ y $\mathbf{t^*_{8,2}}$ del tipo de tarea $\mathbf{T^*_8}$ se relacionan con el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{3,2,1}}$ del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{3,2}}$ del tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$. Los tipos de tareas $\mathbf{T^*_4}$, $\mathbf{T^*_5}$ y $\mathbf{T^*_6}$ se relacionan con el subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{3,1}}$ del tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$.

Como resultado, se propone un modelo que articula los usos de la integral definida en ambas instituciones (figura 11).

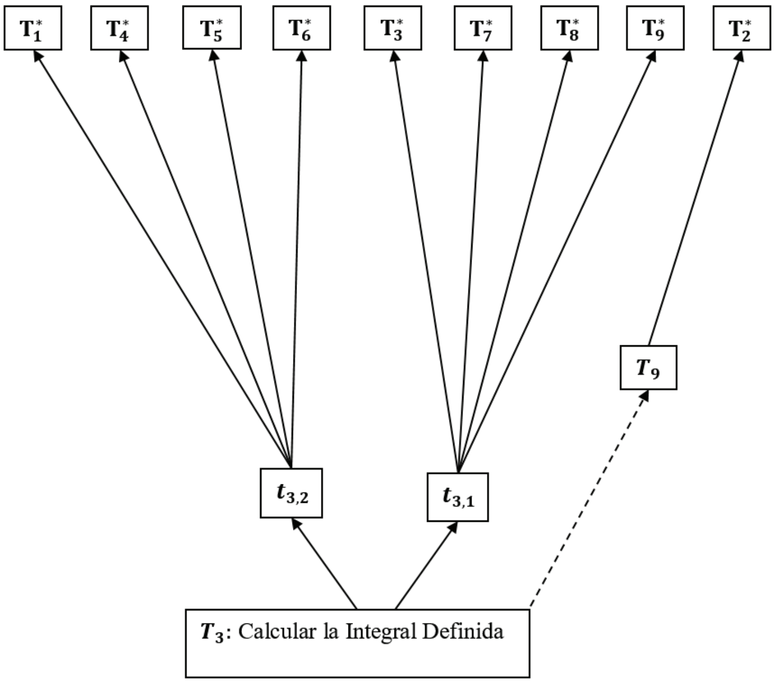


Figura 11. Articulación de las praxeologías para la Integral Definida en las instituciones E(M) y E(DI)

Se ha presentado una organización matemática en la institución de E(M), en donde se relacionan tipos de tareas, para cuya solución se emplean técnicas que se justifican con tecnologías propias de la institución productora de saberes matemáticos P(M). Asimismo, cuando este modelo praxeológico es llevado a la E(DI), se realizan ciertas transformaciones para atender las necesidades propias de las instituciones usuarias. Los modelos praxeológicos cambian de una institución a otra con el propósito de hacer sus propias interpretaciones de los fenómenos que estudian. Se propone incorporar en los cursos de matemáticas tipos de tareas asociados a la Integral Definida pero que presenten una conexión directa con los cursos de las disciplinas intermediarias, como por ejemplo $\boldsymbol{T}^*_{\mathbf{5}}$ y $\boldsymbol{T}^*_{\mathbf{6}}$, lo que permitirá valorar la utilidad de la Integral Definida para resolver tareas que se presentan en su entorno más cercano al profesional.

7. CONSIDERACIONES FINALES

Con respecto al problema planteado, describir y analizar las praxeologías propuestas para la enseñanza de la Integral Definida en los cursos de formación para estudiantes de Ingeniería Química, consideramos que el análisis realizado de los libros de textos del curso de matemáticas (*Matemática Superior I*) de la institución de enseñanza de matemáticas (*E(M))* ha permitido la identificación de praxeologías centradas en la resolución de tipos de tareas propias de la *E(M)*, así como considerar tipos de tareas que involucran aplicaciones: esto es su razón de ser.

Los elementos teóricos brindados por la TAD, específicamente la noción de praxeología como los propuestos por Chevallard (1999); Castela y Romo (2011; Chaachoua, Bessot, Romo y Castela (2019), permitieron identificar las praxeologías en ambas instituciones de enseñanza. En lo que se refiere a los elementos teóricos, como el generador de un tipo de tareas $\boldsymbol{GT}$, podemos señalar que permitieron identificar subtipos de tareas, de tal manera que estas sean explícitas y se lograron a partir de las variables didácticas $\boldsymbol{V_i}$. Se tiene que estos elementos permiten relacionar entre lo específico y lo genérico dentro de la organización de los tipos de tareas, además que generan un conjunto estructurado de subtipos de tareas. El elemento teórico $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{p}}$, que se refiere a las tecnologías prácticas, fue utilizado para argumentar las técnicas que se usan en la resolución de los tipos de tareas que se consideran en las praxeologías de la *E(DI)* y estas son obtenidas en la institución usuaria, a partir de su campo de acción o desde prácticas basadas en los usos continuos que realizan, esto es, de la experiencia

Respecto al análisis praxeológico de la integral definida en textos de la especialidad de Ingeniería Química, se identificaron elementos con representaciones e interpretaciones propias de disciplinas intermediarias. Los tipos de tareas dadas en la institución de *E(DI)* requieren de algunas técnicas descritas en las praxeologías de la institución *E(M)* para su resolución, las cuales son empleadas como herramientas. Además, las justificaciones que se dan en la *E(DI)* son obtenidas de la práctica profesional para atender sus necesidades, lo que contrasta con las justificaciones dadas en la *E(M)* las cuales se basan en demostraciones matemáticas para ser validadas.

Como podemos constatar, los saberes adoptan otras formas al ser usados de una a otra institución; en particular, en la institución *E(M)* la Integral Definida viaja a la institución *E(DI)* como una herramienta para resolver tareas basadas en modelos previamente aceptados en dicha institución y las justificaciones se apoyan en conceptos de la disciplina. Esto confirma que, cuando los saberes transitan por diversas instituciones o cruzan fronteras, encuentran otras formas de estudiar los objetos matemáticos, tal como señala Castela (2016).

Se han identificado relaciones entre los dos modelos praxeológicos propuestos, teniendo como eje conductor el cálculo de integrales definidas. En particular, se reconoce que el concepto de integral definida no solo se centra en la interpretación de área; por tal motivo, se sugiere considerar en la formación de ingenieros tipos de tareas que incluyan las representaciones, interpretaciones y justificaciones propias de las disciplinas intermediarias como las descritas en los tipos de tareas $\boldsymbol{T^{*}_{i}}$. De esa manera, se espera que los estudiantes de Ingeniería Química consideren y valoren la utilidad que tiene la Integral Definida para resolver los tipos de tareas que se proponen en otras disciplinas.

Finalmente, cabe señalar que está pendiente realizar un análisis similar con otras disciplinas intermediarias que formen parte del plan de estudios de los ingenieros químicos.

REFERENCIAS

Bobadilla, M. (2012). Desarrollo Conceptual de la Integral y la Medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico [Tesis sin publicar doctoral]. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía.

Cabañas, M. (2011). El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico [Tesis sin publicar doctoral]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Departamento de Matemática Educativa.

Castela, C., y Romo, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactique des mathématiques, 31*(1), 79-130.

Castela, C. (2016). Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del "boundary crossing". *Educación Matemática, 28*(2), 9-29. https://doi.org/10.24844/EM2802.01

Castela, C. (2017). When praxeologies move from an institution to another: an epistemological approach to boundary crossing. En R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth, y H. Rück, *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline Conference Proceedings* (pp. 418-425). Kassel.

Castellan, G. (1998). *Fisicoquímica (2a ed.).* Addison-Wesley.

Chaachoua , H., y Bessot, A. (2019). La notion de variable dans le modèle praxéologique. *Educação Matemática Pesquisa (EMP), 21*(4), 234-247. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p234-247

Chaachoua, H., Bessot, A., Romo, A., y Castela, C. (2019). Developments and functionalities in the praxeological model. En M. Bosch, Y. Chevallard, J. Garcia, y J. Monaghan, *Working with the anthropological theory of the didactic: A comprehensive casebook.* https://doi.org/10.4324/9780429198168-4

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Crisóstomo, E. (2012). Idoneidad de Procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional [Tesis sin publicar doctoral]. Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática.

Edwards, H., y Penney, D. (2008). *Cálculo con transcendentes tempranas.* Pearson Prentice Hall.

Felder, R., y Rousseau, R. (2003). *Principios Elementales de los Procesos Químicos.* Limusa Wiley.

González-Martín, A., y Hernandes, G. (2017). How are Calculus notions used in engineering? An example with integrals and bending moments. En T. Dooley y G. Gueudet, *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME10) (pp. 2073–2080). DCU Institute of Education and ERME.

González-Martín, A., y Hernandes, G. (2019). How engineers use integrals: The cases of Mechanics of Materials and Electromagnetism. En M. Graven, H. Venkat, A. Essien, y P. Vale, *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 280-287). PME.

Grabiner, J. (2005). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus.* Dover Publications, Inc.

Larson, R., y Edward, B. (2010). *Cálculo 1 (9a ed.).* Mc Graw-Hill.

Ordóñez, L. (2011). Restricciones institucionales en las matemáticas de 2° de bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida. (Tesis inédita doctoral). Universidad de Jaén.

Otero, M., y Corica, A. (2013). Diseño de un modelo praxeológico de referencia para el análisis de prácticas universitarias sobre cálculo. En M. Otero, A. Corica, M. Fanaro, 249 V. Llanos, P. Sureda, y V. Parra, *La teoría antropológica de lo didáctico en el aula de matemática* (pp. 85-100). BUNKEN

Purcell, E., Varberg, D., y Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral.* Pearson Prentice Hall.

Romo-Vázquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Educación Matemática*, pp. 314-338. Grupo Santillana. https://doi.org/10.24844/EM

Turégano, P. (1994). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(2), 233-249. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21531.

Autor de correspondencia:
CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE
Dirección: Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas,
Pontificia Universidad Católica del Perú, Av. Universitaria 1801,
San Miguel 15088 (Perú)
cgaita@pucp.edu.pe