Fenômenos de congruência semântica na representação algébrica de enunciados de problemas de duas equações lineares simultâneas

Semantic congruence phenomena in algebraic representation of problems' statement of two simultaneous linear equations

Luiz Augusto Richit* **Adriana Richit****

Tipo de artículo:

Informe de investigación y ensayos inéditos (Artículo de Reflexión)

Doi: 10.17533/udea.unipluri.346548

Cómo citar este artículo:

Richit, L. A. y Richit, A. (2022). Fenômenos de congruência semântica na representação algébrica de enunciados de problemas de duas equações lineares simultâneas. Uni-Pluriversidad, 22(1), 1–18. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.346548

Recibido: 2021-06-10 / Aprobado: 2021-12-30

Resumo

A Matemática caracteriza-se por processos de mudança de representações denominada por Duval de conversão, porém a representação algébrica de relações matemáticas enunciadas em problemas caracteriza uma dificuldade frequente dos alunos. Para Duval, as principais dificuldades que emergem na conversão entre representações se devem aos fenômenos de congruência semântica. Baseados na Teoria do Registro da Representação Semiótica, analisamos as dificuldades de aprendizagem relacionadas à conversão entre enunciados de problemas e a escrita de equações para problemas cuja solução recai em *'um sistema de equações lineares com duas incógnitas'*. A partir desta delimitação, ilustramos e discutimos as questões subjacentes à tarefa de conversão em Matemática. Assim, buscamos contribuir com as discussões sobre a escrita algébrica para os enunciados dos problemas deste objeto de pesquisa. Por fim, a análise apresentada contribui para as discussões sobre a abordagem desses problemas, oportuniza a compreensão de algumas dificuldades do aluno e aponta a importância do estudo centrado na coordenação de registros semióticos em Matemática.

Palavras-chave:

Registos de Representação Semiótica, Fenômenos de Congruência, Sistema de Equações Lineares de duas Incógnitas, Aprendizagem Matemática.

* Bacharel em Engenharia Ambiental e Sanitária pela Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), Erechim, Rio Grande do Sul, Brasil. Graduando em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre -RS, Brasil.
E-mail: luizaugustorichit@gmail.com

** Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, São Paulo, Brasil. Docente da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), Erechim, Rio Grande do Sul, Brasil
E-mail: adriana.richit@uffs.edu.br

Keywords:

Registers of Semiotic Representation, Congruence Phenomena, System of Linear Equations of two Unknowns, Mathematics Learning.

Abstract

Mathematics is characterized by processes of representations changing called conversion by Duval, but an algebraic representation of mathematical relationships stated in the problems is a frequent difficulty for students. For Duval, the main difficulties that emerge in the conversion between representations are due to semantic congruence phenomena. Based on the Theory of Register of the Semiotic Representation, we analyzed learning difficulties related to the conversion between problem statements and writing of equations for problems with rested solution on ‘a system of linear equations with two unknowns’. From this delimitation, we illustrate and discuss underlying issues of the conversion task into mathematics. Thus, we contribute to the discussions about algebraic writing to the problems’ statements of this research object. Finally, the analysis contributes to the discussions on the approach to these problems, provides an opportunity to understand some of the student’s difficulties, and points out the importance of the study centered on the coordination of semiotic registers in mathematics.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Doi:10.17533/udea.unipluri.346548

1. Introdução

A resolução de sistemas de equações lineares de duas ou mais incógnitas é um tópico do ensino da matemática escolar que envolve, em geral, técnicas de tratamento e operações com matrizes e determinantes, as quais são aprofundadas em disciplinas de cursos universitários, em especial cursos de Matemática (Cury & Bisognin, 2009). Apesar dessas ferramentas operatórias para resolução de sistemas de equações lineares apresentarem um nível de complexidade próprio e serem fontes de dificuldades para os alunos devido à tradição algebrizada que predomina no ensino escolar, uma dificuldade sistemática frequentemente emerge no processo de representar enunciados em equações que compõem sistemas de equações para resolução simultânea (Barros et al., 2012; Brandt & Moretti, 2018; Cataneo & Rauen, 2018; Dias, 2012; Cuquigia Maindo & Cardoso da Silva, 2021; Nobre, Amado & Ponte, 2011). Nesta perspectiva, consideramos relevante discutir, a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, as dificuldades no processo de escrita algébrica de relações em enunciados de situações problemáticas cuja solução recai em sistemas de equações lineares de duas incógnitas.

Esses problemas matemáticos, referidos com *Word Problems*, são constituídos por enunciados em língua natural (na forma escrita ou oralizada), dos quais as quantidades e as relações matemáticas requeridas podem ser extraídas (Verschaffel et al., 2000). *Word Problems matemáticos* compõem um amplo campo de estudo (Verschaffel et al., 2000) e se caracterizam por: (i) descrições verbais de situações problemáticas; (ii) apresentados dentro de um contexto escolar e (iii) a(s) questão(ões) levantada(s) podem ser respondidas pela aplicação de operações matemáticas aos dados numéricos disponíveis no problema (ou derivados deles) (Verschaffel et al., 2020, p. 1).

Assim, as relações entre as quantidades enunciadas nesses problemas precisam ser clarificadas e esse processo de transformação de informação para escrita simbólica, neste caso em linguagem algébrica com uso de incógnitas, pode se mostrar uma tarefa difícil por muitos fatores (Cury & Bisognin, 2009). Expressões do tipo *a mais do que*, *a menos do que*, *vezes mais do que*, que são naturalmente associadas com +, - e x, por exemplo, podem muitas vezes serem convertidas na representação no registro algébrico, em uma operação de *subtração*, *adição*, *divisão* respectivamente, para manterem correspondência entre as duas versões dos objetos no enunciado e na expressão algébrica, isto é, expressar corretamente o que diz o enunciado (Kaur, 2019; Richit & Richit, 2022). Por outro lado, "o funcionamento espontâneo do pensamento segue prioritariamente a congruência semântica" (Duval & Moretti, 2012a, p. 101), isto é, aquela associação natural exemplificada na frase anterior. Esses problemas caracterizam situações com maior exigência matemática para os estudantes, impondo distintos graus de dificuldade para a escrita algébrica correta das equações (Kaur, 2019). Conhecer os sistemas de representação em matemática e as fontes das dificuldades relativas aos problemas de significação, que surgem nas mudanças de representações em matemática, parece, portanto imprescindível.

Nesta perspectiva, dedicamo-nos a apresentar uma discussão, embasada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, acerca dos critérios de congruência para o caso que envolve a conversão entre enunciado e escrita algébrica de sistema de equações lineares de duas incógnitas**.** Esta análise pode contribuir com as discussões sobre os processos de ensino e aprendizagem de equações, pois aprofunda aspectos relacionados às dificuldades na conversão de representações, que neste caso consiste da escrita algébrica para relações matemáticas em enunciados. Para isso, além de uma revisão de literatura da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Seções 2 e 3), selecionamos problemas do tipo '*sistema de equações lineares de duas incógnitas*' (Seção 4), analisando-os a partir da teoria referenciada e reunindo elementos que permitam a compreensão de questões semânticas relativas à conversão entre representações nestes problemas.

2. Sistemas de Representação Semiótica em Matemática

A Matemática caracteriza-se pela manipulação de diferentes sistemas de representação e tratamento de informações que lhe são inerentes (Duval & Moretti, 2012b). À primeira vista, os sistemas de representação podem ser considerados como um conjunto de códigos estruturados a partir de regras de correspondência lógicas e bem fixadas, o que sobremaneira não representa a sua complexidade.

Sob essa ótica, as conversões entre representações de um objeto em diferentes expressões (por exemplo, a escrita de uma expressão algébrica para uma representação gráfica correspondente ou vice-versa) poderiam ser consideradas como simples processos de codificação e decodificação, sendo assim efetuadas de forma simples, rápida e através de regras definidas e sempre aplicáveis. Este, todavia, não é o que se observa na aprendizagem da Matemática, pois existem fatores subjacentes que comandam essa atividade de escrita e reescrita de representações em Matemática (Brandt & Moretti, 2018; Richit, Pasa & Morreti, 2015).

Dessa forma, há uma distinção fundamental entre um sistema de código e um sistema semiótico, e mais especificamente, a diferença entre código e registro. Todo Registro de Representação Semiótica em Matemática cumpre três funções básicas que não podem ser dadas por um sistema de códigos (Duval, 2017). Estas três atividades cognitivas fundamentais são: *formação* de uma representação identificável, *tratamento* e a *conversão* (Duval & Moretti, 2012b).

Um sistema de códigos, diferente de um sistema semiótico, não apresenta, por exemplo, uma função de tratamento interno de informação (Duval, 2004). A função de um 'código' é a codificação de uma informação, baseada na transformação termo a termo a partir de signos de correspondência (Duval, 2004). Esta transformação de uma informação em um código guarda o conteúdo de partida, mas torna inútil toda referência aos dados codificados (Duval, 2011).

Por outro lado, um sistema semiótico permite a interpretação, obtenção de informações, bem como suas modificações de conteúdo, sejam elas internas a um registro (tratamento) como é o caso do desenvolvimento de um cálculo numérico, sejam elas entre representações (conversão), por exemplo, de Equação para Gráfico, de Enunciado para Equação, etc. (Duval, 2004).

A aprendizagem integrativa se sustenta exatamente em relação aos processos de conversão (Duval, 2004) e é especificamente sobre esta que recaem as maiores dificuldades em Matemática, o que se apresenta como um paradoxo (Duval & Moretti, 2012b).

O cálculo em contextos matemáticos, tais como '*4+5=?*' ou '*quanto é quatro mais cinco?*', é uma tarefa que os alunos desempenham com mais facilidade (Verschaffel et al., 2020), porque requer apenas desenvolvimento operatório e que é o priorizado no ensino da Matemática (Duval, 2004). Porém, a resolução de problemas que demandam reformulações e a descoberta de relações entre quantidades, a exemplo de "O fazendeiro Brown tinha cinco vacas e vendeu duas, quantas restaram?" (Langford, 1986, p. 193), são geralmente mais desafiadoras.

A mobilização e a coordenação de diferentes representações para um mesmo objeto são necessárias para resolução de problemas e, todavia, é justamente na conversão entre representações entre registros semióticos diferentes que repousam grande parte dos problemas de aprendizagem (Duval, 2004).

Para ilustrar a importância da conversão na compreensão do objeto matemático basta tomarmos a seguinte situação: perguntar '*Quanto é* *um mais um?'* para uma criança antes da idade escolar (ou sem 'aprendizagem matemática' prévia). Essa soma e sua execução podem parecer espontâneas, mas não é o que ocorre na prática. A compreensão daquilo que o enunciado solicita parece seguir um padrão que se estende à Matemática: são justamente as variações de forma e expressão entre as representações de um mesmo objeto em diferentes registros semióticos que permite a sua conceituação e sua aprendizagem integrativa (Duval, 2004). Essa é a chave do desenvolvimento matemático e de qualquer raciocínio em Matemática. A constante conversão de representações é fundamental e insubstituível à função de aprendizagem em Matemática (Duval & Moretti, 2012b). Na situação exemplificada, além de saber contar, manipular os signos numéricos e realizar somas (tratamento), é necessário o trânsito entre as representações, isto é, a conversão entre representações para obter a resposta.

Todavia, passar uma representação em um registro semiótico à outra não é uma tarefa trivial. Como mencionado, a conversão de representações não é uma simples codificação ou decodificação entre duas informações, porque não há, em grande parte dos casos, correspondência ou regras fixas de equivalência para conversão de representações em dois registros (Duval & Moretti, 2012b). Sobre isso, Duval (2004) nos oferece o seguinte esclarecimento:

> O conhecimento das regras de correspondência entre dois sistemas semióticos diferentes não é suficiente para que possam ser mobilizados e utilizados conjuntamente. O obstáculo maior para realização espontânea desta coordenação é a importância dos fenômenos de não congruência entre as representações produzidas nos diferentes sistemas. (Duval, 2004, p. 30, tradução nossa)

A passagem entre representações de um objeto matemático no que se conceitua por Conversão é intrínseca à Matemática e ao seu desenvolvimento. No entanto, não é uma tarefa evidente porque entram em jogo os fatores de congruência semântica, como apontado por Duval (2004), os quais são discutidos na seção seguinte.

3. Dificuldades na Passagem entre Representações de dois Registros: Critérios de Congruência Semântica

Conforme assinalado anteriormente, a Matemática caracteriza-se pelas conversões de representações entre registros semióticos. Apesar disso, a conversão entre representações não ocorre sempre de forma espontânea e homogênea, de modo que certas dificuldades são manifestadas (Duval, 2004; Duval & Moretti, 2012b). Nesse processo, dois aspectos são considerados inicialmente: não existem e nem podem existir regras para conversão de representações de um objeto em dois diferentes registros (Duval, 2004) e; a operação de mudança de representações pode encontrar barreiras semânticas (Duval, 2004; Duval & Moretti, 2012b).

Apesar disso, a conversão de representações entre registros semióticos oferece, em muitos casos, uma 'economia' de tratamento para resolução do problema. Este é o caso, por exemplo, do cálculo aritmético básico: a notação (seja na base decimal ou não) permite realizar somas de quaisquer números com distintas ordens de grandeza, a partir de propriedades do sistema numérico, o que não pode ser feito a partir da língua natural, com a mesma economia (sem excessiva e saturadora exigência de memória). Para ilustrar, apresentamos o seguinte exemplo:

> *Qual é o total de livros se* ***juntamos uma quantia de livros de*** *cinco mil seiscentos e quarenta e dois* **com** *oito mil duzentos e treze:* {Como somar?}

Ao tomamos a notação numérica, por exemplo, no sistema decimal posicional, a soma fica:

$$5.642+8.213=13.855$$

Desde que haja a correspondência:

"juntamos uma quantia de... com" e *"+";*

"cinco mil seiscentos e quarenta e dois" e *"5.000+600+40+2" = 5.642;*

"oito mil duzentos e treze" e *"8.000+200+10+3" = 8.213.*

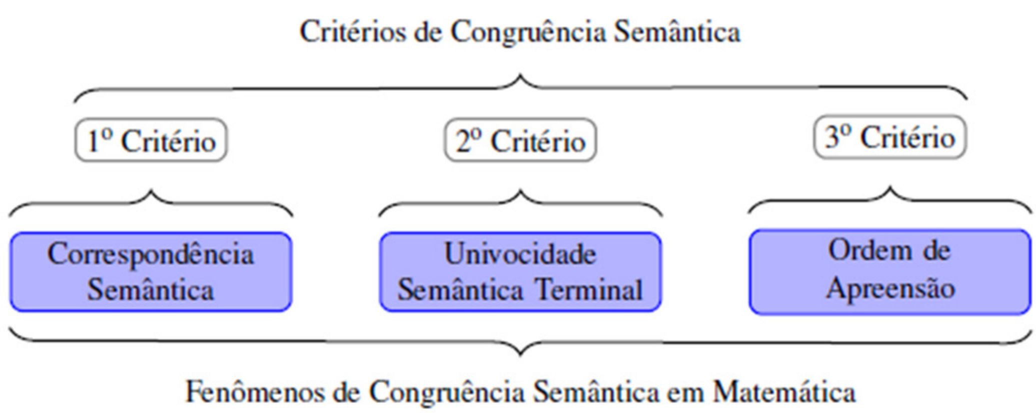
Por outro lado, ao analisarmos a conversão de uma representação podemos evidenciar algumas características: em certos casos a conversão é efetuada com mais facilidade pelos estudantes. Por exemplo, o caso da expressão *juntamos uma quantia de... com* e o símbolo operacional {+} na representação numérica ou a expressão *cinco mil seiscentos e quarenta e dois* e a representação 5642 no sistema decimal posicional.

Este, porém, não é o caso para o número *treze*, no segundo número da soma solicitada: *oito mil duzentos e treze* e 8.213 . Embora haja correspondência entre as duas representações, a palavra treze depende de uma inversão na ordem de apreensão, porque *oito mil* corresponde a 8x1000, assim como *duzentos* a 2x100, mas *treze* não corresponde a, 3×10, já que "*tre*"↔ "3" e "*ze*"↔ "10", mas sim a 10+3 ou 13 (Brandt, 2005).

Em face dessas particularidades na conversão entre representações matemáticas, emerge o que se denomina como fator de congruência e não congruência semântica (Duval, 2004). Estes fatores permitem identificar o grau de 'correspondência' entre duas expressões distintas em registros diferentes na interface de tais processos, isto é, questões relativas à conversão.

Quando esta questão é considerada podem ser formalmente distinguidos três critérios de congruência semântica. Para analisar estes critérios apresentamos o esquema da figura 1, formulado a partir do trabalho de Duval (2004).

Figura 1 *Os três critérios de Congruência Semântica segundo Duval (2004)*



Nota. *Esquema para os três critérios de congruência semântica a partir de Duval (2004): Semiosis y pensamiento humano de título original em francês: Sémiosis et pensée humaine.*

Os critérios representados na figura 1 caracterizam as feições dos fenômenos de congruência e não-congruência que comandam o problema de significação em matemática (Duval & Moretti, 2012a). Estes critérios são: *correspondência semântica*, *univocidade semântica terminal* e *ordem de apreensão das unidades significantes*[1].

Em qualquer processo de conversão de representações entre dois registros se faz necessário à identificação das unidades significantes em cada um dos registros. Isto é, no registro de partida e de chegada, porque a atividade de conversão pressupõe a discriminação dessas unidades significantes, para que estas possam ser postas em correspondência na conversão da representação do registro de partida para o registro de chegada (Duval, 2004).

Esta perspectiva mobiliza o primeiro critério de congruência. *A correspondência semântica das unidades significantes* se refere à *possibilidade de correspondência dos elementos significantes* em cada um dos registros envolvidos, isto é, no registro de chegada e partida (Duval, 2004). Assim, sempre que se puder associar uma unidade significante simples de uma das representações a uma unidade significante elementar em outra representação, haverá correspondência dos elementos significantes (Duval, 2004). Esse é o caso, por exemplo, da conversão de representações entre enunciado em língua natural e simbólica, em (Duval, 2004):

> *"O conjunto de pontos cuja ordenada é superior à abscissa."*

$$y>x$$

Nesse caso, cada unidade significante simples pode ser reduzida a uma unidade significante elementar em cada um dos registros, existindo assim correspondência de tais unidades: *ordenada* e y; *é superior à* e o símbolo relacional " > "; e por fim, *abscissa* e x.

Por outro lado, em muitos casos pode existir ou não uma relação de univocidade entre os elementos significantes. Quando entre duas representações existe para cada unidade significante elementar no registro de partida uma única unidade significante no registro de chegada, diz-se que existe *univocidade semântica terminal* (Duval, 2004). A expressão abaixo ilustra este aspecto:

> *"O conjunto de pontos que possuem uma ordenada positiva."*

$$x>0$$

Embora nesse caso não há uma unidade significante no registro simbólico para unidade *positivo,* e para esse caso não há correspondência semântica, visto que *positivo* é expresso por duas unidades ">" e "*0*", existe univocidade semântica terminal. Isso porque ao termo *positivo,* no enunciado, não lhe corresponde mais do que exclusivamente a paráfrase ">0" no registro simbólico (Duval, 2003, 2004).

Para os casos acima, havendo ou não correspondência semântica e univocidade semântica terminal, a ordem de escrita das unidades significantes no registro de chegada segue a mesma ordem em que são expressos no registro de partida. É sobre a ordem em que as unidades significantes são processadas na conversão entre duas representações que recai o último critério de congruência: *a ordem de apreensão das unidades significantes que compõem as representações do objeto em cada registro* (Duval, 2004). Os dois exemplos anteriores ilustram o caso de mesma ordem de apreensão. Examinemos o exemplo (Duval, 2004):

> "O conjunto de pontos cuja ordenada e abscissa tenham o mesmo sinal."

$$x \cdot y \geq 0$$

Nesse caso não há correspondência termo a termo (mesma ordem de apreensão) entre as expressões. Ou seja, não há correspondência entre as unidades significantes, ao passo que não existe uma unidade no registro simbólico que represente *um mesmo sinal para x e y*. Da mesma forma, não existe univocidade semântica terminal já que ao termo *mesmo sinal* correspondem duas unidades distintas (Duval, 2004):

$$(-,-) \text{ e } (+,+)$$

A compreensão do termo *mesmo sinal*, neste caso, pode solicitar que se recorra à globalização descritiva (Duval, 2004), o que nem sempre é evidente. Para Duval:

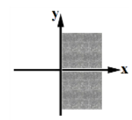
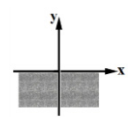
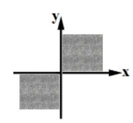
$$\text{“}(-).(-)=(+)\geq 0\text{” e “}(+).(+)=(+)\geq 0\text{”}$$

$$\therefore x \cdot y \geq 0$$

Assim, parece haver a necessidade de um ensino que considere as especificidades de cada registro para aprendizagem da Matemática pelos estudantes. Segundo Duval (2011), a discriminação das unidades significantes de cada registro deve ser objeto de uma aprendizagem específica, centrada no estudo das particularidades de cada registro e que motivem a coordenação destes. Este procedimento é necessário porque os casos particulares de conversão em que se manifestam os fenômenos de não congruência *não se deixam agrupar* (Duval, 2004).

Para ressaltar a importância dos fenômenos de congruência semântica em Matemática e as dificuldades relacionadas à conversão, retomamos os resultados de uma pesquisa realizada por Duval (2004). A pesquisa consistia em solicitar a um enunciado em língua natural a sua representação gráfica e escolher a expressão algébrica[2] correspondente à uma situação gráfica. As porcentagens dos acertos registrados por Duval (2004) para as conversões citadas são informadas na tabela 2.

Tabela 2 *Conversão entre enunciado, escrita algébrica e gráfica a partir de Duval (2004)*

Taxa de acerto (%) para conversão entre registros				
I	II	III	I→III	III→II
			Sombrear/ marcar	Escolher a expressão
1. ... {O conjunto de pontos} que tem uma abscissa positiva.	$x > 0$		67%	51%
2. {...} que tem uma ordenada negativa.	$y < 0$		67%	61%
3. {...} cuja abscissa e ordenada são de mesmo sinal	$x \cdot y \geq 0$		56%	25%

Nota: *Dificuldades na conversão de representações entre registros matemáticos: I→III e III→II segundo Duval (2004, p. 59).*

As taxas de acerto para as conversões I→III e III→II para as linhas 1, 2 e 3 (exceto na linha 3 em III→II) sugerem a proximidade de correspondência entre as representações mobilizadas. A mesma ordem de grandeza dos acertos (%) é um indicativo (Duval, 1988).

A conversão I→III é, nesse sentido, congruente. Para cada região do plano pode-se associar um nome (abscissa, ordenada) e seu valor é dado por um sinal, isto é, positivo e negativo. Assim se pode, a partir de cada termo na expressão discursiva, associar a sua unidade significante elementar do gráfico. Desse modo, há correspondência semântica, univocidade semântica terminal e a ordem de apreensão é neutra segundo Duval (2004).

A passagem III→II é, no entanto, menos congruente, sobretudo na linha 3. A escolha da expressão correspondente ao gráfico entre outras informadas mostra um decréscimo nas taxas de acerto das linhas 1, 2 e expressivamente da linha 3. E isso deve-se à falta de correspondência semântica entre as unidades significantes elementares. A unidade *região positiva no registro gráfico* deve ser parafraseada por '>0' na expressão algébrica e a unidade *região negativa* no registro gráfico deve ser parafraseada como '<0', nas linhas 1 e 2, respectivamente. Assim, a não correspondência entre as unidades significantes elementares fez cair em 6% (67%-61%) e 16% (67%-51%) a conversão III→II para as linhas 2 e 1 respectivamente (Duval, 1988).

A passagem III→II apresenta-se mais custosa para linha 3, e a taxa de acerto pode servir de primeiro indicativo. De fato, a escrita da relação algébrica requer que se conclua que o produto entre as quantidades destacadas graficamente seja positivo, o que não é evidente *a priori*. Há uma redução para 25% de acerto em III→II ou uma redução de 31% (56%-25%) de I→III para III→II. Este é o caso em que nenhum dos três critérios de congruência é seguido (Duval, 1988).

Agora, tomemos outro exemplo, levantado por Duval (2004) e apresentado na Tabela 2:

Tabela 1 *Tarefa de conversão entre expressões referenciais e escrita simbólica*

I	II	I→II	II→I
1. A soma de dois produtos de dois inteiros, sendo os inteiros todos diferentes.	$a \cdot b + c \cdot d$	90%	90%
2. O produto de um inteiro pela soma de outros dois.	$a \cdot (b+c)$	71%	74%
3. A soma do produto de um inteiro com outros dois inteiros.	$a \cdot b + a \cdot c$	48%	87%

Nota. *Contraste de acertos para conversões congruentes e não congruentes e variação de sentido de conversão entre representações (DUVAL, 2004, p. 56).*

As diferenças entre as taxas de acerto para as conversões I→II e II→I entre as linhas 1, 2 e 3 devem ser estudadas a fim de se compreender as diferenças encontradas.

As elevadas porcentagens de acerto nas conversões I→II e II→I, da primeira linha, indicam significativo grau de inferência e correspondência entre as duas representações (discursiva para algébrica e vice-versa). Os símbolos que devem ser escritos e as operações relacionais a serem desenvolvidas são claramente mencionados: *dois... de dois..., todos diferentes*, *soma* e o símbolo "+" como um centro de simetria e os *produtos* distribuídos simetricamente em torno de "+" (Duval, 2004).

Duval (2004) discute a relação entre o termo soma e o símbolo operacional "+" na representação algébrica. Ele esclarece que essa expressão (linha 1) começa por designar a última operação que aparece como um centro de simetria em torno do símbolo "+" e termina por designar as quantidades sobre os quais recai a operação de adição (Duval, 2004).

Assim, quando o *termo soma*, cujo conceito é um dos primeiros a ser ensinado, é associado internamente à adição de dois números e aparece em uma sentença (por exemplo, *soma* de dois números *a* e *b*), a expressão escrita simbolicamente para *a mais b* é facilmente associada (a + b) - de modo que a conversão parece ser mais acessível. Sobre isso Duval (2004) acrescenta: o símbolo "+", que aparece como centro de simetria entre dois números na escrita algébrica (a + b), associa-se perfeitamente ao termo soma no registro discursivo.

A correspondência semântica entre as unidades significantes, a univocidade semântica terminal e mesma ordem de apreensão se revelam através da alta taxa de acerto obtida: 90% seja nos sentidos I→II ou II→I. O mesmo não ocorre para expressões que iniciam designando o termo *produto,* e a redução na taxa de acertos da linha 1 para a linha 2 é um indício pontual.

A relação de correspondência e univocidade entre *um inteiro* e a designação algébrica *a*, *soma de outros dois* e c+b e especialmente o termo *produto* e o símbolo multiplicativo[3] "x" ou "·", não excluem a dificuldade de conversão, justamente em relação a esta última parte. Frequentemente, os alunos não fazem ligação entre *produto* e *multiplicação* entre números, portanto em muitos casos lhes parece difícil ou incompreensível separar o termo produto em uma multiplicação, o que acarreta menor êxito (Eynard--Bontemps & Sibardi, 2006).

Parece haver uma associação entre o termo produto e uma resposta concisa, em outros termos, o valor da multiplicação. Todavia, na representação algébrica, uma operação e seu resultado são dados pela mesma expressão: o produto de n e m não pode ser reduzido ao seu valor, assim $n \cdot m$ representa tanto o produto como a multiplicação, do mesmo modo que $n+m$ indica tanto a adição quanto a soma (Lins & Gimenez, 2005).

Dessa forma, o termo produto, que dá início ao enunciado discursivo, faz referência à segunda operação informada na escrita algébrica (depois do 1º elemento sobre o qual recai a multiplicação). Assim, a ordem de apreensão da unidade significante *produto* no registro algébrico não é a mesma que a discursiva (Duval, 2004), e, portanto, o terceiro critério de congruência é descumprido, o que explica a redução na taxa de acertos em ambos os sentidos de conversão.

Os resultados apresentados para as duas tarefas na linha 3, mostram a singularidade e especificidade de representações entre registros. Enquanto existe congruência direta entre II→I (linha 3), a passagem inversa é mais desafiadora: entre duas representações do mesmo objeto, a conversão em um sentido pode ser congruente, mas o sentido inverso pode não sê-lo (Duval & Moretti, 2012a). Nesse sentido, ao passo que um mesmo símbolo aparece em dois produtos simetricamente distribuídos entre um signo +, há congruência na passagem II→I (linha 3), já que para esse sentido de conversão há correspondência, univocidade e mesma ordem de apreensão. A taxa de êxito de 87% principia-se como uma evidência. Sobre isso, Duval (2004) argumenta que são extremamente congruentes entre si:

(i) A presença de *um mesmo símbolo* "·" (vezes) nos dois produtos e o termo *um inteiro* no registro algébrico e discursivo respectivamente;

(ii) A operação de soma como centro de simetria e o enunciado começando por designar esta operação; e

(iii) *Os outros dois termos distintos* dos produtos em torno de + e a expressão discursiva *outros inteiros.*

Entretanto, a passagem contrária não tem a mesma ordem de facilidade (congruência): *'o produto de'* é algebricamente marcado pela presenta de *'duas multiplicações',* além disso, a expressão '*um inteiro*' se converte algebricamente como a '*dupla presença de uma mesma letra*' (Duval, 2004). A sequência *'soma de **um** produto'* torna--se difícil de compreender e segmentar: "os *dois produtos simetricamente distribuídos* em torno do símbolo de soma *não são mais explicitamente mencionados pela expressão discursiva*" (Duval & Moretti, 2012a, p. 112). A taxa de acerto de 48% constitui-se de um indício dessas dificuldades.

Dessa forma, a passagem entre representações de um objeto matemático caracteriza-se por um conjunto de critérios de correspondência que permitem observar as dificuldades e desafios da tarefa de Conversão. Nesta seção apresentamos, a partir da Teoria dos Registros de Representações Semiótica, os fatores semânticos envolvidos na atividade de conversão de representações entre Registros Semióticos. A partir dela, subsidiamos a discussão específica de problemas de duas equações lineares simultâneas, apresentados na seção seguinte.

4. Dificuldades Semânticas na Passagem entre Enunciado e Escrita de um Sistema de Equações de duas Incógnitas

A resolução de sistemas de equações tem uma abordagem expressiva nas aulas de matemática. Em geral, os alunos conseguem aprender a resolver sistemas de equações (Cury & Bisognin, 2009), mas quando o problema é encontrar as equações relativas à uma situação enunciativa, a tarefa é menos exitosa. Ela não é *exclusivamente de tratamento matemático*, quer dizer, ela não ocorre pela aplicação de tratamentos e procedimentos rotineiros internos ao registro em que a representação é mobilizada (registro algébrico nesse caso).

Realizar esse tipo de abordagem (resolução de problemas) é fundamental, e não apenas para dar sentido ou atestar a necessidade do estudo de métodos de resolução de sistemas de equações; ela é igualmente importante para atividade de coordenação de registros de representação e a compreensão em Matemática (Duval, 2004; Duval & Moretti, 2012a, 2012b; Duval, 2017).

Apesar disso, a conversão de representações matemáticas de um enunciado em língua natural a um conjunto de equações algébricas (nesse caso debateremos a conversão para duas equações lineares, duas incógnitas) depende de alguns fatores de determinam o grau de dificuldade nesse processo. Soneira Calvo et al. (2017) acrescenta que essa passagem da linguagem natural para a algébrica envolve pelo menos dois tipos de competências: a primeira delas é gerenciar estruturas sintáticas da língua natural e a segunda é articular mentalmente os conceitos matemáticos implícitos nos enunciados (Soneira Calvo et al., 2017).

Um enunciado pode ter diversas grandezas ou quantidades informadas, mas para que esse possa ser transformado em um sistema de equações que possa ser resolvido, ele deve ser escrito em função das *mesmas incógnitas* e as relações entre elas devem ser expressas nas *mesmas grandezas* (homogeneidade) (Didierjan et al., 1996). Portanto, as dificuldades são relativas tanto aos fatores de congruência semântica como discutimos anteriormente, quanto à heterogeneidade das incógnitas envolvidas.

Essas quantidades desconhecidas são chamadas *denominações básicas* (*dénomination de base*), termo (ou os termos) que designa ou representa uma quantidade desconhecida através de letras/incógnitas (Didierjan et al.,1996). Segundo o autor, um enunciado pode, portanto, fazer referência à duas *denominações básicas* ou quatro *denominações básicas*, ou seja, se referir à duas quantidades desconhecidas diferentes ou a quatro, sendo que nesse último caso é necessário reduzi-las à duas *denominações básicas*, como exemplificaremos a seguir.

Para que um sistema de duas equações possa ser escrito na forma algébrica a partir do enunciado de um problema, geralmente se requer que sejam informadas quatro quantidades desconhecidas sendo que estas devem ser expressas através de unicamente duas *denominações básicas*, por exemplo, x e y (Didierjean et al., 1996). Entretanto, converter um enunciado para um sistema de equações, segundo Didierjean et al. (1996), relaciona-se à:

- Identificação e designação de quantidades desconhecidas descritas no enunciado e a conversão de sua expressão linguística para sua expressão algébrica;

- Identificação das relações que são feitas entre essas quantidades desconhecidas no enunciado, articulando as quantidades desconhecidas através de relações de igualdade.

Assim, as dificuldades da conversão de enunciado para equações têm origem na não congruência semântica no próprio processo de conversão entre representações e, também, quando se é necessário reduzir as diferentes quantidades informadas à mesma *denominação básica* (quando estas não são as mesmas duas quantidades desconhecidas descritas no enunciado).

Para compreender a complexidade dos problemas de conversão de enunciado para equação(ões) e, assim, compreender as dificuldades matemáticas do aprendizado de sistemas de equações, mesmo que nesse caso para equações lineares de duas incógnitas, tomaremos alguns exemplos.

Para iniciar essa discussão consideramos um exemplo em que as quatro quantidades informadas se reduzem diretamente à duas *denominações básicas*, isto é, não é necessário reformular as quantidades nas mesmas *denominações básicas*. O exemplo utilizado aqui com algumas adaptações[4], é apresentado por Duval e Moretti (2012a):

> *Um homem tem 23 anos a mais do que seu filho, a soma das idades dos dois é 51 anos. Calcular as idades.*

Existem somente duas incógnitas solicitadas e informadas nas duas relações enunciadas:

elas são as duas *denominações básicas*. Assim, ≪*idade de um homem*≫ e ≪*x*≫formam uma *denominação básica*, do mesmo modo que ≪*idade do seu filho*≫ e ≪*y*≫ formam a segunda. Nesse caso, ambas as denominações básicas estabelecem uma relação de correspondência de unidades significantes entre os registros discursivo e algébrico, o que faz cumprir o critério de correspondência semântica. Para as quantidades mencionadas, a primeira equação fica:

$$x\text{-}23=y$$

$$x=y+23$$

Apesar disso, nenhuma delas é congruente ao enunciado à medida que, na primeira equação, a expressão no enunciado *ter ... anos a mais* se converte em "–"; e na segunda, a ordem descrita na equação não corresponde a ordem de enunciação das informações. De fato, a possibilidade da expressão "*anos a mais"* converter-se em "+" ou "-" na representação algébrica demonstra que a unidade significante "*anos a mais"* viola a univocidade semântica terminal. Além disso, embora a primeira equação (x-$23=y$) obedeça a ordem de apreensão das quantidades enunciadas, a segunda ($x=y+23$) envolve uma mudança na ordem descritiva do enunciado violando o terceiro critério: mesma ordem de apreensão. Elas são, no entanto, referencialmente equivalentes ao enunciado e exprimem a situação dada por ele. Para Duval e Moretti (2012b):

- x-$23=y$, se expressa como: a idade do homem menos 23 é igual à idade do filho;
- $x=y+23$, se expressa como: a idade do homem é igual à idade do filho mais 23.

Sendo nenhuma dessas paráfrases congruentes ao enunciado *Um homem tem 23 anos a mais do que seu filho* (Duval & Moretti, 2012a). De fato, cada uma dessas duas expressões se deduz a partir de uma reformulação do enunciado, isto é, uma "operação de tratamento discursivo" (Duval, 2017, p. 45) característica da variedade de possíveis tratamentos próprio da língua natural (Posada & Villa-Ochoa, 2006). Assim, ao transformar a sentença em outro enunciado equivalente, a escrita algébrica correspondente fica congruente à nova declaração do enunciado (por exemplo, "a idade do homem é a idade do filho MAIS anos" se converte algebricamente em $x=y+23$, com todos os três critérios de congruência cumpridos). Portanto, não existe congruência entre o enunciado do problema e essas novas equações, embora as reformulações discursivas sob os enunciados os tornem congruentes com as expressões algébricas.

A segunda equação ($x+y=51$), em contrapartida, é congruente ao enunciado (*a soma das idades dos dois é 51 anos*) já que o termo soma se converte em um símbolo de simetria no registro algébrico (+), como já discutido na Seção 2. Assim, o sistema[5] fica:

$$\begin{cases} x\text{-}23=y \\ x+y=51 \end{cases}$$

Além disso, como os alunos geralmente são preparados para aplicar tratamentos operatórios que resolvem sistemas lineares por meio de estratégias como substituição ou adição/subtração das equações, a resolução desses sistemas muitas vezes parece ser a parte mais acessível da tarefa.

Na sequência tomaremos dois exemplos adaptados de Didierjean et al. (1996) que apresentam dificuldade quanto a escrita das equações devido, especialmente, ao número de quantidades desconhecidas ser maior do que a condição de *duas denominações básicas* necessárias para se resolver um sistema dessa natureza. O primeiro exemplo constitui da seguinte questão:

> *Uma criança tem 15 fichas brancas e 12 fichas pretas. Sabe-se que as fichas de mesma cor têm o mesmo diâmetro. O diâmetro de uma ficha branca mede 6 milímetros a mais do que o diâmetro de uma ficha preta. A fila das 15 fichas brancas alinhados lado a lado excede em 288 milímetros a da linha formada pelas 12 fichas pretas alinhadas lado a lado. Qual é o diâmetro de uma ficha branca?* (Didierjean et al., 1996, p. 42)

Para resolver este problema é necessário identificar e denominar incógnitas (*denominações básicas*): Assim, ≪diâmetro da ficha branca≫ e ≪b≫ , e ≪diâmetro da ficha preta≫ e ≪p≫ constituem as unidades significantes que

Doi:10.17533/udea.unipluri.346548

relacionam as incógnitas do enunciado e da escrita algébrica. A próxima tarefa é expressar as relações dadas entre as incógnitas em equações. É essa passagem que pode ser mais desafiadora. Assim:

O diâmetro de uma ficha branca mede 6 milímetros a mais do que o diâmetro de uma ficha preta

Se expressa algebricamente como:

$$b - 6 = p$$

Nessa conversão, a equação não é semanticamente congruente ao enunciado, à medida que a expressão *mede... a mais do que* se converte no símbolo *menos* (–) na escrita algébrica. A expressão $b + 6 = p$ é, ao contrário, congruente, pois tem correspondência semântica, univocidade semântica terminal e mesma ordem de apreensão, ainda que não faça referência à situação enunciativa*.* Embora nesse caso é possível estabelecer uma relação de correspondência semântica entre unidades descritivas do enunciado e aquelas mobilizadas na representação algébrica, o termo '*a mais do que*' pode ser convertido tanto como uma presença do sinal de *menos* ($b-6=p$) como de *mais* ($b=p+6$) indicando que não há univocidade semântica terminal na representação algébrica do enunciado. Além disso, a apreensão que segue a ordem de enunciação atribui um sinal de *menos* na equação algébrica ($b-6=p$) para o termo *a mais do que* embora seja naturalmente associado à uma adição. A equação $b=p+6$ mantém a associação natural do termo "*a mais do que"* com a adição de +6 e, entretanto, não segue a ordem de apreensão das informações do enunciado. De fato, a quantidade "*6 a mais"*, mencionada entre os dois diâmetros incógnitos no enunciado, aparece como última informação na equação ($b=p+6$). Essas barreiras semânticas demonstram a complexidade da tarefa de escrita de equações a partir de enunciados.

O mesmo ocorre para a conversão do enunciado para equação no trecho abaixo (tomando ≪*medida da fila de fichas brancas* -f_b≫ e ≪ *medida da fila de fichas pretas* -f_p≫):

A fila das 15 fichas brancas alinhadas lado a lado excede em 288 milímetros a da linha formada pelas 12 fichas pretas alinhadas lado a lado.

Representada por:

$$f_b - 288 = f_p$$

Desse modo:

$$\begin{cases} b - 6 = p \\ f_b - 288 = f_p \end{cases}$$

E que não é possível resolver: *duas* equações e *quatro* incógnitas! Isto é, para as quatro quantidades temos quatro *denominações básicas* (*b, p*, f_b e f_p), quando deveriam ser apenas duas. Assim, é necessário parafrasear:

De: A fila das 15 fichas brancas alinhadas lado a lado.

Para: *O comprimento da linha formada pelos 15 diâmetros das fichas brancas alinhadas.*

E então, representar algebricamente:

f_b como *15b,* isto é $f_b = 15b$

Do mesmo modo, para o comprimento da linha formada pelas 12 fichas pretas:

f_p como *12p,* isto é $f_p = 12p$

O que torna o sistema de quatro quantidades desconhecidas um sistema em função de duas *denominações básicas*, a propósito *b* e *p*:

$$\begin{cases} b - 6 = p \\ 15b - 288 = 12p \end{cases}$$

E que é perfeitamente resolúvel, seja por adição, substituição, escalonamento, iterativamente ou por inspeção[6].

Nesse caso, a reescrita da equação $f_b - 288 = f_p$ para $15b - 288 = 12p$ depende da aplicação de um operador multiplicativo que relaciona o número de fichas e seu diâmetro para o total de fichas pretas e brancas. Segundo Duval e Moretti (2012a), problemas que envolvem relações multiplicativas são usualmente mais acessíveis, pois o tratamento operatório requerido envolve a aplicação direta desse operador e que mantêm coerência com o seu significado de formulação ($f_b = 15\, fichas \times\, b \frac{mm}{ficha\ branca}$ e $f_p = 12\, fichas \times\, p \frac{mm}{ficha\ preta}$). Por isso, esse tipo de escrita parece ser mais acessível aos alunos se comparadas à outras relações que envolvem uma inversão do operador multiplicativo. Além disso, Duval e Moretti(2012a) observaram que os alunos geralmente realizam reformulações discursivas que tornam o enunciado congruente à sua representação algébrica (Duval & Moretti, 2012a), que nesse caso envolve a reescrita de f_b e f_p em função de *b* e *p*. Por exemplo, a reformulação do enunciado para '*O comprimento total da fila de fichas é igual ao número de fichas vezes o diâmetro de cada ficha*' (nesse caso, $f_b = 15b$ e $f_p = 12p$). Com isso, essa reformulação permite a mesma ordem de apreensão dos elementos significantes, estabelece uma correspondência semântica entre enunciado e equação e mantém a univocidade semântica terminal.

Por outro lado, a dificuldade pode ser mais ampla quando as incógnitas mencionadas no enunciado designam quantidades que não são homogêneas entre si (por exemplo, no primeiro caso todas se referiam a idades e no segundo à medidas) e se é necessário prosseguir com uma transformação interna a partir dos dados informados a fim de se obter uma relação entre as quantidades. Um segundo exemplo, adaptado de Didierjan et al. (1996), pode ilustrar essa situação:

> *Uma motociclista sobe uma colina a uma velocidade de 15 metros por segundo; e em seguida, desce de volta pelo outro lado da colina com velocidade de 21 metros por segundo. O percurso total durou 270 segundos. E a subida tem 126 metros a mais do que a descida. Quanto tempo durou a subida?*

Problemas dessa natureza, em que as quantidades desconhecidas são de grandezas diferentes (nesse caso espaço e tempo), frequentemente trazem mais dificuldades de compreensão para os alunos, porque há quatro incógnitas envolvidas, a saber: ≪tempo de subida≫, ≪tempo de descida≫, ≪distância de subida≫ e ≪distância de descida≫ que se relacionam em duas equações. É necessário reduzir duas delas às outras duas *denominações básicas*.

A nova designação se faz em razão de um princípio multiplicativo, isto é, em função de uma relação de multiplicação de duas grandezas de natureza diferentes: sempre que estiverem envolvidas quantidades contínuas se é necessário recorrer a um processo multiplicativo entre grandezas diferentes para redefinir duas das quatro incógnitas em função de duas *denominações básicas* (Didierjean et al., 1996).

Para a situação acima podemos expressar as distâncias em função das *denominações básicas* ≪tempo de subida≫ e ≪tempo de descida≫, assim:

- Distância de subida é reescrita em função do tempo como *o tempo para percorrer a distância de subida com uma velocidade de 15 m/s*.

- Distância de descida é reescrita em função do tempo como *o tempo para percorrer a distância de descida com uma velocidade de 21 m/s.*

A primeira conversão (com ≪tempo de subida - t_1≫ e ≪tempo de descida - t_2≫) é:

O percurso total durou 270 segundos.
$\rightarrow t_1 + t_2 = 270$

A segunda conversão (com ≪distância de subida - d_1 ≫ e ≪distância de descida - d_2≫) é:

E a subida tem 126 metros a mais do que a descida. $\rightarrow d_1 - 126 = d_2$

Que envolve as considerações precedentes envolvendo o termo comparativo '*a mais do que*' nos problemas apresentados e as barreiras semânticas envolvidas na representação algébrica dessas relações comparativas. Apesar disso, para resolver o problema é requerido, por exemplo, reescrever as distâncias em função do tempo, obtendo-se:

$$d_1 = 15t_1$$
$$d_2 = 21t_2$$

Essa redesignação corresponde à noção de velocidade, isto é, v=d/t ou d=vt. A utilização dessa relação pode se apresentar mais ou menos espontânea entre estudantes, tenha ou não já sido abordada no ensino. Substituir uma grandeza em função de uma relação entre outras pode

Doi:10.17533/udea.unipluri.346548

ser difícil para muitos alunos, porque, segundo Duval e Moretti (2012a), não há congruência semântica entre a substituição de uma grandeza por uma expressão para ela em função de uma relação de outras. Apesar disso, sempre que se informa a velocidade e se solicita a distância percorrida para um tempo informado (ou mesmo não informado), há uma relação direta:

a metros → *b segundos* (velocidade informada);

x metros → c segundos (distância solicitada, tempo decorrido).

Para explicar essa associação intuitiva entre distância percorrida e velocidade, assim como no problema anterior, empregar o operador multiplicativo parece coerente com a própria noção de velocidade. Dessa forma, escrever $d_1=15t_1$ e $d_2=21t_2$ associa-se perfeitamente à interpretação discursiva "a distância percorrida total é igual à velocidade vezes o tempo de percurso", no qual a velocidade constante é um operador multiplicativo que indica justamente a distância percorrida por unidade de tempo. Como mencionado anteriormente, os alunos usualmente empregam reformulações que permitem associar algebricamente representações congruentes. Assim, é possível obter reformulações discursivas de enunciados que, representados algebricamente, cumpram os critérios de congruência semântica (todos ou parte deles), como é o caso dessa formulação discursiva equivalente.

Por outro lado, quando é solicitado o tempo para uma distância (incógnita ou não), ocorre uma inversão:

a metros → *b segundos* (velocidade dada)

c metros ← t (distância percorrida, tempo solicitado).

A primeira parte corresponde à noção de velocidade: $v=d/t$ assim se se solicita a distância percorrida a partir da velocidade faz-se: $d=v \cdot t$ já que a distância toma sentido como $v \cdot t$. Apesar disso, para o cálculo do tempo é necessário uma inversão da ordem de interpretação (setas opostas acima) com maior exigência matemática. Dessa forma, os alunos se deparam com um problema complexo, a exemplo desta última situação – a mesma situação pode ser observada quando estuda-se o conceito de densidade (física e química), por exemplo. De fato, os alunos dificilmente priorizam reescrever t_1 e t_2 em função de d_1 e d_2 ao resolverem problemas como o último exemplificado. Enquanto a distância decorre da aplicação do operador *velocidade* vezes o tempo, nesse caso requer-se que o mesmo operador seja aplicado de forma inversa, pois para obter o tempo é requerido dividir a distância pela velocidade. Assim, há uma inversão da aplicação do operador multiplicativo e da sua correspondência semântica com a operação a ser empregada (dividir ao invés de multiplicar).

Assim, finalizando este último problema discutido neste trabalho, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 270 \\ 15t_1 - 126 = 21t_2 \end{cases}$$

que é formado por duas equações e duas incógnitas, e que pode ser resolvido[7] por tratamentos operatórios próprios do ensino da matemática escolar.

A discussão desenvolvida neste trabalho procurou explicitar e compreender as dificuldades da conversão de enunciados em escrita algébrica de equações. Além disso, evidenciamos a relevância da conversão entre representações na resolução de problemas e para a aprendizagem dos alunos em Matemática. A compreensão dos desafios desse processo indica, dependendo das dificuldades semânticas, uma situação de sucesso ou insucesso na atividade matemática de escrita de equações na forma algébrica, como preconizado por Duval (2004) e Duval e Moretti (2012b).

As dificuldades semânticas prendem-se à uma dimensão-chave na Matemática, que deve ser considerada no ensino: realizar a conversão da representação de um objeto matemático de um registro semiótico para outro não é uma tarefa literal, porque essa mudança não é uma simples codificação ou decodificação entre duas informações. Dessa forma, é preciso que o ensino considere as particularidades da conversão entre representações em Matemática, neste caso ilustrado para o objeto de pesquisa discutido.

4. Considerações Finais

Nesta discussão, analisamos problemas matemáticos que recaem em um '*sistema de equações lineares de duas incógnitas'* fundamentados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Com base na teoria referenciada, retomamos os critérios de congruência semântica na conversão de representações de objetos matemáticos e os discutimos com relação ao nosso objeto de pesquisa. Como resultado, uma abordagem exclusiva para as dificuldades semânticas na escrita de equações para enunciados em problemas do tipo 'sistema de equações lineares de duas incógnitas' foi apresentada. Além disso, evidenciamos que o processo de conversão tem seus próprios inconvenientes, embora seja essencial para compreensão e resolução de problemas. As barreiras semânticas envolvidas durante o processo de conversão demanda uma atenção especial do professor em seu ensino, pois precisa considerar a complexidade da coordenação de representações em matemática. Dessa forma, este estudo, constitui-se de material de apoio para reflexão e planejamento durante o ensino do tópico já que discute as dificuldades na resolução de problemas que envolvem a conversão entre enunciado e escrita de equações (para problemas cuja solução recai em equações lineares de duas incógnitas).

Embora a análise aqui apresentada restrinja-se à manipulação dos enunciados e escrita de equações algébricas, abordagens diferenciadas podem ser empregadas para representação do conteúdo matemático desses enunciados e sua resolução. Um exemplo de estratégia não-algébrica para resolução de problemas é o mais recentemente popular Modelo de Barras de Singapura (*'Model' Method*) que permite representar relacionamentos matemáticos de forma pictórica. Da sua aplicação, uma análise das dificuldades na conversão *enunciado – modelo pictórico* se constitui uma perspectiva investigativa que possivelmente pode complementar e enriquecer a discussão proposta neste texto.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq pelo apoio financeiro (Processo: 305476/2020-3) e aos revisores anônimos pelas acuradas sugestões de aprimoramento para versão final do manuscrito.

Notas

1. É importante compreender que mesmo que o termo *unidade* faça referência ou possa adquirir um sentido de segmentação em 'partes individuais', uma unidade significante pode ser tanto uma palavra ou um símbolo, como um conjunto destas (Duval, 2004).
2. A conversão I→III consistia em marcar ou sombrear a região no plano cartesiano que correspondia à situação dada no registro discursivo, enquanto a passagem III→II solicitava à escolha da expressão, entre outras informadas (y>x, y=-x, y=x, x>0, y<0, x.y<0 e x.y>0...) que correspondia à situação gráfica dada. Além disso, apresentamos apenas três das 7 'perguntas' originalmente analisadas em Duval (2004).
3. Tome-se o termo produto, neste trabalho, por exclusivamente a *multiplicação de escalares*, não havendo, deste modo, a distinção entre "·" e "x".
4. O problema original apresentado por Duval & Moretti (2012a) era formulado através da relação entre as idades de: um homem e de seu pai, um homem e seu filho e a soma das três idades. Para esse caso teríamos três incógnitas desconhecidas e três *denominações básicas*, por exemplo: ≪*idade de um homem - x*≫; ≪*idade do seu pai - p*≫ e ≪ *idade do seu filho - y*≫.
5. A solução para as idades do pai (x) e do filho (y) neste problema é, respectivamente, 37 e 14 anos.
6. Os valores de *b* e *p*, solução do sistema, são respectivamente 72 e 66.
7. A solução para o sistema é $t_1 = 161$ segundos e $t_2 = 109$ segundos.

Referências

Barros, P., Fernandes, J. A., & Mendes Araújo, C. (2012, Outubro 6-7). Raciocínios desenvolvidos na verificação das soluções de sistemas de equações lineares [Conference Paper]. Seminário de Investigação em Educação Matemática-XXIII SIEM, Lisboa, Portugal. http://hdl.handle.net/1822/20670.

Brandt, C. (2005). *Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração* [Tese de doutorado, Universidade de Santa Catarina] Repositório Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina. https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/103059.

Brandt, C. F. & Moretti, M. T. (2018). Aprendizagem da álgebra segundo Raymond Duval. *Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática, 2*(1), 1-26. https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2018.v.2.n.1.19419.

Soneira Calvo, C., Souto Salorio, M. J., & Tarrío Tobar, A. D. (2017). Distintas competencias en el proceso de conversión del lenguaje natural al algebraico. Revista Portuguesa de Educação, 30(2), 89–110. https://doi.org/10.21814/rpe.10096.

Cataneo, V. & Rauen, F. (2018). Registros de representação semiótica, relevância e conciliação de metas: uma análise do capítulo Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas do livro Matemática compreensão e prática de Ênio Silveira. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *20*(2), 140-170. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i2p140-170.

Cury, H. & Bisognin, E. (2009). Análise de soluções de um problema representado por um sistema de equações. *Boletim de Educação Matemática*, *22*(33), 1-21. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221900002.

Eynard-Bontemps, A., & Sibardi, H. (2006). *Difficultés des élèves face à un énoncé mathématique: origines et solutions* [online].

Dias, R. (2012). *A aprendizagem de sistemas de duas equações a duas incógnitas no 8.º ano de escolaridade* [Doctoral dissertation, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. Repositório Institucional da Universidade de Lisboa. https://hdl.handle.net/10451/8103.

Didierjean, G., Dupuis, C., Duval, R., Egret, M., Kremer, D., & Robert, G. (1996). A propos de charades dont la solution est un système d'équations à deux inconnues. *Petit x*, *44*, 35-48. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR97027/IGR97027.pdf.

Duval, R. (1988). Graphiques et équations: l'Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1, 235-253. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ST/IST88014/IST88014.pdf.

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: S.D.A. Machado. (org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica* (pp. 1-33). Papirus.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. http://www.scielo.org.co/scieloOrg/php/reflinks.php?refpid=S1657-92672008000300021000005&lng=pt&pid=S1657-92672008000300021

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo: *PROEM*. https://www.redalyc.org/pdf/894/89424874015.pdf

Duval, R. & Moretti, T. (2012a). Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. *Revista Eletrônica de Educação Matemática,* 7(1), 97-117. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p97.

Duval, R. & Moretti, T. (2012b). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(2), 266-297. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking -The registers of semiotic representations*. Springer International Publishing. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-56910-9.

Kaur, B. (2019). The why, what and how of the 'Model' method: A tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems. *ZDM*, *51*(1), 151-168. https://doi.org/10.1007/s11858-018-1000-y.

Langford, P. (1986). Arithmetical word problems: Thinking in the head versus thinking on the table. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(2), 193-199. https://doi.org/10.1007/BF00311520.

Lins, R. & Gimenez, J. (2005). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Papirus Editora. https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/153/136

Cuquigia Maindo, C. M., & Cardoso da Silva, P. C. (2021). Análise de resolução de sistemas lineares com duas incógnitas aos alunos da 9ª classe. *Revista Ensino de Ciências e Humanidades-Cidadania, Diversidade e Bem Estar-RECH*, *5*(1), 403-430. https://periodicos.ufam.edu.br/index.php/rech/article/view/8512/6064.

Nobre, S., Amado, N., & Ponte, J. (2011, Maio, 7-8). Representações na aprendizagem de sistemas de equações [Conference Paper]. Encontro de Investigação em Educação Matemática-EIEM2011, Póvoa de Varzin, Portugal. https://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/14.Nobre_Amado_Ponte.pdf.

Posada, F. & Villa-Ochoa, J. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. In: F. A. Posada, G. Obando. (Eds.). *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico. Didáctica de las Matemáticas*, *2*(2). (pp. 127-163). Gobernación de Antioquia. https://funes.uniandes.edu.co/1770/1/capitulo_proyantioqu.pdf.

Richit, L., Pasa, B. & Moretti, M. (2015). Análise do Processo de Aprendizagem de Geometria de Estudantes do Programa de Iniciação Científica: perspectivas a partir da teoria dos registros semióticos. *Acta Scientiae*, *17*(3), 651-671. https://posgrad.ulbra.br/periodicos/index.php/acta/article/view/1333.

Richit, L. & Richit, A. (2022). O Modelo de Barras de Singapura na Resolução de Problemas Aritméticos e Algébricos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 36*(73), 697-724. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05.

Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Sweet & Zeitlinge. https://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm011r2.pdf

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & van Dooren, W. Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM Mathematics Education* 52, 1–16 (2020). https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4.