Lecturas Matemáticas
Volumen **43** (2) (2022), páginas 73-88
ISSN 0120-1980

Métodos computacionales para demostrar identidades combinatorias

Computational methods to prove combinatorial identities

José L. Ramírez y Fabio A. Velandia

Universidad Nacional de Colombia, Colombia

Resumen. El objetivo de este artículo es introducir los algoritmos de Gosper, Wilf y Zeilberger los cuales permiten evaluar sumas combinatorias, es decir sumas que involucran coeficientes binomiales, factoriales y en general términos hipergeométricos. Adicionalmente, mostraremos la forma en la que se pueden ejecutar estos algoritmos con ayuda del software *Mathematica*®. Los ejemplos que hemos desarrollado han sido tomados de la sección de problemas de la revista *The American Mathematical Monthly* en el periodo comprendido entre los años 1997 y 2020.

***Palabras clave*:** Identidades combinatorias, algoritmo de Gosper, algoritmo de Zeilberger, Método WZ, *Mathematica*®.

Abstract. The aim of this paper is to introduce the algorithms of Gosper, Wilf, and Zeilberger. These allow us to evaluate combinatorial sums, that is, sums that involve binomial coefficients, factorials, and hypergeometric terms (in general). Additionally, we show how the mentioned algorithms can be implemented in the software tool *Mathematica*®. The examples that we have worked out have been taken from the problems section of the journal *The American Mathematical Monthly* , from the period between 1997–2020.

***Key words*:** Combinatorial identities, Gosper's algorithm, Zeilberger's algorithm, WZ method, *Mathematica*®.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 05A19; Secondary 68V05.

1. Introducción

Un problema típico en los cursos iniciales de matemáticas consiste en conjeturar y demostrar igualdades de la forma $A = B$, donde A es alguna suma que involucra términos como coeficientes binomiales y B es una fórmula *cerrada* o una nueva suma. Un ejemplo es la suma de los coeficientes binomiales $\binom{n}{k} := n!/(k!(n-k)!)$, variando el entero k entre 0 y n. El valor de esta suma se puede obtener haciendo una sustitución en el teorema del binomio, de lo cual se obtiene que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad n \geq 0.$$

Otro ejemplo es la suma equivalente a la de los recíprocos de los coeficientes binomiales:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1}.$$

Este tipo de problemas se han vuelto hoy en día rutinarios a partir de algunos algoritmos como el Algoritmo de Gosper [6], el Algoritmo de Zeilberger [14] y el método WZ [13]. El problema original de desarrollar algoritmos computacionales para simplificar sumas que involucren coeficientes binomiales fue propuesto por Donald Knuth, en el Ejercicio 1.2.6.63 de su libro *The Art of Computer Programming, Volume 1: Fundamental Algorithms*.

Este artículo tiene como objetivo introducir a los lectores en este tipo de técnicas. Primero mostraremos una breve introducción a los algoritmos (para más detalles ver [10, 8]) y luego de eso nos concentraremos en resolver algunos problemas de la revista *The American Mathematical Monthly* (AMM), tomados del periodo comprendido entre los años 1997 y 2020. Un trabajo similar fue realizado en [9] para problemas de la AMM para el periodo comprendido entre los años 1978 y 1997. Hay que resaltar que el año en que apareció el algoritmo de Gosper, pionero en este tipo de técnicas, es justamente el año 1978.

Para cada uno de los algoritmos y en cada uno de los ejemplos desarrollados le mostraremos al lector cómo utilizar el software *Mathematica*® para abordar la solución de los problemas.

2. Algoritmo de Gosper

El *Teorema Fundamental del Cálculo* afirma que si $f(x)$ es una función continua sobre el intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ es una función tal que $F'(x) = f(x)$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. La función F se denomina *antiderivada* de f o la *integral indefinida de* f. Existen tablas de antiderivadas que permiten llevar a cabo la integral definida de una función. Además, existe una gran variedad de métodos y *trucos* que se pueden utilizar en caso de que no aparezca la antiderivada en estas tablas. Adicionalmente, existe el algoritmo de Risch que permite decidir cuándo una función tiene como integral indefinida una función elemental [5]. Para el caso discreto, el algoritmo de Risch para sumas indefinidas fue dado por Gosper [6].

El algoritmo de Gosper responde a la pregunta: *¿cuándo existe una anti-diferencia s_k para un término hipergeométrico t_k?* Es decir, estamos interesados en encontrar una sucesión s_k tal que $t_k = \Delta s_k = s_{k+1} - s_k$, donde s_k es un *término hipergeométrico*, es decir el cociente s_{k+1}/s_k es racional en k ($s_{k+1}/s_k \in \mathbb{Q}(k)$). Una vez conocida una anti-diferencia s_k de t_k, el problema de encontrar una fórmula cerrada para la suma $\sum_{\ell=m}^{n} t_\ell$ se vuelve sencillo. En efecto, reemplazamos cada sumando t_i por su anti-diferencia y obtenemos la siguiente suma telescópica:

$$\sum_{\ell=m}^{n} t_\ell = (s_{n+1} - s_n) + (s_n - s_{n-1}) + \cdots + (s_{m+1} - s_m) = s_{n+1} - s_m.$$

En caso de que el término s_k exista, diremos que la suma función $\sum_{\ell=m}^{n} t_\ell$ es una suma del tipo Gosper. Observe que si s_k es una anti-diferencia de t_n entonces

$$\frac{s_n}{t_n} = \frac{s_n}{s_{n+1} - s_n} = \frac{1}{\frac{s_{n+1}}{s_n} - 1}.$$

Esta última expresión es racional en n. Así podemos suponer que $s_n = y(n)t_n$, donde $y(n)$ es racional en n. Por lo tanto, se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n = t_n \quad &\Leftrightarrow \quad y(n+1)t_{n+1} - y(n)t_n = t_n \\ &\Leftrightarrow \quad y(n+1)\frac{t_{n+1}}{t_n} - y(n) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad y(n+1)r(n) - y(n) = 1, \end{aligned}$$

donde $r(n)$ es racional en n. Esto quiere decir que el problema de encontrar el término s_n es equivalente a resolver la recurrencia de primer orden con coeficientes funciones racionales

$$r(n)y(n+1) - y(n) = 1. \tag{1}$$

Gosper encontró que este último problema es equivalente a resolver una recurrencia de primer orden con coeficientes polinomiales. Para ello se puede asumir, ver [8], que $r(n) = a(n)c(n+1)/b(n)c(n)$, donde $a(n), b(n)$ y $c(n)$ son polinomios en n y $\mathsf{mcd}(a(n), b(n+h)) = 1$, para todo entero positivo h. Reemplazando el valor de $r(n)$ en (1) se obtiene que

$$\left(\frac{a(n)c(n+1)}{b(n)c(n)}\right) y(n+1) - y(n) = 1.$$

De lo anterior se concluye que

$$y(n) = (1 + y(n-1))\frac{b(n-1)c(n-1)}{a(n-1)c(n)} = \frac{b(n-1)}{c(n)}x(n),$$

donde $x(n)$ es racional en n. Reemplazando en (1) se obtienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} r(n)y(n+1) - y(n) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a(n)c(n+1)}{b(n)c(n)}\frac{b(n)}{c(n+1)}x(n+1) - \frac{b(n-1)}{c(n)}x(n) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{a(n)}{c(n)}x(n+1) - \frac{b(n-1)}{c(n)}x(n) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad a(n)x(n+1) - b(n-1)x(n) = c(n). \end{aligned}$$

Gosper demostró que bajo estas condiciones, $x(n)$ es un polinomio. Por lo tanto, el problema inicial de encontrar una antidiferencia s_n de t_n es equivalente a resolver la recurrencia de orden 1

$$a(n)x(n+1) - b(n-1)x(n) = c(n), \tag{2}$$

donde $a(n), b(n)$ y $c(n)$ son polinomios en n. Para resolver este tipo de recurrencias también existen algoritmos, ver [10, Cap. 5]. En caso de poder resolver la recurrencia, se concluye que $s_n = \frac{b(n-1)x(n)}{c(n)} t_n$.

En la figura 1 resumimos el anterior procedimiento, conocido como el *Algoritmo de Gosper*.

Entrada: Un término hipergeométrico t_n.
Salida: Una anti-diferencia s_n (término hipergeométrico) de t_n.

1: Definimos el término $r(n) = \frac{t_{n+1}}{t_n} \in \mathbb{Q}(k)$.
2: Escribimos el término $r(n)$ como $r(n) = \frac{a(n)c(n+1)}{b(n)c(n)}$, donde $a(n), b(n)$ y $c(n)$ son polinomios en n y $\mathsf{mcd}(a(n), b(n+h)) = 1$, para todo entero positivo h.
3: Resolvemos la recurrencia $a(n)x(n+1) - b(n-1)x(n) = c(n)$.
4: En caso que exista la solución, devuelva $s_n = \frac{b(n-1)x(n)}{c(n)} t_n$.

Figura 1. Algoritmo de Gosper.

A continuación mostramos cómo utilizar el algoritmo de Gosper en *Mathematica*®. Para ello se puede descargar[1] de la página web del Research Institute for Symbolic Computation (RISC) el paquete **RISCErgoSum**. Este debe ser descomprimido y guardado en la carpeta local de paquetes de *Mathematica*® .

Ejemplo 1. Evaluar en forma cerrada la suma hipergeométrica

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^4 4^k}{\binom{2k}{k}}.$$

Con el comando `Gosper[t[k],{k,0,n}]`, donde `t[k]` es un sumando hipergeométrico se obtiene el valor de la suma en caso que sea del tipo Gosper.

```
In[1]:= << RISC`fastZeil`
```

```
Fast Zeilberger Package version 3.61
written by Peter Paule, Markus Schorn, and Axel Riese
Copyright Research Institute for Symbolic Computation (RISC),
Johannes Kepler University, Linz, Austria
```

[1] La clave para poder descomprimir los paquetes se le puede solicitar al profesor Peter Paule por medio del correo electrónico Peter.Paule@risc.uni-linz.ac.at.

```
In[2]:= Gosper[(k^4*4^k)/Binomial[2 k, k], {k, 0, n}]

Out[2]= If 'n' is a natural number, then:
```

$$\{\mathrm{Sum}[\frac{4^k\ k^4}{\mathrm{Binomial}[2\ k,\ k]},\ \{k,\ 0,\ n\}] == -\frac{2}{231} + \frac{2^{-1+2n}(1+n)(3-22\,n+18\,n^2+112\,n^3+63\,n^4)}{693\ \mathrm{Binomial}[2\ n,\ n]}\}$$

A continuación mostramos el resultado.

```
In[3]:= F[n_,k_] := (k^4*4^k)/Binomial[2 k, k]

In[4]:= Gosper[F[n, k], k]
```

$$\mathrm{Out[4]=}\ \{\frac{4^k\ k^4}{\mathrm{Binomial}[2\ k,\ k]} == \Delta_k[\frac{4^k(-1+2\,k)(-6+26\,k+60\,k^2-140\,k^3+63\,k^4)}{693\ \mathrm{Binomial}[2\ k,\ k]}]\}$$

$$\mathrm{In[5]:=}\ G[n\_,k\_] := \frac{4^k(-1+2\,k)(-6+26\,k+60\,k^2-140\,k^3+63\,k^4)}{693\ \mathrm{Binomial}[2\ k,\ k]}$$

```
In[6]:= FullSimplify[F[n, k] - (G[n, k + 1] - G[n, k])]

Out[6]= 0

In[7]:= G[n,k]/F[n,k]
```

$$\mathrm{Out[7]=}\ \frac{(-1+2\,k)(-6+26\,k+60\,k^2-140\,k^3+63\,k^4)}{693\,k^4}$$

Lo anterior significa que

$$\frac{k^4 4^k}{\binom{2k}{k}} = F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k),$$

con

$$R(n,k) = \frac{G(n,k)}{F(n,k)} = \frac{(2k-1)(63k^4 - 140k^3 + 60k^2 + 26k - 6)}{693k^4}.$$

Luego

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^4 4^k}{\binom{2k}{k}} = G(n,n+1) - G(n,0).$$

Observe que el certificado que se obtiene con el algoritmo de Gosper es básicamente la demostración de cómo probar el valor de una suma hipergeométrica. En efecto, si usted conoce el certificado $R(n,k)$, que siempre es una función racional, entonces se verifica que $G(n,k) = F(n,k)R(n,k)$ cumple que $F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$. Luego se suma sobre k desde cero (o el valor inicial de la suma) hasta n. Es decir $\sum_{k=0}^{n} F(n,k) = \sum_{k=0}^{n}(G(n,k+1) - G(n,k)) = G(n,n+1) - G(n,0)$. Esta última resta se calcula y ese valor corresponde al de la suma. Esto muestra que algoritmo de Gosper es un ejemplo de lo que se conoce como una **¡demostración computacional!**

3. Algoritmo de Zeilberger

Considere la suma
$$f(n) := \sum_k F(n,k),$$
donde $F(n,k)$ es un término hipergeométrico en n y k. Es importante resaltar que k varía sobre todos los enteros. El objetivo es encontrar una relación de recurrencia para $f(n)$. Primero encontramos una recurrencia para $F(n,k)$. Como no todas las sumas son del tipo Gosper (por ejemplo la suma $\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}$, con $m \leq n$ no es del tipo Gosper), esto quiere decir que no siempre vamos a poder encontrar un término hipergeométrico G tal que $F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$. Sin embargo, en algunos casos es posible encontrar G tal que
$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k). \tag{3}$$
Si esta relación se tiene, se puede verificar que $f(n)$ es constante. En efecto, sumando sobre todo k la igualdad (3) se obtiene que
$$f(n+1) - f(n) = \sum_k (F(n+1,k) - F(n,k)) = \sum_k (G(n,k+1) - G(n,k)) = 0.$$
Aplicando esta última relación se concluye que $f(n) = f(0)$.

Considere los operadores en diferencias $N(g(n,k)) = g(n+1,k)$ y $K(g(n,k)) = g(n,k+1)$, entonces la ecuación (3) se traduce en la igualdad $(N-1)F = (K-1)G$. El *algoritmo de Zeilberger* garantiza que para un término hipergeométrico $F(n,k)$, existe un operador en diferencias de la forma
$$p(n,N) = a_0(n) + a_1(n)N + a_2(n)N^2 + \cdots + a_J(n)N^J,$$
tal que
$$p(n,N)F(n,k) = (K-1)G, \tag{4}$$
donde $(a_i(n))_0^J$ son polinomios en n y $G(n,k)/F(n,k)$ es racional en n y k. Esta observación fue demostrada por primera vez por Sor Celine Fasenmyer en 1945. Si tal operador existe y teniendo en cuenta que $N^j(F(n,k)) = F(n+j,k)$, entonces se puede verificar que
$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n) f(n+j) = 0.$$
Si $J = 1$, entonces $a_0(n)f(n) + a_1(n)f(n+1) = 0$. Por lo tanto,
$$f(n) = f(0) \prod_{j=0}^{n-1} \frac{-a_0(j)}{a_1(j)}.$$
Si $J > 1$ y $a_j(n)$ es constante para todo j, entonces se obtiene una recurrencia lineal con coeficientes constantes y esto se puede solucionar por métodos estándar. Si $J > 1$ y $a_j(n)$ es un polinomio en n para todo j, se puede solucionar la recurrencia mediante el Algoritmo de Petkovšek [11], también conocido como el *Algoritmo Hyper*.

Ejemplo 2. A continuación mostramos cómo utilizar el algoritmo de Zeilberger en Mathematica® para evaluar la suma:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

Sobre esta identidad se conocen varias demostraciones. En general los argumentos combinatorios que se han dado son bastante elaborados. Hoy en día se conoce como la identidad de Hajós (cf. [4]). Con el algoritmo de Zeilberger es posible dar una prueba de esta identidad. Para evaluar la suma primero cargamos el paquete `fastZeil` y luego de eso definimos el término $F(n,k)$. Con el comando `Zb[F[n,k],k,n]` se obtiene la recurrencia (4).

```
In[8]:=  F[n_, k_] := Binomial[2 k, k] Binomial[2 n - 2 k, n - k]

In[9]:=  Zb[F[n, k], k, n]

Out[9]= {4 (1 + n)F[k, n] + (-1 - n)F[k, n + 1]  ==  Δk[F[k, n]R[k, n]]}
```

Como resultado de aplicar el algoritmo se deduce que si $F(n,k) = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$, entonces

$$4(n+1)F(n,k) - (n+1)F(n+1,k) = G(n,k+1) - G(n,k),$$

con el certificado

$$R(n,k) = \frac{G(n,k)}{F(n,k)} = \frac{2k(2n-2k+1)}{n-k+1}.$$

Este certificado se puede obtener con el comando `show`$[R]$, (es importante que la s sea minúscula). Sumando sobre todo k, se concluye que $4(n+1)f(n) - (n+1)f(n+1) = 0$. Como $f(n) = 4f(n-1)$, entonces es claro que $f(n) = 4^n f(0) = 4^n$. Para resolver esta última ecuación también se puede utilizar el algoritmo Hyper. Para ello debemos descargar[2] y correr el archivo hyper.m de la página web del autor.

```
In[10]:= ?Hyper

         Symbol

         Hyper [eqn, y [n]] finds at least one hypergeometric
         solution of the homogeneous equation eqn over the field of rational numbers Q
         (provided any such solution exists   ). Hyper [eqn, y [n], Solutions  –> All ] finds
         a generating set   (not necessarily linearly independent     ) for the space of
Out[10]= solutions generated by hypergeometric terms over Q. Hyper       [eqn, y [n],
         Quadratics  –> True ] finds solutions over quadratic extensions of Q. Solutions
         y[n] are given by their rational representations y      [n+1]/y[n].
         Warning: The worst   –case time complexity of Hyper is exponential
         in the degrees of the leading and trailing coefficients of eqn.
```

[2] https://www.math.upenn.edu/~wilf/progs.html

```
In[11]:= Hyper[4 (n + 1) f[n] - (n + 1) f[n + 1] == 0, f[n]]

Out[11]= {4}
```

Esto último significa que la solución es $f(n) = 4^n$. Hay que tener en cuenta que la soluciones $f(n)$ que arroja esta implementación son dadas por su representación $f(n+1)/f(n)$.

4. El Método WZ

El método de Wilf-Zeilberger, *método WZ*, es una herramienta útil para probar identidades combinatorias de la forma

$$\sum_k F(n,k) = r(n),$$

con $r(n) \neq 0$. Esta identidad es equivalente a la ecuación

$$\sum_k F(n,k)/r(n) = 1.$$

Si pensamos que $F(n,k)/r(n)$ es el sumando original, entonces el problema se reduce a la igualdad

$$\sum_k F(n,k) = \text{constante}.$$

Sea $f(n) = \sum_k F(n,k)$, debemos demostrar que $f(n)$ es constante para todo n. Una forma es demostrar que $f(n+1) - f(n) = 0$ para todo entero no negativo n. Esto se puede hacer si se encuentra una función $G(n,k)$ tal que:

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k).$$

La pareja de funciones (F,G) se denomina *pareja WZ*. Con este análisis en mente se tiene el algoritmo de la figura 2.

Entrada: Un término hipergeométrico $F(n,k)$ respecto a n y k.
Salida: Certificado $R(n,k) := G(n,k)/F(n,k)$.
1: Definimos $D(k) := F(n+1,k) - F(n,k)$.
2: Aplicamos el Algoritmo de Gosper a $D(k)$. Si es exitoso encontramos un término $g(k)$ tal que

$$D(k) = g(k+1) - g(k).$$

Como $g(k)$ también depende del parámetro n, entonces tenemos que $g(k) := G(n,k)$.
3: $R(n,k) := G(n,k)/F(n,k)$ es racional y es el certificado WZ para la identidad

$$\sum_k F(n,k) = \text{constante}.$$

Figura 2. Algoritmo WZ.

Vamos a utilizar el código elaborado por Doron Zeilberger para encontrar el certificado WZ. Para ello debemos descargar[3] y correr el archivo gosper.m de la página web del autor.

Ejemplo 3. A continuación mostramos cómo utilizar el método WZ para demostrar la identidad

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n} 2^{-k} = 2^n.$$

Para más información sobre esta suma ver la referencia [1]. Observe primero que esta suma es equivalente a la ecuación:

$$f(n) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n} 2^{-(k+n)} = 1.$$

Así que debemos definir $F(n,k) := \binom{n+k}{n} 2^{-(k+n)}$.

```
In[12]:= << gosper`

         N.B.: Besides GosperSum and GosperFunction, this

         package also contains FactorialSimplify (alias FS), and

In[13]:= ?WZ

         Symbol
         WZ[F, n, k, qList: {}] returns a rational function R (n,k)

Out[13]= such that F (n,k) and G(n,k) := R(n,k) F(n,k) are a WZ pair:

         F(n+1,k) − F(n,k) = G(n,k+1) − G(n,k).

In[14]:= F[n_, k_] := Binomial[n + k, n] 2^(-k - n)

In[15]:= WZ[F[n, k], n, k]

Out[15]= −(k/(1 + n))

In[16]:= R[n_, k_] := −(k/(1 + n))

In[17]:= G[n_, k_] := R[n, k]*F[n, k]

In[18]:= FullSimplify[F[n + 1,k] − F[n, k] − (G[n,k + 1] − G[n, k])]

Out[18]= 0
```

En este caso el certificado es

$$R(n,k) = -\frac{k}{n+1}.$$

Sumando sobre todo k, se concluye que $f(n+1) - f(n) = 0$. Así que $f(n)$ es constante e igual a $f(0) = 1$. Queda demostrado.

[3] https://www.math.upenn.edu/~wilf/progs.html

5. Ejemplos de Sumas Combinatorias

En esta sección resolvemos varios problemas de identidades combinatorias mediante los anteriores algoritmos. Estos problemas fueron tomados de la sección de problemas de la revista American Mathematical Monthly (AMM), y aparecieron en el periodo comprendido entre los años 1997 y 2020. Se puede considerar como una continuación de la publicación [9], la cual analizó varios problemas de la misma revista en el periodo comprendido entre 1978 y 1997. Para más ejemplos de estos algoritmos se pueden consultar las referencias [2, 3, 7, 12].

5.1. Problema 1. (Problema 11940 AMM (2016))

Sea $T_n = n(n+1)/2$ y $C(n,k) = (n-2k)\binom{n}{k}$. Para $n \geq 1$, demuestre que

$$\sum_{k=0}^{n-1} C(T_n,k)C(T_{n+1},k) = \frac{n^3-2n^2+4n}{n+2}\binom{T_n}{n}\binom{T_{n+1}}{n}.$$

Demostración. Dividiendo por el resultado de la suma, el problema es equivalente a probar la identidad:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+2}{n^3-2n^2+4n}\frac{C(T_n,k)C(T_{n+1},k)}{\binom{T_n}{n}\binom{T_{n+1}}{n}} = 1.$$

Sea $F(n,k)$ el sumando, es decir

$$F(n,k) = \frac{n+2}{n^3-2n^2+4n}\frac{C(T_n,k)C(T_{n+1},k)}{\binom{T_n}{n}\binom{T_{n+1}}{n}}.$$

Por el Algoritmo de Gosper obtenemos que $F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$, con el certificado

$$R(n,k) = \frac{G(n,k)}{F(n,k)} = \frac{4k^2\left(-4k+n^2+2n+4\right)}{n(n+2)\left(-4k+n^2+n\right)\left(-4k+n^2+3n+2\right)}.$$

Por lo tanto, $\sum_{k=0}^{n-1} F(n,k) = G(n,n) - G(n,0) = 1$. Queda demostrado. □

5.2. Problema 2. (Problema 11916 AMM (2016))

Demuestre que si n, r, y s son enteros positivos, entonces

$$\binom{n+r}{n}\sum_{k=0}^{s-1}\binom{r+k}{r-1}\binom{n+k}{n} = \binom{n+s}{n}\sum_{k=0}^{r-1}\binom{s+k}{s-1}\binom{n+k}{n}.$$

Demostración. Sean $\mathrm{Sum}_1(n)$ y $\mathrm{Sum}_2(n)$ las sumas de la derecha e izquierda, respectivamente. Vamos a demostrar que estas sumas satisfacen la misma relación de recurrencia, con los mismos valores iniciales. Cada una de estas sumas se pueden reescribir como:

$$\mathrm{Sum}_1(n) = \sum_{k=0}^{s-1} \binom{n+r}{n}\binom{r+k}{r-1}\binom{n+k}{n},$$

$$\mathrm{Sum}_2(n) = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n+s}{n}\binom{s+k}{s-1}\binom{n+k}{n}.$$

Sea $F_1(n,k)$ (resp. $F_2(n,k)$) el sumando de $\mathrm{Sum}_1(n)$ ($\mathrm{Sum}_2(n)$). Por el Algoritmo de Zeilberger obtenemos que

$$(n+1)F_1(n+1,k) - nF_1(n,k) = G_1(n,k+1) - G_1(n,k),$$

$$(n+1)F_1(n+1,k) - nF_1(n,k) = G_2(n,k+1) - G_2(n,k),$$

con certificado

$$R(n,k) = \frac{G_1(n,k)}{F_1(n,k)} = \frac{G_2(n,k)}{F_2(n,k)} = \frac{k(1+k)}{1+n}.$$

En la primera igualdad sumamos sobre k desde 0 hasta $s-1$:

$$(n+1)\mathrm{Sum}_1(n+1) - n\mathrm{Sum}_1(n) = G_1(n,s) - G_1(n,0).$$

Se puede observar que $G_1(n,0) = 0$ y

$$G_1(n,s) = \frac{s(s+1)}{n+1}\binom{n+r}{n}\binom{n+s}{n}\binom{r+s}{r-1}.$$

Para la segunda suma se obtiene de manera análoga la relación

$$(n+1)\mathrm{Sum}_2(n+1) - n\mathrm{Sum}_2(n) = G_2(n,r) - G_2(n,0),$$

con $G_2(n,0) = 0$ y

$$G_2(n,r) = \frac{r(r+1)}{n+1}\binom{n+r}{n}\binom{n+s}{n}\binom{r+s}{s-1}.$$

Claramente $G_1(n,s) = G_2(n,r)$. Por lo tanto las sumas satisfacen la misma recurrencia. Por último, sus valores iniciales coinciden:

$$\mathrm{Sum}_1(1) = s(s+1)\binom{r+s}{r-1} = r(r+1)\binom{r+s}{s-1} = \mathrm{Sum}_2(1).$$

Queda demostrado. $\square$

5.3. Problema 3. (Problema 12049 AMM (2018))

Para todos los enteros no negativos m y n, tales que $m \leq n$, muestre que

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{(-1)^{k+m}}{2k+1} \binom{n+k}{n-k} \binom{2k}{k-m} = \frac{1}{2n+1}.$$

Demostración. El problema es equivalente a demostrar que

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{(2n+1)(-1)^{k+m}}{2k+1} \binom{n+k}{n-k} \binom{2k}{k-m} = 1.$$

Definimos $F(n,k)$ como el sumando anterior, luego

$$F(n,k) = \frac{(2n+1)(-1)^{k+m}}{2k+1} \binom{n+k}{n-k} \binom{2k}{k-m}.$$

El rango de la suma es sobre todos los enteros, puesto que para $k < m$ o $k > n$ los coeficientes binomiales se definen como cero. Aplicando el Método WZ a $F(n,k)$ obtenemos que $F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$, con el certificado

$$R(n,k) = \frac{G(n,k)}{F(n,k)} = \frac{2(k-m)(k+m)(1+2k+n+2kn)}{(-1+k-n)(1-m+n)(1+m+n)(1+2n)}.$$

De la identidad anterior obtenemos que $\sum_k F(n+1,k) = \sum_k F(n,k)$. Entonces la suma es constante en n. Para el valor inicial $n = m$,

$$\sum_k F(m,k) = \frac{(2m+1)(-1)^{2m}}{2m+1} \binom{m+m}{m-m} \binom{2m}{m-m} = 1.$$

Por lo tanto $\sum_k F(n,k) = \sum_{k=m}^{n} F(n,k) = 1$. Queda demostrado. □

5.4. Problema 4. (Problema 12016 AMM (2018))

Dados m, n ,r y s enteros no negativos, muestre que

$$\sum_{k=0}^{s} \binom{m+r}{n-k} \binom{r+k}{k} \binom{s}{k} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m+s}{n-k} \binom{s+k}{k} \binom{r}{k}.$$

Demostración. Fijando los enteros m, r y s como parámetros, definimos $\mathrm{Sum}_1(n)$ y $\mathrm{Sum}_2(n)$ como las sumas del lado izquierdo y del lado derecho, respectivamente. Veamos que estas sumas satisfacen la misma relación de recurrencia, con los mismos valores iniciales.

Sean $F_1(n,k)$ el sumando de $\mathrm{Sum}_1(n)$ y $F_2(n,k)$ el sumando de $\mathrm{Sum}_2(n)$. Aplicando el Algoritmo de Zeilberger obtenemos que

$$\begin{aligned}&(1-m+n)(m-n+r+s)F_1(n,k)\\&\quad+(-3+3m-5n+2mn-2n^2+2r+nr+2s+ns+rs)F_1(n+1,k)\\&\qquad-(2+n)^2F(n+2,k)=G_1(n,k+1)-G_1(n,k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(1-m+n)(m-n+r+s)F_2(n,k)\\&\quad+(-3+3m-5n+2mn-2n^2+2r+nr+2s+ns+rs)F_2(n+1,k)\\&\qquad-(2+n)^2F(n+2,k)=G_2(n,k+1)-G_2(n,k),\end{aligned}$$

cuyos certificados son:

$$R_1(n,k)=\frac{G_1(n,k)}{F_1(n,k)}=\frac{k^2(1+m+r)(k+m-n+r)}{(1-k+n)(2-k+n)},$$

$$R_2(n,k)=\frac{G_2(n,k)}{F_2(n,k)}=\frac{k^2(1+m+s)(k+m-n+s)}{(1-k+n)(2-k+n)}.$$

En la recurrencia de $F_1(n,k)$ sumamos sobre k desde 0 hasta s y en la segunda recurrencia se suma sobre k desde 0 hasta r. Como se tienen los siguientes valores $G_1(n,0)=0, G_1(n,s+1)=0, G_2(n,0)=0$ y $G_2(n,r+1)=0$, se puede concluir que las sumas satisfacen la misma recurrencia. Verificamos que sus valores iniciales coinciden:

$$\mathrm{Sum}_1(0)=\binom{m+r}{0}\binom{r}{0}\binom{s}{0}=1,$$

$$\mathrm{Sum}_2(0)=\binom{m+s}{0}\binom{s}{0}\binom{r}{0}=1.$$

Queda demostrado. □

5.5. Problema 5. (Problema 11356 AMM (2008))

Demuestre que para todo entero positivo n,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}^2}{(2k+1)\binom{2n}{2k}}=\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}.$$

Demostración. El problema es equivalente a demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}^2(2n)!(2n+1)!}{(2k+1)2^{4n}(n!)^4\binom{2n}{2k}}=1.$$

Definimos $F(n,k)$ como el sumando anterior. El rango de la suma es sobre todos los enteros, puesto que para $k<0$ o $k>n$ los coeficientes binomiales se toman como cero. Aplicando el Método WZ a $F(n,k)$, obtenemos que $F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$, con el certificado

$$R(n,k) = \frac{G(n,k)}{F(n,k)} = -\frac{k(2k+1)(2k-2n-1)}{4(n+1)^2(k-n-1)}.$$

De la identidad anterior, obtenemos que $\sum_k F(n+1,k) = \sum_k F(n,k)$. Entonces la suma es constante en n. Notemos que para el valor inicial $n = 0$ se tiene que $\sum_k F(0,k) = 1$. Por lo tanto $\sum_k F(n,k) = \sum_{k=0}^{n} F(n,k) = 1$. Queda demostrado. □

5.6. Problema 6. (Problema 11212 AMM (2006))

Muestre que para todo entero positivo n

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{n-1} = 0.$$

Demostración. Sea $F(n,r)$ el sumando de esta expresión, es decir

$$F(n,r) = (-1)^r \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{n-1}.$$

Aplicando el Algoritmo de Gosper obtenemos que $F(n,r) = G(n,r+1) - G(n,r)$, con el certificado

$$R(n,r) = \frac{G(n,r)}{F(n,r)} = \frac{n+n^2}{2r(-1-2n+2r)}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{r=0}^{n} F(n,r) = G(n,n+1) - G(n,0) = 0.$$

Queda demostrado. □

5.7. Problema 7. (Problema 11188 AMM (2005))

Encuentre una fórmula cerrada para la suma hipergeométrica

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(3n)_k (n+1)_k (-n)_k}{(2n+1)_k (n+1/2)_k} \cdot \frac{(1/4)^k}{k!}.$$

Demostración. Sea $\mathrm{Sum}(n)$ esta suma hipergeométrica. Después de reescribirla se obtiene que

$$\mathrm{Sum}(n) = \frac{(2n)!^2}{(3n)!n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{3(3n+k-1)!((n+k)!)^2}{(2n+k)!(2n+2k)!(n-1)!}.$$

Sea $F(n,k)$ el sumando de esta última suma que denotaremos por $\mathrm{Sum}_2(n)$. Aplicando el Algoritmo de Zeilberger a $F(n,k)$ se obtiene la recurrencia

$$3F(n,k) - 3F(n+1,k) = G(n,k+1) - G(n,k),$$

con el certificado

$$R(n,k)=\frac{G(n,k)}{F(n,k)}=\frac{k\left(k(5n+1)+11n^2+6n+1\right)}{n(-k+n+1)(k+2n+1)}.$$

Sumando lo anterior sobre k ($k\in\mathbb{Z}$), obtenemos que $\mathrm{Sum}_2(n)$ satisface la recurrencia $\mathrm{Sum}_2(n)-\mathrm{Sum}_2(n+1)=0$. Como $\mathrm{Sum}(1)=1$, entonces se concluye que $\mathrm{Sum}(n)=\frac{(2n)!^2}{(3n)!n!}$. □

5.8. Problema 8. (Problema 10424 AMM (1997))

Encuentre una fórmula para la suma

$$\sum_{0\le k\le n/3} 2^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{2k}.$$

Demostración. Sean $\mathrm{Sum}(n)$ esta suma y $F(n,k)$ su sumando. Aplicando el Algoritmo de Zeilberger a $F(n,k)$ se obtiene la recurrencia lineal

$$2F(n,k)-F(n+1,k)+2F(n+2,k)-F(n+3,k)=G(n,k+1)-G(n,k),$$

con el certificado

$$R(n,k)=\frac{2k(2k-1)(n-k)}{(-3k+n+1)(-3k+n+2)(-3k+n+3)}.$$

Sumando lo anterior sobre k ($k\in\mathbb{Z}$), obtenemos que $\mathrm{Sum}(n)$ satisface la recurrencia

$$\mathrm{Sum}(n)-2\mathrm{Sum}(n-1)+\mathrm{Sum}(n-2)-2\mathrm{Sum}(n-3)=0,$$

con los valores iniciales $\mathrm{Sum}(1)=1=\mathrm{Sum}(2)$ y $\mathrm{Sum}(3)=4$. Al resolver esta recurrencia se obtiene que

$$\mathrm{Sum}(n)=\frac{1}{2}\left((-i)^n+i^n+2^n\right).$$

□

Referencias

[1] D. Aharonov and U. Elias, *A binomial identity via differential equations*, The American Mathematical Monthly, **120**(5) (2013), 462–466.

[2] T. Amdeberhan, D. Callan, H. Ohtsuka, and R. Tauraso, *Revitalized automatic proofs: demonstrations*, Integers **17** (2017), # A 16.

[3] J. Brereton, A. Farid, M. Karnib, G. Marple, A. Quenon, and A. Tefera, *Combinatorial and automated proofs of certain identities*, The Electronic Journal of Combinatorics **18**(2) (2011), #P14.

[4] R. Duarte and A. Guedes de Oliveira, *A famous identity of Hajós in terms of sets* Journal of Integer Sequences, **17** Article 14.9.1 (2014), 1–10.

[5] K.O. Geddes, S. R. Czapor, and G. Labahn, *Algorithms for Computer Algebra*, Kluwer Academic Publisher, 1992.

[6] R. W. Jr. Gosper, *Decision procedure for indefinite hypergeometric summation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **75**(1) (1978), 40–42.

[7] A. Horváth, *Computer algebra proof of some identities involving binomial coefficients*, In: 11th International Conference Interdisciplinarity in Engineering, INTER-ENG 2017, Procedia Manufacturing **22** (2018), 1043–1050.

[8] W. Koepf, *Hypergeometric Summation: An Algorithmic Approach to Summation and Special Function Identities*, Springer; 2nd ed. 2014.

[9] I. Nemes, M. Petkovsek, H. Wilf, and D. Zeilberger, *How to do Monthly problems with your computer*, The American Mathematical Monthly, **104**(6) (1997), 505–519.

[10] M. Petkovšek, H. Wilf, and D. Zeilberger. *A=B*. A. K. Peters, Ltd., 1996.

[11] M. Petkovšek, *Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients*, Journal of Symbolic Computation, **14** (1992), 243–264.

[12] C. J. Smith, A. Tefera, and A. Zeleke, *Computerized proof techniques for undergraduates*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **43**(8) (2012), 1067–1077.

[13] H. Wilf and D. Zeilberger, *Rational functions certify combinatorial identities*, J. Amer. Math. Soc. **3**(1) (1990), 147–158.

[14] D. Zeilberger, *A fast algorithm for proving terminating hypergeometric identities*, Discrete Math. **80**(2) (1990), 207–211.

Recibido en enero de 2021. Aceptado para publicación en agosto de 2022.

José L. Ramírez
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia
e-mail: jlramirezr@unal.edu.co

Fabio A. Velandia
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia
e-mail: fvelandias@unal.edu.co