Estudio cualitativo del aprendizaje de la validación en matemática: avances en base al análisis de protocolos de clase.

Barreiro, Patricia; Falsetti, Marcela; Formica, Alberto;

Marino, Tamara; Mellincovsky, Diana[i]

Instituto del Desarrollo Humano

Universidad Nacional de General Sarmiento.

Resumen

Presentamos aquí un estudio cualitativo sobre el aprendizaje de la validación en Matemática en estudiantes del nivel universitario inicial, para el tema "función de proporcionalidad directa". Brevemente, la validación es una actividad matemática que consiste en el empleo de recursos de tipo técnicos, teóricos disciplinares y argumentativos, por parte del que aprende, para garantizar la validez de un resultado formulado. Es una actividad que se realiza teniendo en cuenta las convenciones de una comunidad que maneja el saber en forma experta (la comunidad científica, por ejemplo).

Este estudio está realizado sobre clases que promueven interacciones entre pares y cuyas actividades están diseñadas para favorecer el aprendizaje de la validación pues interpelan las formas usuales de proceder y abordar las tareas por parte de los alumnos. Desarrollamos un procedimiento analítico, que describimos y aplicamos, para determinar ciertas categorías de análisis bajo las cuales realizamos el estudio. El abordaje presentado en este trabajo consiste en realizar un primer nivel de análisis interpretativo, que se refiere a los hechos sucedidos en las clases, luego la ampliación de las categorías de análisis preliminares, que surgen del marco teórico, con categorías que surgen a raíz de este primer nivel de análisis y por último, realizamos un segundo nivel de análisis referido a las categorías determinadas que caracterizan, de algún modo, el aprendizaje en validación. De lo realizado se evidencian las dificultades en el aprendizaje de la validación en Matemática, la relevancia del accionar docente y de las actividades propuestas para favorecerlo y la riqueza de la información obtenida de los diálogos dados en el interior de los grupos.

Palabras claves: validación en Matemática - análisis cualitativo – protocolos de clase – función lineal – matemática preuniversitaria.

1. Introducción

En el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, el término "validación" toma mayor presencia a partir de su uso en los trabajos de la Escuela Francesa (ver Brousseau, 1995; Balacheff, 1987). Bajo ese marco teórico, la validación consiste en el empleo de recursos de tipo técnicos, teóricos disciplinares y argumentativos, por parte del que aprende, para garantizar la validez de un resultado formulado. El despliegue de los recursos es incentivado por la inserción del sujeto que aprende en un ámbito social, ya que es frente a este ámbito que debe dar garantías de validez. En este sentido, la validación es una actividad matemática inherente al estudio de la disciplina; sin embargo, no hay demasiado desarrollo didáctico sobre cómo se aprende o cómo se enseña a validar (ver Falsetti y otros, 2004). Con el propósito de avanzar en el conocimiento de este asunto, presentamos aquí un análisis cualitativo del aprendizaje de la validación basado en protocolos de clase. Entendemos por *protocolo de clase* el registro escrito de los diálogos y los hechos que han tenido lugar en el transcurso de la clase

En relación con el camino metodológico recorrido, realizamos el análisis cualitativo de unidades o segmentos de clases, damos a conocer cómo y por qué surgen algunas categorías de análisis y finalmente mostramos cómo realizamos un análisis en base a las mismas.

Los protocolos que aquí analizamos son registros de clases de nivel preuniversitario del Curso de Aprestamiento Universitario (CAU) de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), sita en el Conurbano de la provincia de Buenos Aires, Argentina. Las clases fueron gestionadas por profesores distintos en comisiones diferentes. La particularidad de las clases seleccionadas para este trabajo es que en ellas se promueven interacciones entre los estudiantes, que trabajan en pequeños equipos. Los diálogos registrados evidencian el proceso de construcción del conocimiento como consecuencia de la actividad planteada para el aprendizaje (consignas de tareas) y de la interacción entre pares. Evidencian también los recursos técnicos, teóricos y argumentativos que los estudiantes despliegan para validar.

Organizamos el artículo de la siguiente manera: en la sección 2 nos referimos a la validación en Matemática con el fin de dar un marco teórico que nos permita justificar la presentación de las categorías de análisis. En la sección 3 damos más detalles sobre el contexto de la investigación y las características de los protocolos, explicando cómo han sido recabados los datos. En la sección 4 anticipamos cuál será el procedimiento analítico que luego pondremos en práctica. En la sección 5 ilustramos el proceso analítico basándonos en algunos protocolos con una interpretación de los significados asignados por los actores de las clases. Las categorías de análisis son enunciadas en la sección 6. En la sección 7 realizamos un análisis de tipo transversal haciendo uso de las categorías y luego presentamos algunas consideraciones finales en la sección 8.

2. Validación en Matemática.

Aunque el término "validación" no es usual en la jerga de la Matemática científica, es claro –tanto para el que produce matemática como para el que la enseña– que este proceso está en el centro de la escena y es transversal a la producción matemática, sea escolar o científica. Decidir que algo es "válido" en Matemática trasciende la conformidad de las reglas o convenciones sociales esporádicas; exige la internalización de leyes lógicas, de un sistema –externo al sujeto– según el cual se organizan los objetos matemáticos, sus relaciones, propiedades y operaciones y también la internalización de simbolizaciones específicas y de "artefactos" específicos (tablas, esquemas, gráficos, dibujos, etc.) como formas de expresión del saber. Un término más usual en Matemática para describir un proceso con estas características es la "prueba matemática" y su producto en la mayoría de los casos es la "demostración matemática" que, en su paradigma clásico, se presenta como una sucesión finita de deducciones encadenadas por inferencias lógicas partiendo de un número finito de principios que se asumen como válidos, aún cuando no han sido deducidos de otros, que son los axiomas. El método de validación bajo este paradigma no es empírico, ni de observación, ni fáctico. La validación en Matemática depende de "convenciones" en el seno de una comunidad científica que comparte ciertos principios. Por un lado, la aceptación de una serie de axiomas organizados en un *sistema axiomático*, que cumple requisitos como por ejemplo la consistencia y la independencia (ver Klimovsky & Boido, 2005) y por otro, la asunción de leyes lógicas que se usan en las deducciones. Por ejemplo, la corriente de creación matemática llamada "intuicionista", cuyo principal exponente es Brouwer (1881-1966), no asume el "principio del tercero excluido" (o bien p es verdadero o bien –p lo es) ni las definiciones de objetos que no cumplan propiedades efectivamente verificables o construibles (ver Klimovsky & Boido, 2005). De lo dicho concluimos que la validación en Matemática, al igual que otros tipos de validaciones científicas o tecnológicas, resulta de una serie de tradiciones y "acuerdos" en el seno de una comunidad, en este caso la matemática, sobre lo que es correcto y verdadero, y sobre los medios, lógicos y simbólicos, que permiten aceptarlo. Este carácter "institucional" (nos referimos a la Ciencia Matemática como institución, ver Chevallard, 1992; Godino y Batanero, 1994) que tiene la validación le confiere una componente social y comunicativa que se pone en juego al momento de aceptar como matemáticamente válido un cierto conocimiento, pues para ello debe existir una teoría o método consolidados, comunicados y científicamente aceptados, capaces de explicarlo o de mostrar cómo se construyen los principios que rigen como autoridad en ese campo de saber.
En suma, consideramos que la validación en Matemática conlleva una confrontación del conocimiento personal con un sistema externo al sujeto, constituido y estructurado por reglas consensuadas en el seno de una comunidad (el grupo de pares, el profesor como representante de la Matemática escolarizada o la Matemática científica, etc.). Se espera que el estudiante, especialmente el universitario, evolucione en su aprendizaje hacia un tipo de validación científica cuyo sistema de métodos, reglas y símbolos trasciende el tiempo actual y determina tanto el alcance del conocimiento, como la apropiación adecuada de símbolos y sus significados institucionales, lo que implica saber cómo esos símbolos son usados en la ciencia y cuáles son los significados científicos.

<u>2.1. Aspectos del aprendizaje de la validación en Matemática que estudiamos</u>.

En nuestro estudio decidimos abordar la validación en un sentido amplio, no sólo circunscripta a la demostración matemática. porque demostrar está ligado a sentencias en las que se relacionan objetos o se predican propiedades sobre los mismos (los teoremas) y a nosotros nos interesan también los procedimientos. Nos ocupamos predominantemente del aprendizaje del estudiante de la actividad matemática de validar la cual se hace de cara hacia la comunidad social o institucional de referencia (el grupo de pares, el grupo escolar, la matemática científica) mientras otras actividades, como la de resolver problemas o de modelizar, se hacen de cara al problema en sí o a un fenómeno. Por eso consideramos que una forma de saber sobre el aprendizaje de la validación es estudiando la relación entre dicho aprendizaje y las interacciones sociales surgidas en el aula. Para estudiar el aprendizaje de la validación hacemos particular hincapié en: a) las prácticas, principios y símbolos que son usados por los estudiantes al momento de validar; b) estudiar las relaciones entre el ambiente social del aula, con las interacciones que pueden darse en este espacio, y la validación,

Para precisar y orientar mejor nuestro estudio, usamos la siguiente definición ya introducida en trabajos anteriores (Falsetti y otros, 2004).

Entendemos la validación de un conocimiento matemático en situación de aprendizaje como el resultado de un proceso del sujeto por el cual éste es capaz de manifestar y sostener en un ámbito social las razones, elaboradas autónomamente, de por qué un enunciado es o no verdadero, un procedimiento es o no correcto o un razonamiento es o no válido. Al manifestar sus razones debe hacer explícitos los sentidos de los objetos matemáticos que manipula y estos sentidos deben corresponderse con los significados aceptados por la Institución Matemática.

Es claro que validar no es una actividad fácil. El estudiante debe apropiarse de recursos técnicos y competencias argumentativas que permitan defender su producción en un ámbito social y apropiarse del sistema externo, de símbolos, principios y prácticas, para confrontar su conocimiento personal con el institucionalizado. Sin embargo, el estudiante tiende a producir sus razones y métodos personales que le permiten, frente a situaciones similares en las que ha aprendido un concepto o procedimiento, volver a repetirlos o evocarlos. Uno de nuestros propósitos es entonces conocer estas formas personales de los estudiantes incluso las que están presentes en lo que llamamos "*el proceso hacia la validación*", es decir el proceso previo al de validación en el cual un estudiante avanza con acciones y formas de elaborar razones para justificar lo que dice y avanza también formas de establecer el alcance de dichas razones. Este proceso debiera ir aproximando al estudiante a un proceso de validación más cercano al que la "institución matemática" considera que debiera hacerse para garantizar que su conocimiento personal es válido por cuanto hay una teoría matemática capaz de explicarlo.

Cabe destacar que lo que entendemos como "proceso hacia la validación" está relacionado con lo que Balacheff considera como proceso de validación (ver Balacheff, 1987) el cual "consiste en asegurarse las garantías necesarias de un compromiso en la acción; en este caso la acción de decidir sobre la verdad de una aserción". Según Balacheff, se entiende que el proceso de validación es todo aquello que se genera y manifiesta dentro de una situación de validación. Forman parte de este proceso cuestiones como: la toma de conciencia de las contradicciones, la elaboración de pruebas de distinto tipo, la argumentación y la refutación como parte de la misma, etc.

Para nuestro trabajo consideramos, además, acciones que anticipan la toma de decisiones, como las de tipo imitativas, etc. Para un mejor análisis de las prácticas, principios y símbolos usados en este proceso personal de validación consideramos:

a) identificar acciones implicadas en el proceso hacia la validación, para ver cómo ellas se manifiestan en el aprendizaje de diferentes contenidos y cuán pertinentes son para validar. Hemos identificado 22 de estas acciones que detallamos en la sección siguiente.
b) tener en cuenta lo que comunica ya sea mediante el lenguaje simbólico matemático o natural o mediante "artefactos" matemáticos (gráficos, tablas, esquemas, etc.). Cuando se valida una producción es necesario mostrar que se cumplen con ciertas reglas, especificaciones o se responde a un razonamiento lógico. Para ello es necesario usar el lenguaje correctamente. En la mayoría de los casos, el aprendizaje de la validación y del uso del lenguaje se hacen en simultáneo con lo cual se dan casos en los que el alumno presenta una "buena" escritura (uso adecuado de símbolos, de gráficos, etc.), pero no puede dar una explicación "oral" correcta de aquello que ha escrito, lo que pone en duda su saber expresado mediante esos símbolos. Lo contrario, pero también frecuente, es el caso de aquellos alumnos que muestran con su explicación oral cierta claridad y corrección matemática, pero no concluyen en una escritura correcta.

<u>2.2. Porqué un análisis cualitativo del aprendizaje de la validación en Matemática</u>

La investigación cualitativa se caracteriza por trabajar con datos empíricos que el investigador recoge sobre el fenómeno en estudio, lo más fehacientemente posible, situado personalmente en el ámbito en el que se desarrollan los hechos. Estos datos empíricos son analizados, organizados y presentados en relación con las categorías que responden a teorías

de base y que, eventualmente, pueden ser reelaboradas durante el desarrollo de la investigación. El propósito de una investigación de este tipo es estudiar cualidades y se busca comprenderlas en su situación particular. De aquí la preocupación por interpretar los hechos atendiendo al significado que se le asigna dentro del contexto en el que se producen.
Nuestra investigación, centrada en el aprendizaje de la validación, intenta observar y registrar los modos en que los alumnos elaboran estrategias con el propósito de avanzar en esta actividad matemática. Esto implica entender los mecanismos por los cuales los estudiantes defienden sus producciones personales y sostienen sus argumentos socialmente, es decir, se intenta analizar los procesos que los sujetos realizan en el momento de validar, interpretando el significado que ellos asignan. Con este propósito, y dadas las características de la investigación cualitativa enunciadas antes, es que nos parece apropiado encarar este estudio bajo estos métodos

3. El contexto de las clases que se analizan.

Los protocolos que se van a analizar son de clases del Curso de Aprestamiento Universitario (CAU). Este curso es de carácter obligatorio para los aspirantes a ingresar a esta universidad y tiene una duración de ciento cuatro horas, repartidas en dos encuentros de dos horas semanales. El estudiantado del curso es bastante heterogéneo pues proviene de distintas escuelas secundarias de la zona y tienen diferentes experiencias educativas. En el CAU, desde su programación curricular, se busca la participación activa de los estudiantes, desinhibirlos frente a la Matemática, favorecer razonamientos y cuestionamientos y diálogos. En general al principio de las clases los alumnos abordan una serie de tareas que el profesor selecciona de una guía de actividades unificada para todo el CAU (Carnelli y otros, 2007), por lo que las actividades son similares para todas las comisiones. Éstas tratan de no ser rutinarias ni algorítmicas. El profesor fomenta que resuelvan las tareas en equipos los cuales se conforman al principio del curso de forma bastante espontánea y se mantienen en el tiempo. Pasado un tiempo de trabajo, el profesor recoge lo producido por los alumnos, dirige una puesta en común, organiza los resultados y la teoría. Su explicación o exposición al colectivo es posterior al encuentro entre el estudiante y las actividades.
Los protocolos analizados en este trabajo provienen de dos clases sobre el tema función de proporcionalidad directa que fueron impartidas para distintas comisiones de estudiantes y gestionadas por profesores diferentes. Ambos profesores contaban con una lista de actividades propuestas muy similares. La particularidad de estas clases, a las que indicaremos como clase 1 (C1) y clase 2 (C2), es que en ellas se da lugar a interacciones entre los estudiantes, que trabajan en pequeños equipos, esto permite evidenciar un proceso de construcción del conocimiento como consecuencia de la actividad planteada y de interacciones entre pares.
Las clases C1 y C2 a las que nos referimos tratan temas que son del currículum de la escuela secundaria y se suponen conocidos de esta instancia. En este nivel preuniversitario se pretende retomar estos asuntos desde una óptica más conceptual y problematizadora "desnaturalizando" el uso de la famosa regla de tres como "regla mágica", indiscutible y potente. Para muchos estudiantes, la "regla de tres" es el soporte necesario para validar el resultado de un problema con ciertas características que pueden identificar pero no saben explicitar (tal como la extracción de escalares: a valor $k.x$ le corresponde $kf(x)$). Las actividades de la clase fueron pensadas para trabajar sobre a) definición de la condición de proporcionalidad: "a cualquier variación constante de la variable independiente le corresponde una variación constante de la variable dependiente" o cualquiera de sus formas equivalentes, b) reconocimiento de la condición de proporcionalidad desde los registros gráfico y analítico, c) validación del uso de la regla de tres simple directa (por qué funciona), d) validación del pasaje del registro gráfico (una recta no vertical por el origen de coordenadas) al analítico (la fórmula correspondiente es del tipo $y=mx$).
Según lo planificado, se esperaba que los alumnos se acercaran al tema desde una aproximación numérica, para luego pasar al trabajo analítico, desde el cual pudieran pensar en una forma general de encarar ese tipo de tareas, y por último abordar lo gráfico.

4. El camino transitado para establecer categorías de análisis.

Las clases analizadas se desarrollan en torno a las tareas brevemente descriptas en la sección anterior. Los protocolos de dichas clases son reconstrucciones de lo que se obtuvo mediante registro escrito y grabado. El registro escrito fue efectuado por un observador situado en el aula durante toda la clase, conocedor del contexto institucional y curricular del CAU, que observaba uno de los equipos trabajando y la puesta en común. El observador trató de no interactuar con los integrantes del equipo para influenciar lo menos posible en la interacción entre pares y de registrar lo más fielmente posible lo que acontecía entre los actores. Las reconstrucciones se hicieron en base a estos escritos y las desgrabaciones de las clases. De la clase C1, presentamos fragmentos de dos protocolos diferentes de dos de los equipos de estudiantes cuyas respuestas fueron registradas por observadores diferentes, mediante notas y grabaciones. De la clase C2, tenemos el registro, también mediante notas y grabaciones, de uno de los equipos.

Inspirados en los lineamientos del análisis cualitativo (ver Goetz y LeCompte, 1988; Sampieri y otros, 2006; Wittrock,1989) procedimos a examinar los protocolos y dividirlos en secciones, que serían nuestras primeras unidades de análisis. El criterio utilizado para marcar estas secciones fue: hallar manifestaciones que se refieran a aprendizajes acordes a los objetivos de aprendizaje propuestos e identificar acciones de los actores para validar sus conocimientos. En esas unidades tratamos de interpretar cómo los actores operaban con los datos de las consignas, usaban el lenguaje y los símbolos, inferían conclusiones. Esta interpretación conformó nuestro *primer nivel de análisis* que también fue insumo para formular categorías. Consideramos como *categoría de análisis a una unidad que da sentido a un grupo de datos; es un aspecto sustentado en los datos de modo que refiriéndonos a él podemos conocer más sobre el fenómeno, entidad o noción que queremos estudiar*. En nuestro caso las categorías de análisis provienen de dos “fuentes” diferentes, algunas surgen del marco teórico presentado en la sección 2, por lo que las consideramos *preliminares*, y otras de los datos recabados en los protocolos. Cabe aclarar que las categorías presentadas en este trabajo podrían ser de carácter provisorio, es decir susceptibles a cambios y refinamientos, a medida que avancemos en la investigación. Formuladas las categorías, efectuamos un *segundo nivel de análisis* en el que nos referimos al aprendizaje de la validación observado en los protocolos a la luz de dichas categorías.

Entre las categorías preliminares figuran las “acciones de validación”, que son aquellas acciones que aparecen en situaciones en las que el sujeto intenta validar su producción matemática. Presentamos esta categoría en esta sección dado que fue utilizada como uno de los indicadores para determinar unidades de análisis. En otros trabajos precedentes (ver por ejemplo Falsetti y otros, 2005) hemos enunciado “acciones de validación” que están presentes en las situaciones de aprendizaje de la validación y que mostramos en la tabla siguiente:

A1 Hacer ensayos o intentos	A2 Usar fórmulas, definiciones o procedimientos desconectados de la actividad a resolver
A3 Usar fórmulas, definiciones o procedimientos conectados a la actividad a resolver	A4 Generalizar inductivamente (observar alguna regularidad)
A5 Enunciar ambigüedades	A6 Ejemplificar
A7 Anticipar, predecir	A8 Elegir entre varias opciones dadas justificando su elección
A9 Encontrar analogías o similitudes	A10 Describir (mostrar pasos y procedimientos)
A11 Ejemplificar mostrando regularidades	A12 Imitar (reproducir una estructura de razonamiento o procedimiento)
A13 Explicar (dar razones y relaciones)	A14 Comparar (establecer semejanzas y diferencias)
A15 Justificar por la “autoridad” (libro, docente, par experto)	A16 Reconocer contradicciones
A17 Reconocer la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen	A18 Enunciar la negación de una regla, propiedad, etc.
A19 Identificar condiciones bajo las que ocurren ciertas regularidades ya reconocidas	A20 Derivar conclusiones con premisas dadas
A21 Formular un razonamiento simple (elaborar las premisas y deriva una conclusión)	A22 Reconocer que las herramientas empleadas no son suficientes para garantizar la validez de un conocimiento (puede no saber cuáles necesita para garantizar la validez).

Formulamos el resto de las categorías surgidas luego de realizar un primer nivel de análisis de los protocolos.

5. Análisis de protocolos.

En esta sección mostramos el análisis interpretativo de las unidades determinadas.

5.1. Referencias para el análisis.

<u>Referencia a los protocolos:</u>

Protocolo	Clase	Profesor	Equipo
PR1	Clase en comisión1: C1	P1	Elías, Lorena, Valeria, Lilian, Viviana
PR2	Clase en comisión1: C1	P1	Soledad, Miguel, Cristian,Daniel, María
PR3	Clase en comisión 2: C2	P2	A,B,C,D,E

<u>Consignas de trabajo:</u>

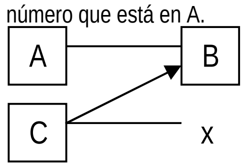
<table>
<tr><th>Clase 1 (C1)</th><th>Clase 2 (C2)</th></tr>
<tr><td>
1- Se obtuvo la información de la posición P y el instante t en que un automóvil atraviesa diferentes mojones en la ruta 2. Los datos relevados se muestran en la tabla:
<table>
<tr><th>t (tiempo)</th><th>P (posición)</th></tr>
<tr><td>0 h</td><td>0 km</td></tr>
<tr><td>2 h</td><td>160 km</td></tr>
</table>
a) Estimar la posición a la que se encontraría el auto a las 3 h
</td><td>
1-Se obtuvo la información de la posición P y el instante t en que un automóvil atraviesa diferentes mojones en la ruta 2. Los datos relevados se muestran en la tabla:
<table>
<tr><th>t (tiempo)</th><th>P (posición)</th></tr>
<tr><td>0 h</td><td>0 km</td></tr>
<tr><td>2 h</td><td>160 km</td></tr>
</table>
a) Estimar la posición a la que se encontraría el auto a las 3 h
b) ¿Por qué el ítem a) pide “estimar” y no “calcular exactamente? ¿Se podría saber con exactitud la posición del auto a las 3 horas de viaje? ¿Qué supuesto adicional en el contexto del problema se está considerando que permite responder el ítem a)?
</td></tr>
<tr><td>
2- La población argentina en el año 1980 era de aproximadamente 25 millones (25.10^6) habitantes. En 1990 había crecido hasta alcanzar 30 millones (30.10^6), es decir en 10 años la población aumentó en 5 millones de personas.
a) Estimar la población argentina en el 2010. Identificar qué supuesto adicional, en el contexto del problema, se está considerando.
b) De acuerdo con el razonamiento anterior, estimar la población que hubo en 1930.
c) ¿A qué se debe el resultado del ítem b)? Relacionar la respuesta con el supuesto considerado en el ítem a).
</td><td>
2-La población argentina en el año 1980 era de aproximadamente 25 millones (25.10^6) habitantes. En 1990 había crecido hasta alcanzar 30 millones (30.10^6), es decir en 10 años la población aumentó en 5 millones de personas.
a) Estimar la población argentina en el 2010. Identificar qué supuesto adicional, en el contexto del problema, se está considerando.
b) De acuerdo con el razonamiento anterior, estimar la población que hubo en 1930.
c) ¿A qué se debe el resultado del ítem b)? Relacionar la respuesta con el supuesto considerado en el ítem a).
</td></tr>
</table>

3- Establecer en consenso dentro del grupo qué condiciones se deben cumplir para que se pueda usar la regla de tres. Registrar por escrito las condiciones establecidas. Si hay más de una opción, incluir todas indicando ventajas y desventajas que se encuentran para cada una.

Pedro le pregunta a Juan cómo resolvió el ítem a). Juan le muestra lo siguiente

2 h _______ 160 km
3 h _______ $x = \frac{3\ h\ .\ 160\ km}{2\ h} = 240\ km$

Pedro le pregunta a Juan ¿por qué la regla de tres simple directa se hace así?
Juan dice que lo que hay que hacer es multiplicar el número que está en la posición C por el que está en B y al resultado dividirlo por el número que está en A.



Justificar por qué la regla de tres simple directa "se hace así", es decir por qué haciendo este procedimiento se encuentra el resultado buscado.

5.2 Primer nivel de análisis: En busca de los significados dados por los actores.
Como ya dijimos hicimos la interpretación unidad por unidad. Decidimos presentar estas interpretaciones en torno a temas recurrentes que aparecieron en los tres protocolos. Lo que sigue muestra este análisis.

- *El papel de los esquemas escolarizados que funcionan como "cajas negras"* es uno de los asuntos que fue notado como recurrente en los protocolos. En muchos casos la escolaridad instala uniformemente esquemas (conjunto de reglas, símbolos y procedimientos) sin hacer demasiado hincapié en las condiciones y definiciones que permiten el uso de ese esquema. Tal es el caso de la regla de tres simple directa o la reducción la unidad en los problemas de proporcionalidad directa. Se ejecutan estos procedimientos sin siquiera comprobar que las variables están en proporcionalidad directa. Esto se evidencia en el trabajo realizado a partir de la consigna 1, en ambas clases. En ellas no se explicita intencionalmente en un primer momento la relación proporcional entre las variables para que la definición de proporcionalidad y las condiciones de uso de reglas sean revisadas. Se observa en los distintos grupos, que los alumnos operan porque asocian la disposición de pocos datos al esquema ya conocido en el cual el correspondiente de la unidad se mantiene constante. Para responder que a las 3hs el auto estará a 240 km hay que asumir velocidad constante y que entonces *por cada hora* se recorre 80 km, dato no explicitado en el enunciado. Lo mismo sucede en el problema siguiente, el de la población, en el que agregan una condición sin explicitarla, que *a variación constante de años le corresponde variación constante de población* y entonces *por cada 10 años aumenta 5 millones*, por lo cual dudamos que reconozcan que la necesitan para realizar las operaciones que proponen y que la puedan enunciar en estos términos. Otro ejemplo de cómo se instalan los esquemas se ve en el intento de poner en práctica lo aprendido y responder a lo que se cree que son las "exigencias" en las clases de Matemática. Si bien la forma en que los estudiantes encaran los ejercicios propuestos es mediante tanteo numérico, en lugar de tratar de ver las regularidades de esos ensayos y plantear los símbolos en función de ellos, se introducen símbolos, formatos de fórmulas, gráficos que se manipulan sin sentido. Por ejemplo para la actividad 1, en PR3, el alumno D muestra al resto de sus compañeros lo que escribió para "certificar" el resultado que el móvil en 3 h estaba en la posición 240 km

  t= 0 P(t)= 0
  t=2 P(2)=160
  P(1) = 80 km x h
  a) t= 2 160km/ 2 = km / h = 80 km / h

Por su parte, Soledad plantea la necesidad de un gráfico de tendencias. Esto hace que en el equipo surjan los intentos de sistematización: reconocimiento de las variables, de cuál es la independiente y cuál es la dependiente, la convención de la representación, la fórmula.

Soledad además desea encontrar una fórmula, como si la misma la habilitara a presentar el procedimiento con “status” matemático. Sus intentos fallidos y forzados muestran que para ella el significado de la fórmula está asociado a los resultados obtenidos al reemplazar números, aún sin tener claro cuál es la variable a reemplazar ni qué valores numéricos puede tomar. No hace alusión al proceso que la fórmula representa ni a la generalización realizada a partir de ella de los intentos numéricos, confunde la variable con la constante, no tiene claro el papel de cada símbolo. La forma en que desea legitimar la resolución es a través de formatos estandarizados que conoce pero cuyos significados matemáticos no tiene afianzados. A continuación mostramos la unidad del protocolo que da evidencia de este análisis.

Cristian vía calculadora, estima que a las 3 horas el auto recorrió 240 km

Soledad: yo también hago el gráfico para ver la tendencia

Cristian: ¿Pero cual es la variable independiente? ¿La variable independiente es el tiempo?

Soledad: Claro,… la ordenada es el tiempo, x sería la posición, porque vos lo que tenés que hallar es donde está ubicado en el tiempo. (cavila un rato) Ah…no: el horario sería abajo, la posición sería arriba, listo.

Cristian: ¿Pero cómo la podemos plantear?

Soledad: ¿Cómo?

Daniel: Pero, ¿cómo la podemos pensar para…..?

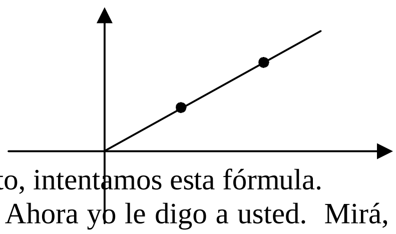
Soledad: Lo que tenemos que hallar es la posición, función de p que sería la posición, tenés un dato porque en una hora está recorriendo 80 km, en 2 horas 160 y en 3 horas 160 + 80, 240

Entonces la fórmula sería… (escribe: $f(P) = 3 \cdot P$, $f(80) = 3 \cdot 80$)

Miguel: Al poner P como 80, ahí estarías pensando en P fijo, en 80.

Soledad: claro, porque vos ya ves una tendencia ahí… Tendríamos que poner primero f o sea P (escribe: f (0) = 3.0, f(1) = 80, f(2) = 2.80) .La fórmula sería f entre paréntesis que sería P sería P por 80 (escribe f (P) = P.80) te da el resultado de **y**, (comprueba reemplazando en su fórmula por 1, 2 y 3 para verificarla)

(Cristian dibuja en su carpeta)



…Se acerca P1…

Miguel: Nosotros llegamos a esto, intentamos esta fórmula.

Soledad: “Yo soy la profesora” Ahora yo le digo a usted. Mirá, yo hice esta fórmula, no sé si lo estoy haciendo bien (explica el proceso de la misma forma que lo hizo con los compañeros)

P1: No les puedo decir si es correcta la fórmula. Ustedes tienen que buscar formas de defender lo que dicen, la idea es que el grupo esté de acuerdo o sea que lo que pretenden esté consolidado en el grupo. Soledad acaba de dar toda una explicación, a ver que dice el resto de los compañeros….

Miguel: Seguimos con el 2) y después buscamos otra forma de hacerlo

Observador: Sí, voy a agregar para que piensen algo para la defensa de la que hablaba P1 y es esto: piensen si por ahí no falta algún dato en el problema, de modo tal que si alguien viene de afuera lo hace igual que vos, como para convencerlo de que lo haga igual que vos. Entonces pensá si no hace falta algún dato ¿Entienden? Si hace falta un dato para que alguien que quiere hacer el problema refuerce la forma en que ustedes lo encararon.

(Piensan, discuten en voz baja)

Miguel: Ah, la velocidad es 80 km por hora.

En los últimas líneas del diálogo se ve que la interacción con el docente sirve para enfocar la tarea: “ustedes tienen que buscar formas de defender lo que dicen” significa que busquen formas de validar, defiendan sus ideas frente a sus pares a través de argumentos. En el equipo no se evidencian suficientes estrategias para validar lo producido. Prefieren seguir con la tarea antes de reflexionar sobre el asunto. La intervención del observador es para invitarlos a retomar la cuestión y para que emerja el supuesto con el cual han operado y que les resulta hasta ahora “transparente”. Miguel explicita ese supuesto aunque no lo hace en función de las

relaciones de las variables o características del fenómeno, puede ser por eso que el resto del equipo no lo tome como un aporte sustancial que les ha permitido realizar las operaciones y llegar a estimar el resultado pedido.
En el PR3, sólo el alumno B entiende la intención de la consigna b). Si bien no sabe cómo expresarlo, su preocupación está orientada a dejar plasmadas las condiciones o datos para que otra persona lo interprete igual que ellos; dice: "*otra persona se tiene que dar cuenta cuando lo lea de por qué es proporcional*." El alumno D escribe en su cuaderno los datos para explicar lo que hizo. De su escrito inferimos que no hace un buen uso de la simbología, confunde las variables con las unidades físicas, no dispone los datos en las formas convencionalmente aceptadas en Matemática (una tabla, un gráfico, el guión usado para relacionar una variable con la otra en la regla de tres, etc.), mientras que la alumna A dicta el procedimiento que realizaron para calcular la posición a las 3h, pero en todo el relato no aparece en ningún momento el supuesto implícito de que el auto marcha a velocidad constante, usado cuando plantean "por cada hora recorre 80 km". Sin embargo, hay una idea de que para resolver hay que "pasar" por la unidad. El alumno B, sigue preocupado por transmitir en esta consigna la idea de cómo la resolvieron, interrumpe llamándole la atención a la alumna A sobre la respuesta que estaban elaborando, sugiere agregar algún dato para que otra persona sepa cómo resolver el ejercicio. En sus palabras: "*No hay que decir cómo se hizo, tenés que poner en la lista una hora. Así cualquiera puede sacar la cuenta solo, hay que darle un dato más. Agregar el de una hora entonces lo otro lo deducís.*" En ningún momento explican por qué lo que ellos proponen bastaría para que otra persona interpretara el enunciado igual que ellos. En la frase se evidencia que cuando el alumno expresa que quiere agregar un dato en realidad está suponiendo que la consigna hace referencia a darle más datos a otra persona y no a explicitar los supuestos que utilizaron para resolver con el fin de que otra persona interprete lo mismo que ellos.
En los diálogos analizado se evidencian las siguientes ´acciones de validación´ "(A10) Describir, mostrar pasos y procedimientos" y "(A13) Explicar (dar razones y relaciones*)*"

- *El papel de las actividades para la clase en el surgimiento de formas de validación*. El contraste entre el resultado de un procedimiento matemático y lo esperable por el contexto de un problema puede ser muy efectivo para incentivar a los alumnos a revisar supuestos implícitos y formas de validación. Esto es lo que se evidencia en la actividad 2, ítem b). En esta actividad suponen al principio (sin explicitarlo ni acordarlo) que el aumento de la población es constante (5 millones cada 10 años). Se dan cuenta que mantener esta relación constante hace que en el proceso "hacia atrás", utilizando restas sucesivas, se llegue a que en 1930 habría 0 personas. Frente a esto concluyen en un primer momento que no "siempre está bien sumar o restar 5 millones" y que no es ese el procedimiento que debe usarse para calcular la población en 1930. Sin embargo, no hubo revisión de la respuesta del ítem a) en donde sí se usó este supuesto, es decir que pareciera que la suposición de "ir de cinco en cinco" vale en un sentido pero no en el otro. La toma de conciencia de la no adecuación del modelo proporcional, aunque limitada, fue posible gracias a cómo está planteada la consigna, lo que nos hace pensar en la importancia de la elaboración de la actividad cuando se desea que el estudiante aprenda a validar. También tiene importancia la confrontación de las diferentes miradas que los alumnos hacen de la situación para que sus argumentos vayan evolucionando. Algunas de las acciones que realizan en el proceso de validación de sus razonamientos son: "(A17) reconocer la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen", "(A10) describir, mostrar pasos y procedimientos" "(A4) generalizar inductivamente mostrando regularidades", tal como se muestra en la tabla realizada por Lorena y en la cuenta de Viviana del PR1. Mostramos una sección del PR1 donde se evidencia lo analizado en el párrafo anterior.

> Elías: pero no puede ser… porque nos da que en 1930 la población es 0, pero no puede ser porque en 1930 había gente…
> Elías: por lo que dice acá, no queda nadie.
> P1: ¿y entonces?
> Elías: está mal.
> P1: ¿qué cosa está mal?
> Elías: siempre sumar o restar 5 millones. No siempre va de 5 en 5. No fue siempre lo mismo.
> Viviana: como que no hay una continuidad en los 5. No se mantiene constante el crecimiento de 5 en 5, por migraciones, etc…

Elías: claro, porque por ahí en una determinado momento se estancó y en otro momento creció de golpe.
Elías: faltan datos para hacerlo bien…
P1: armen una respuesta donde cuenten esto, a qué valor llegaron siguiendo el razonamiento qué usaron y expliquen algo sobre ese resultado.
Lorena: para mí sí se puede calcular.
P1 (hablándole a Elías): tu compañera dice que si se puede calcular, que no es lo que vos decís.
Lorena: si se puede hacer un cálculo aproximado… hay que usar el mismo razonamiento anterior, como el que usaste para calcular la población en 2010.
Elías: bueno, pero llego a que no hay nadie… entonces está mal, porque en 1930 supuestamente había gente
Lorena: ah! Claro, yo no hice la cuenta…
Viviana: la cantidad de personas no es constante ya sea por migraciones o emigraciones
Lilian y Viviana responden el ítem c)
Viviana: el resultado es falso porque nos estamos guiando por una constante… pueden ser más o menos personas.
Lorena escribe en su carpeta (en columna):
1990 ------- 30.10^6 / 1980 ------- 25.10^6 / 1970 ------- 20.10^6 / 1960 ------- 15.10^6 / 1950 ------- 10.10^6 /
1940 ------- 5.10^6 / 1930 ------- 0
Es decir que la población es cero en 1930.
Viviana explica otra manera de hacerlo:
10 años ------- 5 millones
50 años ------- x = 50x5:10 = 25 millones
25 millones es lo que disminuyó y lo restás, 25 – 25 da cero.

Vemos en esta unidad del PR1 que la intervención del profesor: "*¿qué cosa está mal?*" promovió en Elías la reflexión y fue importante para incentivar a que en el seno del equipo se dieran cuenta que habían mantenido una relación constante que no figuraba como dato del problema. Por otro lado, el trabajo entre pares permitió que en lugar de caer en el desconcierto por la contradicción que en 1930 haya 0 personas, se esgrimieran posibles razones del fenómeno "*la cantidad de personas (se refiere a la variación de la población) no es constante ya sea por migraciones o emigraciones*".

En el PR3 se advierte la necesidad de los alumnos de construir modelos que se adecuen al fenómeno real que el problema les plantea para poder dar una justificación del procedimiento realizado. En lo que se transcribe a continuación vemos que B se da cuenta de que lo que no vale es el supuesto que estuvieron manejando, sin embargo, el argumento no es lo suficientemente fuerte como para que lo hecho en la consigna a) deje de valer. Por último, C expresa que el modelo de crecimiento de población que utilizaron no es adecuado: "*lo que quiere decir es que <u>nunca</u> aumenta 5 millones en 10 años*". Así formulado no es del todo correcto porque de hecho de 1980 a 1990 aumenta 5 millones, luego lo reformula expresando que no se puede suponer que siempre crece 5 millones cada 10 años.

C: puede ser que se mantuvo en 25 millones.
B: no, pero te dice que lo plantees con esto y así te da 0 (le vuelve a señalar el planteo de la regla de tres).
A: para mí el error es por la notación científica que usa al calculadora. Supuestamente tendría que dar esto (señala un gráfico que tiene dibujada una recta), pero en algún momento debería ser una curva…
C: no, no puede ser 0, para mí se mantuvo en 25 millones.
A: ah, capaz que va a ir tendiendo a 0 pero nunca va a llegar, pero va a tardar, por ahí en el 40 empieza a tender.
B: lo de los 5 millones cada 10 años no vale. De 1980 para arriba 5 millones, pero para abajo no sabes.
A: claro, no podemos decir que en 80 años hay 40 millones.
B: que se yo…
D y C siguen en silencio, miran sus carpetas.
C: lo que quiere decir es que nunca aumenta 5 millones en 10 años.
A: el gráfico se rompe porque no existen habitantes negativos. Es una lineal partida o algo parecido.

C: no, lo que está pasando es que no puedo suponer que siempre crece 5 millones cada 10 años.

- *El papel de las definiciones en los procesos de argumentación*. En general los alumnos no fundamentan la proporcionalidad apelando a la definición que da cuenta de la relación que tienen las variables, ya sea dada por ley matemática o por características del fenómeno en el que esas variables aparecen, sino por la aplicación de la "regla de tres simple directa". En la mayoría de los casos los estudiantes que hacen uso de esta regla no tienen claro el concepto de proporcionalidad subyacente. Enfrentados al cuestionamiento del por qué la regla de tres funciona y por qué en esa regla las cuentas se hacen de una determinada manera, es interesante ver en los protocolos cómo se pone en evidencia la fragilidad de los conocimientos. Por ejemplo, Elías utiliza el término "*que sean proporcionales*", pero no sabe cómo definir esta condición. Los estudiantes explican la regla de tres ejemplificando con la "disposición práctica" de datos numéricos elegidos por ellos. Hacen hincapié en que para el funcionamiento de la regla deben aparecer tres datos, dos de ellos relacionados y un tercero del que se espera dar una respuesta. Pareciera ser que contando sólo con estos elementos ya es aplicable la regla de tres; es decir, no se plantean el tipo de relación que hay entre los datos ni las condiciones generales del problema. Cómo modelo conocido sobre el cual apoyan sus afirmaciones se presenta el cálculo de porcentaje. Veamos cómo aparece esto en PR2.

Soledad: porque la regla de tres simple se hace a dos extremos, uno que sería el 100% de algo y tenés otro dato del que vos tenés que ver cual le corresponde. No sé cómo explicarlo

Soledad: parecido al porcentaje, sí.

Cristian o Daniel: pero no te está pidiendo porcentaje

Soledad: No es porcentaje pero parecido

En el PR1, en el transcurso de la discusión sobre la actividad 3 surgen preguntas importantes: "¿porqué se puede usar?", "¿por qué multiplicás y dividís así?", "¿qué datos tenés que multiplicar?". A partir del acercamiento del docente al equipo, la discusión cambia su dinámica. El docente sugiere al grupo hacer una regla de tres para pensar en la justificación del funcionamiento de la "disposición práctica" de la regla y los alumnos recurren a la que utilizaron para el ejercicio 1. Una estudiante afirma que "hay una constante", aunque no explicita por qué existe ni cuál es la constante. La conclusión a la que arriban es "en el problema hay que tener una constante para resolver usando regla de tres"**.** Por otro lado, surgen algunas precisiones interesantes que son relevantes para identificar diferentes elementos presentes en un problema en donde las variables tienen un comportamiento proporcional, como por ejemplo: la representación gráfica de los datos de un problema de este tipo resulta una recta por el origen (muestran un gráfico de una recta con pendiente positiva en donde señalan la correspondencia que hay entre los datos, que los ubican uno en cada eje coordenado). Además señalan que en una situación como la planteada en el ejercicio del móvil, "no puede haber aceleración" reforzando con esta afirmación la presencia de una constante en la variación de las magnitudes tal como lo habían señalado anteriormente. En tal sentido, una de las estudiantes observa, en el problema del móvil, que la constante en cuestión es 80, a la vez que señala la importancia de conocer esta constante para poder resolver consignas en las que deban hallar diferentes valores de las variables. Interpretamos que la sugerencia dada por el profesor hizo que el grupo de alumnos comience a tener una mirada más general del tema, abandonando el tratamiento descriptivo de "estructura" o "formato" que hasta el momento venían dando. A continuación mostramos la sección del PR1 que ilustra lo analizado.

Se acerca P1 al grupo y les sugiere que hagan una regla de tres para pensar en la justificación de por qué la regla de tres se hace así.

Viviana y Lilian escriben: 1h ---- 80
3h ----- x = 240 (a)
2 hs ----- 160
3 hs ------ 480/2 = 240 (b)

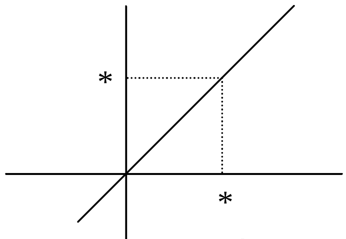
Viviana y Lilian: hay una constante

P1: ¿Dónde está esa constante?

P1: para explicar la regla de tres tienen dos caminos: buscar esa constante o ver como se relaciona lo hecho en (a) y en (b)

Lilian: en el problema hay que tener una constante para resolver usando regla de tres.

Viviana: que sea así



(Donde los * son datos correspondientes).

Por ejemplo no puede haber aceleración. No se puede usar regla de tres si hay un factor que interrumpe la constante.

Lilian: en el 1º ejercicio (del auto) hay una constante (1 h --- 80 km). Tiene que haber una constancia en la regla de tres. En el ejemplo, los datos 2 --- 160 son fundamentales, porque sabiendo la constante podes sacar x.

Elias: saber porqué se hace así nos permitiría saber en qué casos utilizarla (a la regla de tres) según los datos

Entre las acciones de validación que aparecen en protocolo al tratar esta consigna encontramos: "(A15) justificar por autoridad" ("me la enseñaron así") "(A9) Encontrar analogías o similitudes" (por ejemplo con el porcentaje), "(A1) hacer ensayos o intentos", "(A6) ejemplificar". La acción "(A19), identificar condiciones bajo las que ocurren ciertas regularidades ya reconocidas" se expresa cuando Viviana reconoce que en un movimiento rectilíneo para poder usar la regla de tres el móvil no debe tener aceleración. Pensamos que tal vez resulte más adecuado enunciarlo como "identificar cuáles condiciones *no deben darse* para que ocurran ciertas regularidades ya reconocidas". Por otro lado, parece haber un entendimiento de que la constante es independiente del momento o de las variables del problema con las cuales se la calcule ("la constante no se interrumpe").

Por último, observamos también la presencia de o*tras acciones* como *"(*A13*)* explica*r"* y *"(*A22*) reconocer* qué le resulta suficiente para garantizar la validez de un conocimiento". Esta última se evidencia en la frase de Elías: "saber porqué se hace así nos permitiría saber en qué casos utilizarla (a la regla de tres) según los datos".

- *Lo que se presenta en la puesta en común*. En la puesta en común se dan interacciones entre el profesor y el estudiante en las que el profesor trata de acercar la producción personal a la institucional. En ese momento, el estudiante selecciona el discurso y lo que va a presentar perdiéndose, a veces, parte de la riqueza de la elaboración de argumentos. Mostramos una sección de la puesta en común del PR3 en donde intervienen los integrantes del equipo observado.

B: nosotros pensamos que en 20 años son 10 millones más.

C: al principio supusimos que siempre va a aumentar 5 millones cada 10 años.

A: claro, que el aumento es constante.

P2: en el caso que están contando, en 10 años aumentó 5 millones, en este caso. Eso es lo que te dice el problema. Si alguien dice que en el 2010 había 41 millones de personas ¿que hacemos? lo echamos…

Una alumna de otro grupo: "No. Mientras justifique por qué lo dice."

P2: claro, en principio no tenemos ningún dato que nos asegure cuanta gente habrá, los únicos datos certeros son los que acá aparecen. Lo que estamos diciendo es bueno, si seguimos con esta tendencia suponemos que en el 2010 habrá 40 millones de habitantes. ¿Qué supuesto estamos haciendo ahí?

Alumna. Que siempre va aumentar 5 millones cada 10 años.

P2: que el aumento es constante.

El profesor lee la consigna siguiente.

P2: ¿qué pasó acá?

A: la población da 0.

P2 Esto, ¿Está bien?, ¿mal? ¿Tiene sentido?; ¿no tiene sentido?

A: tal vez la población no aumenta de 5 en 5, porque sino en 1930 tendríamos cero personas, el crecimiento de la población no es una constante.

P2: bueno, primero hay un problema.

A: no concuerda con la realidad.

C: no fue proporcional.

P2: claro, si fuera proporcional, ¿qué debería pasar?, no habría habitantes en 1930.
Otro alumno: ¿se podría decir que el crecimiento es inconstante?
P2: bueno, aparentemente sí, porque si hubiera sido constante siempre hubiera sido 10 millones.
Una alumna: “en 1900 debíamos gente, ¡ja, ja!.”
Todos se ríen.
P2: ¿cuál es el problema?, matemáticamente ninguno, pero esta descripción no está describiendo correctamente la situación. Conclusión, hay que tener cuidado cuando hay un problema qué tipo de función usamos. Empezamos usando una función proporcional pero no cualquier situación se puede modelizar con una función de este tipo.

6. Categorías de análisis.

Recordemos que contamos con categorías preliminares, que derivan del marco teórico de la sección II. Ellas son:

a) *uso de significantes (términos y símbolos específicos de la dicisplina), en el registro oral y escrito,*
b) *relación entre el uso de significantes y asignación de significado en ambos registros,*
c) *acciones de validación puestas en juego,*
d) *relación entre las interacciones y la validación del conocimiento,*

Las mismas tienen en cuenta aspectos claves explicados en la sección II tales como:

- formas personales y apelación a las formas externas (institucionales) de expresar y fundamentar el funcionamiento de un procedimiento o la veracidad de un enunciado,
- la importancia del ámbito social, por un lado para incentivar el surgimiento de las formas de validación y por otro como referente para establecer los alcances de las mismas, por esta razón tuvimos en cuenta los episodios de intercambio, tanto espontáneos como intencionados.

Como producto de lo analizado en la sección V enunciamos algunas categorías emergentes del análisis realizado que pueden tener carácter de provisorias:

e) *intencionalidad de confrontación de la producción propia con esquemas externos con el propósito de “ampliar la garantía de lo correcto” del ámbito personal al grupal o al institucional,*
f) *predisposición, actitudinal y práctica, del individuo o del grupo, de aceptar modos de garantizar validez que son de tipo institucionales y responder según esos modos.*
g) *efectos de la retroacción de la actividad planteada para favorecer la validación,*
h) *supuestos implícitos bajo los que operan los alumnos que si bien les permite avanzar en la acción funcionan obstaculizando el proceso de validación*

Respecto a las acciones de validación, también incluiríamos otras en virtud de lo observado. Observamos que muchas veces para explicar lo producido en un ámbito, en lugar de apelar a las definiciones y relaciones entre los objetos se apela a otras representaciones. Por ejemplo en el protocolo 1 (PR1) (ver sección anterior), Viviana trata de explicar la validez de la regla de tres apelando al formato gráfico cartesiano de las magnitudes proporcionales (su gráfico es una recta por el origen). Por esto incluiríamos
A23) Apelar a un registro semiótico para validar lo producido en otro (ejemplo: mostrar las propiedades de un gráfico para validar una propiedad algebraica).

Los múltiples intentos de Soledad (en PR2) por hacer “encajar” una fórmula que resolviera el problema propuesto con el fin de que su producción tuviera “status” matemático, son una manifestación de sus esfuerzos por mostrar como válido un resultado (ver sección 5). Esto nos induce a formular la siguiente acción de validación:
A24) *Exhibir un “formato matemático” para ser adaptado a una producción personal.*
Cabe aclarar que ese formato puede ser adecuadamente usado o no. No lo será si no hay conocimiento afianzado de lo que el formato representa, de cómo se conforma, de cuáles son sus alcances y de cuál es la dependencia o relación con el procedimiento personal. Pero aún el hecho de “forzar” la producción personal a ese formato evidencia un intento por usar convenciones externas que, como dijimos, es una de las características del aprendizaje de la validación.

7. Segundo nivel de análisis: Análisis global haciendo uso de las categorías.

En esta sección intentamos hacer un análisis transversal de los protocolos teniendo en cuenta la producción de conocimientos, actitudes, nivel de participación y evolución, tanto en aprendizaje del tema como en validación. Para ello haremos un recorrido por las categorías de análisis enunciadas en la sección anterior.

Se observa en todos los protocolos que la regla de tres simple directa está muy instalada como saber previo durante toda la discusión sobre este punto no se observa alusión explícita a lo requerido en la consigna 1)a). Sin embargo, la discusión gira en torno a cómo justificar este resultado. En la actividad 1, el supuesto de que la velocidad es constante no es explicitado, aunque es éste el que les permite resolver con los procedimientos que conocen. La producción matemática de los grupos está soportada sobre los ensayos numéricos. Aún cuando a lo largo de las discusiones aparecen gráficos cartesianos y expresiones simbólicas literales, no se pone en juego la información que de ellos puede extraerse. Nos parece importante observar la evolución que manifiestan algunos integrantes de los grupos en cuanto a ciertos aspectos relacionados con validación: Los alumnos comienzan a formularse preguntas que cuestionan el saber hacer mecanizado y sentir la necesidad de responderlas, formuladas por ellos mismos, para considerar válido un procedimiento o conocimiento conceptual.

Respecto de la retroacción que ofrecen las actividades, las mismas pretenden gradualmente introducir un espacio para la validación interpelando resultados obtenidos y conocimientos pero, para dar lugar a la validación, pareciera que la más efectiva es la segunda, en donde hay que estudiar la evolución de la población, por lo evidente de la contradicción entre el resultado obtenido por el modelo lineal y la realidad. En la clase C1, la actividad de justificación del funcionamiento de la regla de tres simple directa causó mucha confusión, en el PR1 pudieron remontar el intercambio refiriéndose a la relación entre las constantes y las características del fenómenos ("hay una constante", dice Viviana) mientras que en el PR2, sólo pudieron referirse al porcentaje pero no avanzaron demasiado.

En cuanto al uso de significantes, éstos aparecen en contextos donde tienen pertinencia aunque no siempre se usan adecuadamente. Tal es el caso de la simbología específica de funciones "$f(x)$", en los protocolos PR2 y PR3 la "x" entre paréntesis no siempre es reemplazada por la variable independiente.

Respecto de la relación que hay entre lo que los estudiantes expresan por escrito y la interpretación o significado que le asignan a su propia escritura, es más adecuada en el PR1 que en los otros. En PR1 y PR3 hubo una buena correspondencia entre los pocos sistemas de representación utilizados en el registro escrito como la tabla (para el caso de la población), el gráfico cartesiano (para mostrar cómo es el gráfico de una función proporcional), la disposición mnemotécnica de la regla de tres, y lo explicado oralmente sobre estos artefactos y su uso, pero la vinculación es débil y no les permite usarlos como un recurso para la argumentación. Como observación general podemos decir que es poco lo que escriben y es común que lo escrito aparezca desarticulado; más rico es el intercambio oral pero poco de lo concluido de este intercambio es registrado por escrito.

Respecto a la intencionalidad de confrontación de la propia producción con esquemas externos con el propósito de "ampliar la garantía de lo correcto" del ámbito personal al grupal o al institucional, se ve en todos los protocolos que ésta no es espontánea al inicio de la actividad sino que va evolucionando a medida que se desarrolla la misma, en parte porque la misma consigna los obliga a revisar las producciones personales y en parte porque en el equipo se vuelve imprescindible elaborar códigos para poder comunicarse y convencer a los otros.

Sobre la predisposición, actitudinal y práctica, del individuo, o del grupo, de aceptar modos de garantizar validez que son de tipo institucionales vemos que aunque los integrantes de los equipos no tienen demasiados conocimientos sobre estos modos ya que no recurren a las definiciones. Puede ser porque no las conozcan o no se dan cuenta de que necesitan este tipo de precisiones como punto de partida de la justificación de procedimientos. Tampoco apelan a las estructuras lógicas de los razonamientos. Sin embargo hay un esfuerzo por usar los recursos que conocen, como las fórmulas y los gráficos cartesianos. Al respecto el equipo del PR3 entiende que es necesario avanzar en las razones matemáticas y en la precisión de una definición, por momentos encaran la validación como un desafío personal y no como una obligación impuesta o una forma de responder a la tarea, el precisar una definición se torna una necesidad.

En cuanto a las interacciones, al interior del grupo, en el PR1 los de mayor protagonismo fueron Lilian, Viviana y Elías, que tienen una participación activa, a la vez que productiva, durante toda la clase. A partir de sus intervenciones y planteos de inquietudes, el grupo puede arribar a la formulación de conclusiones cercanas al conocimiento que se pretende institucionalizar. Son ellos quienes logran captar en la sugerencia dada por el docente al grupo, la forma de encauzar la discusión de manera más organizada haciendo foco en cuestiones más centrales. Los intercambios realizados por estos tres estudiantes son secuenciados y parejos, cada uno aporta algo nuevo (uno el gráfico, otro la tabla, etc.) o mayor precisión sobre lo que había dicho otro. En cuanto al equipo del PR2, los más activos son Miguel y Soledad; sin embargo sus contribuciones son débiles y además no se escuchan lo suficiente. Soledad insiste con sus abordajes que Miguel interpela continuamente y en este juego consiste el avance en este equipo. Al interior del equipo del PR3 las intervenciones son parejas, todos los integrantes quieren hacer sus aportes, desde hacer un gráfico, proponer fórmulas o tablas, etc. Respecto a las interacciones con el docente, en PR1 y PR2 puede observarse cómo las sugerencias o cuestionamientos del docente P1 al interactuar con los miembros del equipo, aún sin ser "reveladores de la verdad", contribuyeron al mejoramiento de los recursos verbales en la discusión. Permitieron organizar de manera más estructurada las ideas sobre el tema que al comienzo de la discusión aparecían como aisladas e incompletas. Sin embargo, en la puesta en común no se reviven los procesos surgidos al interior del grupo, prevaleciendo las respuestas acabadas, ya consensuadas por el grupo o la opinión de los líderes.

Aunque se pusieron en juego muchas acciones de validación, como ya fueron indicadas en las secciones 5 y 6, no puede decirse que los equipos logran validar su conocimiento, entre otras cosas porque no apelan a los conceptos teóricos como la definición de proporcionalidad, aunque sí giren en torno a ella. Sin embargo si se tiene en cuenta el punto de partida, consideramos que el aprendizaje dado en las clases es bueno ya que evoluciona a lo largo de la clase desde acciones que son simples de ejecutar para este contexto, como por ejemplo A4 (generalizar inductivamente) A1 (hacer ensayos o intentos), A9 (mostrar analogías) o A24 (exhibir un "formato matemático" para ser adaptado a una producción personal) hacia acciones más complejas. Entre estas reconocemos la A17 (Reconocer la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen) cuando en PR3 el alumno C dice "no, lo que está pasando es que no puedo suponer que siempre crece 5 millones cada 10 años"; A19 (Identificar condiciones bajo las que ocurren ciertas regularidades ya reconocidas) como puede verse en PR1 donde los estudiantes hacen referencia a modelos conocidos por ellos, como el de la Física, en el que identifican algunas condiciones que deben cumplirse para que cierto modelo sea adecuado: "No se puede usar regla de tres (simple directa) si hay un factor que interrumpe la constante."; la A21 (Formular un razonamiento simple, elaborando las premisas y derivando una conclusión). Otro ejemplo de esto también lo extraemos del PR1, "en el 1º ejercicio (del auto) hay una constante (1 h --- 80 km). Tiene que haber una constancia en la regla de tres. En el ejemplo, los datos 2 --- 160 son fundamentales, porque sabiendo la constante podes sacar x" y la A22 (reconocer que le resulta suficiente para garantizar la validez de un conocimiento), por ejemplo cuando Elías dice "saber porqué se hace así nos permitiría saber en qué casos utilizarla (a la regla de tres) según los datos".

8 Consideraciones finales.

En estas clases analizadas debemos destacar que el contexto del problema cumple una función importante como agente de retroacción para evidenciar contradicciones. Frente a la evidencia aportada por el problema de que la población nunca fue negativa ni nula, los alumnos elaboran respuestas, realizan especulaciones, buscan hallar explicaciones que los satisfagan. Por otro lado, la actividad que planteaba justificar la utilización de la regla de tres simple no generó de forma espontánea la necesidad de validar sus procedimientos. Esto nos lleva a pensar la importancia del papel que juega en la validación del conocimiento la elección de los problemas y consignan que se plantean.

Aunque creemos que los estudiantes en general crean sus propias razones para justificar sus procedimientos, aunque más no sea como un modo de "memorizarlo" y poder aplicarlo en una situación similar, esto no significa que validen ya que pueden no estar fundamentadas en los saberes institucionalizados matemáticamente. Por lo tanto la validación no es un acto natural que los estudiantes puedan adquirir sin la intervención de una intencionalidad docente en esa dirección. Los docentes no deberían esperar que al alumno le resulte natural la prueba matemática en los sentidos usuales y menos las componentes de la demostración matemática.

La prueba matemática responde a una "lógica de uso" a una "razón de ser" que no siempre coincide con la personal.
En cuanto a la forma de gestión que promueva la validación vimos lo enriquecedor de las conversaciones al interior de los equipos. Las discusiones entre pares hacen que emerjan, sin inhibiciones, razones, a veces "desopilantes", que los estudiantes esgrimen para dar validez a sus conocimientos. En los análisis y las evidencias mostradas vemos que, aún cuando los conocimientos puestos en juego no son los esperados para el nivel preuniversitario, es importante el cambio observado de una forma mecanizada a una más reflexiva, en la forma de pensar y hacer alusión a conceptos y artefactos que manipulan usualmente. Además, aún al interior del equipo de pares, se evidencia la necesidad de establecer un código preciso para la comunicación. Cabe aclarar que no promovemos que el docente no deba aparezca en la escena, por el contrario hemos visto que aunque el profesor no revele la forma correcta u óptima de proceder ni las razones matemáticas, su presencia en la escena, interpelando, organizando, devolviendo los esbozos de argumentación que presentan los estudiantes, obliga al alumno a disponerse frente a la validación adoptando un posicionamiento más formal que apunta a los conceptos y las definiciones y no a las reglas prácticas y personales. Pareciera que el hecho de asumir que el profesor es el referente, ayuda a un mejor aprendizaje de la validación y a salir de un estancamiento infructífero de la discusión en el grupo de pares. Sí consideramos que ha sido conveniente una intervención ajustada del docente, de no ser así, es posible que el profesor, al acercarse a un alumno o grupo, no pueda entender los significados asignados y que intervenga de manera no adecuada.
En la puesta en común se pierden los detalles de los procedimientos de validación que aparecieron al interior del equipo. Esto nos sugiere que tal vez, antes de llevarla a cabo, sería conveniente dejar un tiempo de reacomodación de argumentos en el seno de cada equipo para que sus integrantes describan lo que se fue elaborando como justificación o prueba y dar algún tipo de "peso" o "entidad" a esta elaboración.

9 Referencias

1. Balacheff, N. (1987) Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*. 18 (2), 147-176.
2. Balacheff, N. (1991) Benefits and limits of social interactioon: The case of teaching mathematical proof. Mathematical knowledge: Its growth through teaching (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
3. Brousseau, G (1995); Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publisher.
4. Chevallard, Y. (1992); Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-111.
5. Goetz, J. P. y LeCompte, M. D. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. Ed. Morata. Madrid.
6. Klimovsky, G.; Boido,G. (2005) Las desventuras del conocimiento matemático. Filosofía de la matemática: una introducción. A-Z editora. Buenos Aires.
7. Carnelli,G., Falsetti, M., Formica, A., Rodríguez, M. (2007) Matemática para el aprestamiento universitario. UNGS. Colección: Textos Básicos. Buenos Aires.
8. Falsetti, M. Rodríguez, M., Marino, T. Validación en Matemática en situación de aprendizaje,. *Memorias del VI Simposio de Educación Matemática*. Sagula, Ed..Univ. Nac. de Luján - Edumat. mayo 2004. (Formato CD)
9. Godino J. D., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (3): 325-355. [Institutional and personal meaning of mathematical objects. *Journal für Mathematik-didaktik*, 1996, 99-121].
10. Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P. (2006). Metodología de la investigación. 4ta Edición. Mc Graw Hill. México.
11. Wittrock, Merlin (1989) y otros. Investigación de la enseñanza, Tomos I, II y III. Wittrock, comp. Barcelona: Paidós Educador.

[i] pbarreir@ungs.edu.ar,mfalse@ungs.edu.ar,aformica@ungs.edu.ar,tmarino@ungs.edu.ar,dmellinc@ungs.edu.ar.

IDH- Universidad Nacional de General Sarmiento. J.M. Gutiérrez esq. J.Leon Suárez. Los Polvorines, CP 1613. Pcia. de Bs. As.