Concepciones de los alumnos de la noción de Función

Lávaque Fuentes Josefina, Nilda Graciela Méndez , Villarroel Yolanda Haydeé

I.-Introducción

El concepto de función resulta de fundamental importancia en el currículo de matemática, así lo demuestran las numerosas investigaciones que se han realizado en torno a las dificultades para su enseñanza

Eisenberg (1992) señala que: *"Desarrollar en los estudiantes una sensibilidad hacia las funciones debería ser un objetivo principal del currículo de la escuela media y universitaria"*

En el presente trabajo consideramos, en primer lugar, como ha evolucionado el concepto a lo largo de la historia, cuáles han sido las necesidades que han conducido hacia su evolución, qué concepciones se han configurado históricamente como obstáculos epistemológicos.

También analizaremos las concepciones de la noción de función de un grupo de alumnos teniendo en cuenta que la comprensión del concepto implica la articulación coherente entre distintos registros de representación semiótica en el sentido de R. Duval.

II.- Aspectos Teóricos

a)La noción de concepción

El término "concepción" se utiliza a fin de establecer una distinción entre el objeto matemático que es único y las diversas significaciones que le pueden asociar los alumnos.

Según Artigue (1990) la noción de concepción responde a dos necesidades distintas. Por un lado mostrar los múltiples puntos de vista de un mismo objeto matemático y dejar en evidencia cuales son las adaptaciones que el individuo realiza cuando debe resolver un problema.

Por otro, permite diferenciar la enseñanza que se quiere transmitir y los conocimientos que el estudiante efectivamente construye.

b) Registros de Representación

Una característica de la actividad matemática es el uso de diversos sistemas de representación, además del lenguaje natural. Las representaciones son las notaciones simbólicas o gráficas, especificas para cada noción, mediante la que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos como así sus características y propiedades más relevantes.

"Aprender Matemáticas es aprender a discriminar y coordinar los sistemas semióticos de representación para llegar a ser capaces de transformar cualquier representación." (Raymond Duval);

Uno de los obstáculos del aprendizaje de conceptos matemáticos es la falta de conversión entre registros no congruentes de representación. La pluralidad de los sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por lo tanto de sus representaciones mentales. Duval (1993) sostiene *" si se llama semiosis a la aprehensión o la producción de una representación semiótica, y neosis a la aprehensión conceptual de un objeto, es necesario afirmar que la neosis es inseparable de la semiosis"*. La aprehensión conceptual no es posible sin el recurso a una pluralidad al menos potencial de sistemas semióticos, y por tanto su coordinación por parte del sujeto.

La conversión entre registros de representación semióticas no es espontánea a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada. Cuando hay congruencia, la conversión puede ser trivial, por ejemplo: Dada la gráfica de la función $f(x) = x$, se ve en el dibujo una recta que es la bisectriz del primer cuadrante. Ante una pregunta sobre la monotonía de esta función, se responde que se trata de una función creciente y la mayoría de los estudiantes tienen éxito, pues hay aquí un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la percepción de la noción de crecimiento asociada con el hecho de que la gráfica sube.

Pero cuando no hay congruencia, la tarea puede ser muy difícil y no accesible para muchos estudiantes. Por ejemplo, si pensamos en una función $f(x) = x^2$ cuya representación gráfica es una parábola centrada y se pide dibujar la parábola que representa a la función $f(x) = (x+1)^2$, muchos estudiantes fracasan debido a que se trata de una parábola que está trasladada a la izquierda de la dada y con vértice en el punto de coordenadas (-1.0). El estudiante ve el signo más de la expresión y dibuja la parábola a la derecha de la dada. Este ejemplo se contempla un traslado del registro algebraico al gráfico.

La aprehensión de las representaciones está fuertemente ligada al proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos. Duval hace una categorización de tareas y entre ellas, concernientes a la aprehensión de las representaciones semióticas, propone tareas de variaciones comparativas relativas a los significados de las representaciones. "La aprehensión de las representaciones semióticas supone la discriminación de las unidades significantes en el registro mismo donde la representación se produce. El único medio para llegar a discriminar las unidades significantes de una representación es el de hacer que se realice la observación, por una parte, de las variaciones de representación efectuadas sistemáticamente en un registro y, por otro lado, de las variaciones concomitantes de representación en otro registro" (Duval, 1998).

Janvier (1987) sostiene que no se ha integrado el concepto de función hasta que no se es capaz de pasar de una de las representaciones (descripción verbal, diagramas de Venn, tablas, gráficas, fórmulas) a todas las demás. Swan (1982) estableció que las representaciones más útiles eran las tablas de datos, los gráficos cartesianos y las expresiones simbólicas y Janvier (1987) indicó las habilidades que necesitaban los alumnos para traducir entre varias representaciones en la siguiente tabla:

Hasta / Desde	Descripciones verbales	Tablas de datos	Gráficos cartesianos	Expresiones algebraicas
Descripciones verbales		Medir	Destrezas de modelización o bosquejo descriptivo	Modelizar
Tablas de datos	Leer		Dibujar	Ajustar
Gráficos cartesianos	Interpretar	Leer		Ajustar

Expresiones algebraicas	Reconocimiento de parámetros	Calcular	Dibujar	

c) Desarrollo histórico e epistemológico del concepto de función

A lo largo de la historia el concepto de función ha evolucionado siendo objeto de numerosas precisiones y generalizaciones así como también ha sido influenciado por concepciones que históricamente se han configurado como resistentes a su evolución (obstáculos epistemológicos).

Luisa Ruiz Higueras organizó el análisis histórico e identificó las siguientes concepciones predominantes en distintos períodos de la evolución de esta noción:

- La función como variación

Los babilonios lograron hacer uso de una intuición primitiva del concepto de función, ya que buscaban regularidades en las tabulaciones de fenómenos naturales para después intentar aritmetizar y generalizar tales observaciones.
Establecieron relaciones sistemáticas entre variaciones de las causas y los efectos: los fenómenos sujetos a cambios, tales como el calor, la luz, la distancia, la velocidad,etc., pueden poseer distinto grado de intensidad y cambiar continuamente entre ciertos limites dados. Estas medidas encierran la presencia potencial de medidas.
Los babilonios poseyeron un instinto de funcionalidad, dado que en las tablas de cálculo que construyeron está presente una relación general por la que se asocian elementos de dos conjuntos. Sin embargo, *"existe una distancia muy grande entre instinto de funcionalidad y la noción de función"* (Ruiz Higueras,1998).
La función como variación es la concepción predominante en este período, concepción que perdura por largo tiempo.

- La función como proporción

Si bien las ideas de cambio y de cantidad variable estaban en el pensamiento griego, se consideraba el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas. El considerar los entes matemáticos como algo estático llevó a los matemáticos de esta época a hablar en términos de incógnitas e indeterminadas más que en términos de variables. *"Esto conduce a las proporciones y ecuaciones, y no a las funciones"* (Ruiz Higueras 1998).
La búsqueda de proporcionalidad era la relación privilegiada entre magnitudes variables, es decir, la variabilidad atada a las magnitudes físicas, las cuales se consideraban diferentes a las matemáticas.
Dado el significado geométrico que tenían para los griegos las magnitudes variables sólo establecían en forma homogénea sus proporciones:comparaban longitudes con longitudes, áreas con áreas, volúmenes con volúmenes .
" *La homogeneidad que conducía a comparar siempre magnitudes de la misma naturaleza pudo ser un obstáculo al desarrollo de la noción de función puesto que impedía encontrar de forma significativa, dependencias entre variables de diferentes magnitudes, germen de toda relación funcional"(*René de Cotret,1985).
Las nociones más negativas en la evolución del concepto de función fueron *" la proporcionalidad, la inconmensurabilidad, y la gran disociación en el pensamiento entre número y magnitud" (*René de Cotret,1985).
Este período está marcado por el predominio de una concepción estática: la función como proporción, concepción que se ha mantenido en matemáticos como Oresme o Galileo.

- La función como gráfica

Una característica esencial de la Edad Media se observa en los intentos por dar una explicación cuantitativa racional de los fenómenos naturales a través de procesos de abstracción los cuales se verán fuertemente negados debido a la disociación entre número y magnitud.
Los principales núcleos de desarrollo fueron las escuelas de Oxford y París. El principal representante de la escuela francesa es Nicolás Oresme, quien ya en el siglo XIV utiliza el grafismo para representar los cambios y así describirlos y compararlos. Utiliza segmentos para representar las intensidades de una cualidad de una determinada magnitud continua que depende de otra magnitud continua. Estas gráficas representaban las relaciones desde los cualitativo más que desde lo cuantitativo, pues los gráficos se consideraban como modelos geométricos de las relaciones y no necesitaban representar fielmente dichas relaciones.
Oresme traza un segmento horizontal cuyos puntos representan los sucesivos instantes y para cada instante traza un segmento perpendicular cuya longitud representa la velocidad en ese instante. La dependencia se representaba globalmente por toda la figura, predominando entonces la concepción de función como gráfica.
Desde aquí es posible percibir los principios de la noción de función, en el que, "*Oresme ha tallado el árbol del bosque que permitiría más tarde a Descartes y a Galileo confeccionar la rueda"(*René de Cotret, 1985).
Durante el período que abarca los siglos XV y XVI, siglos conocidos por los historiadores como "períodos auxiliares " ya que se logra aportación sobresaliente al concepto de función, sin embargo, se sientan las bases de la simbología algebraica que permite una manipulación práctica y eficiente, esencialmente al diferenciar entre "variable" de una función e " incógnita" de una ecuación.

- La función como curva

A principios del siglo XVII, Fermat y Descartes descubren el mundo de la representación analítica al conectar los problemas de dos ramas de la matemática: la Geometría y el Álgebra.
Se renuncia a las concepciones griegas de número y magnitud y se logra fusionarlas, y según Youschevitch (1976) , es aquí donde por primera vez, se sostiene la idea de que una ecuación en x e y es un medio para introducir una dependencia entre dos cantidades, de manera que permite el cálculo de los valores de una de ellas correspondientes a los valores dados de la otra.
Descartes sostiene "*cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva"*
La concepción dominante, la función como curva, hace que surja el segundo obstáculo en la evolución de la noción de función, cuando se asocia la gráfica con la trayectoria de puntos en movimiento y no con conjuntos de puntos que satisfacen condiciones en una relación funcional

- La función como expresión analítica

La concepción de función como expresión analítica nace en el siglo XVII y continúa con Euler y Lagrange en el siglo XVIII. Se pensaba que las únicas funciones dignas de estudio eran las que podían ser descriptas por medio de expresiones algebraicas. Permanece aún la idea de asignar la variación a las "cantidades". Aparece la idea de función no continua.
Leibnitz usa por primera vez el término *función,* ya que según Youschevitch (1976),a falta de un término general para representar las cantidades arbitrarias que dependen de una variable , va a conducir al uso de la palabra en el sentido de una expresión analítica .

Bernoulli y Euler, serán las figuras del siglo XVIII, con quienes la noción de función es considerada una expresión analítica, proponiendo el primero de ellos, la letra f para la característica de una función, escribiendo entonces: <<fx>>, lo que evolucionará con Euler, para escribirse como *f(x).*

En la definición que propone Euler del concepto de función, reemplaza el término cantidad hasta ese momento por el de expresión analítica:

" *Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes"*

Esta concepción se constituye en obstáculo para la evolución de función en relación con sus ideas de dependencia y variabilidad. El punto de vista que predominó fue el aspecto puramente formal más que de relación entre variables; se entiende que una función es una combinación de operaciones dada por una expresión analítica

- La función como correspondencia arbitraria: aplicación

Esta concepción de función como aplicación aparece con los últimos trabajos de Euler sobre "funciones arbitrairas", siglo XVIII, continuando en el siglo XIX con los de Fourier sobre series trigonométricas y los de Cauchy, Dedekind y otros sobre números reales.

A partir del problema de la cuerda vibrante de Euler, surge la noción de correspondencia general: se dice que " una cantidad es función de otra u otras", aunque no se conozca por qué operaciones atravesar para llegar de una a la otra. Más tarde, Euler se ve en la necesidad de considerar funciones más generales que las funciones analíticas, tomando en cuenta funciones arbitrarias, especiales, no derivables, con picos, a las que él llama discontinuas o mixtas: las funciones arbitrarias en las cuales si x designa una cantidad variable, entonces todas las otras cantidades que dependen de x, no importa de qué manera, son funciones de x.

El término función se corresponde con la expresión f(x), y más tarde se representará como

$f: X \rightarrow Y$, o $x \rightarrow f(x)$.

Continúa el uso de los ejes cartesianos y aparece una nueva representación: los diagramas de Venn.

- La función como terna

Afines del siglo XIX y principios del siglo XX se llama función a la terna f = (A,B,G) en donde A, B, G son conjuntos con las siguientes condiciones $G \subset AxB$, $x \in A$, $y \in B$ tal que $(x,y) \in G$.

III.-Metodología

Para establecer las concepciones de los estudiantes sobre la noción de función se analizaron las respuestas en la segunda evaluación parcial realizada por 24 estudiantes de las carreras de Analista de Sistema y del profesorado de Matemática de Facultad de Ciencias Exactas de la UNSa.

La evaluación consta de 6 ejercicios, dos incisos están referidos al pasaje del registro tabla al registro algebraico, tres incisos se refieren al pasaje del registro algebraico al gráfico, cinco incisos tratan tareas internas al registro algebraico .

Las actividades consideradas en los ejercicios fueron:

1- a) Determinar la expresión algebraica de la función exponencial a partir de una tabla de valores
   b) Evaluar la expresión algebraica
2- a) Determinar la expresión algebraica de dos funciones lineales a partir de una tabla de valores.
   b) Construir el gráfico a partir de la expresión algebraica
   c) Encontrar el punto de intersección de las funciones lineales
3- a) Dada la expresión algebraica de una función cuadrática representar gráficamente
   b) Restringir una función para que posea función inversa y dar su expresión simbólica
   c) Representar la función y su inversa en mismo sistema de ejes cartesianos
4- a) Dada la expresión de una función racional determinar el dominio, imagen, intersecciones, asíntotas, intervalo de crecimiento y concavidad
   b) Representar gráficamente

IV.-Análisis de las Resultados

En cuanto al ejercicio N° 1 se observa que determinan la expresión de la función exponencial 12 alumnos, escriben la expresión general de la función exponencial pero no calculan correctamente los parámetros 4 alumnos. No presentan ninguna resolución 7 alumnos y 3 alumnos realizan la representación grafica de los valores tabulados, tarea no pedida en este ejercicio. En la resolución de tareas internas al registro algebraico, 14 alumnos resuelven correctamente, 8 no realizan la tarea, 2 alumnos resuelven de forma incorrecta.

Estos resultados muestran que la conversión del registro tabla al gráfico es una tarea que los alumnos realizan en mayor porcentaje, por ello a pesar de no solicitársele esta conversión el alumno la presenta para la evaluación.

Para el ejercicio N° 2 encuentran las expresiones de las dos funciones lineales 19 alumnos,3 alumnos no determinan las funciones, 1 alumno no logra las expresiones algebraicas y confunde el problema dado con un problema de programación lineal tema que se evaluaba en este examen , otro alumno solo logra una de las dos expresiones algebraicas.

En la tarea de conversión del registro algebraico al gráfico, 15 alumnos realizan la tarea correctamente, 4 alumnos no resuelven este inciso, 3 alumnos realizan la representación de las funciones lineales mediante rectas pero presentan errores en la selección de la escala, uno no considera el dominio adecuado a la situación planteada, y otros no logran graficar el punto de intersección dada la escala seleccionada. Observamos que en los casos en que realizan la conversión solicitada, siempre recurren al registro tabla para llegar al registro gráfico.

En el desarrollo de las tareas internas al registro algebraico solo 4 alumnos determinan el punto de intersección en forma analítica.

Para el ejercicio N° 3, 17alumnos logran la conversión del registro algebraico al gráfico de la función cuadrática, 2 alumnos no realizan la tarea, 5 alumnos no asocian el registro algebraico de la función cuadrática con la parábola. En el inciso c) que se refiere a actividades internas del registro algebraico 4 alumnos encuentran la expresión algebraica de la función inversa, 5 alumnos encuentran una expresión algebraica incorrecta como consecuencia de errores algebraicos, 15 no realizan esta tarea. La conversión del registro algebraico al gráfico de la función restringida y su inversa solo es realizada correctamente por 3 alumnos, 18 alumnos no realizan desarrollo alguno de esta actividad, 1 alumno si bien realiza una representación grafica teniendo en cuenta la simetría con respecto a la recta y = x la inversa graficada no es función, 1 alumno si bien grafica la función restringida correctamente no es correcta la función inversa graficada y 1 alumno realiza una representación de funciones inversas que guardan simetría pero que no corresponden a la función dada.

En el ejercicio N° 4 donde se pide al análisis de la función racional que incluye tareas dentro del registro algebraico y luego el pasaje al registro gráfico, 6 alumnos no realizan el ejercicio, 7 realizan correctamente ambas tareas, 4 alumnos presenta un escaso análisis de la función , pero lo realizado es totalmente incorrecto lo cual se traduce en una representación gráfica también errónea, 6 alumnos realizan ambas tareas, pero hay incoherencia entre el análisis realizado y el registro gráfico, 1 alumno realiza un análisis incorrecto pero su gráfica es coherente con dicho análisis.

EJERCICIO 1			
TAREA	CORRECTA	INCORRECTA	ABSTENCIONES
PASAJE DE TABLA AL REGISTRO ALGEBRAICO	50%	21%	29%
TAREAS INTERNAS AL REGISTRO ALGEBRAICO	58%	33%	9%

EJERCICIO 2			
TAREA	CORRECTA	INCORRECTA	ABSTENCIONES
PASAJE DE TABLA AL REGISTRO ALGEBRAICO	79%	8,5%	12,5%
TAREAS DE CONVERSIÓN DEL REGISTRO ALGEBRAICO AL GREAFICO	62,5%	25%	12,5%

EJERCICIO 3			
TAREA	CORRECTA	INCORRECTA	ABSTENCIONES
PASAJE DEL REGISTRO ALGEBRAICO AL GRAFICO	71%	21%	8%
TAREAS DE CONVERSIÓN DEL REGISTRO ALGEBRAICO AL GREAFICO	12,5%	12,5%	75%
TAREAS INTERNAS AL REGISTRO ALGEBRAICO	17%	20,5%	62,5%

EJERCICIO 4			
TAREA	CORRECTA	INCORRECTA	ABSTENCIONES
TAREAS DE CONVERSIÓN DEL REGISTRO ALGEBRAICO AL GREAFICO	29%	29%	42%
TAREAS INTERNAS AL REGISTRO ALGEBRAICO	29%	29%	42%

De los resultados que se observan en las tablas, si bien en la primera columna la tarea a realizar es la misma a medida que se refiere a un concepto de mayor complejidad el porcentaje de alumnos que no realizan lo pedido aumenta.
La conversión del registro algebraico al gráfico en el caso de funciones lineales y cuadráticas tiene un porcentaje de respuestas correctas óptimo, pero si se trata de la función exponencial y la función racional los porcentajes disminuyen, suponemos que esto se debe a que tareas semejantes fueron realizadas en ciclos anteriores.
Si bien la tarea pedida en el ejercicio es la conversión del registro algebraico al gráfico, observamos que aquí un alto porcentaje no realiza tal conversión y que ninguno de ellos recurre al registro tabla como lo hicieron al graficar funciones lineales.
También observamos que cuando las tareas internas al registro algebraico son extensas y aumentan en complejidad se transforman en una dificultad para la conversión entre registros.
También observamos que los mayores porcentajes de respuestas correctas se dan en los dos primeros ejercicios, los cuales están vinculados a situaciones reales.

V.- Conclusiones

Luego del análisis podemos concluir que existe en los alumnos una diversidad de concepciones respecto de la noción de función dado el conjunto de representaciones simbólicas y de otros conocimientos previos evocados que asocian y utilizan para resolver las distintas situaciones vinculadas al concepto.
Las respuestas de los estudiantes muestran que tienen una concepción parcial de la noción de función dado que se observan dificultades en la conversión de un registro a otro. Los porcentajes más bajos en las respuestas correctas se dan en la conversión entre registros en funciones como la exponencial y la racional con las cuales los alumnos han tenido menos experiencia, lo cual nos induce a pensar que la cantidad de actividades que los alumnos realizan debería considerar este aspecto.
Dada la presencia de respuestas contradictorias el ejercicio N°4 pensamos que estos alumnos carecen de habilidades de autoevaluación pues no son capaces de detectar los errores que provocan estas contradicciones. También se observa que algunos alumnos realizan procedimientos correctos pero tienen un manejo algebraico deficiente.
Consideramos que para que los alumnos logren dar sentido a la noción de función es necesario que articulen diferentes representaciones semióticas; para lo cual deberían enfrentarse a suficientes problemas de conversión entre las distintas representaciones semióticas que admite la noción de función.

Bibliografía

- Chemello Graciela (coordinadora) , Agrasar Mónica , Barallobres Gustavo y otros, Estrategias de enseñanza de la Matemática. Universidad Virtual de Quilmes.2000.
- Ruiz Higueras, Luisa. La noción de función: análisis epistemológico y didáctico. Universidad de Jaén, España, 1998.

- Duval , R. Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Investigaciones en Matemática educativa II. Université Luis Pasteur de Strasboug. Face Ed. 1993
- Rico Luis (coord..) .La educación matemática en la secundaria. Editorial Ice/Horsori. 1997
- Azcárate Giménez, Carmen; Deulofeu Piquet, Jordi .Funciones y gráficas. Editorial Síntesis, 1996.
- Callejo de la Vega, María Luz; Paz, María Luz; Vidal, María Dolores. La función de las funciones. Narcea, 1994.

Anexo

Ejercicio 1: La siguiente tabla describe la desintegración de una cierta sustancia con el tiempo

T(años)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
C(gramos)	30	28,5	27,075	25,7213	24,4352	23,2134	22,0528	20,9501	19,9026

a) Determina qué función modeliza este proceso y escribe su fórmula
b) ¿Qué cantidad de sustancia queda después de transcurridos 30 años?
c) ¿Qué tiempo pasará para que queden 4 gramos?

Ejercicio 2: Dos compañías ofrecen un servicio de banda ancha bajo las siguientes condiciones

Compañía	Cargo Fijo	Cargo por minuto
A	$25	$0,15
B	$20	$0,25

a) Encuentra una función que modelice el costo del servicio de banda ancha mensual ofrecido por cada compañía
b) Represéntalos en un mismo gráfico
c) Establece en que circunstancias conviene elegir una compañía u otra

Ejercicio 3: Sea la función $S(t)=-2t^2+8t$

a) Represéntala gráficamente
b) Decide si tiene inversa. Justifica
c) Si tu respuesta es negativa, restringe convenientemente para que tenga inversa y encuéntrala
d) Representa la función y su inversa en un mismo sistema de ejes

Ejercicio 4: sea la función $f(x)=(x-1) / (x+3)$

Determina: dominio, imagen, intersecciones con los ejes, simetrías, asíntotas, gráfico, intervalos de crecimiento y de concavidad.