¿Tenemos en cuenta los docentes los conocimientos e ideas previas de los alumnos? Un estudio contextualizado al Análisis Matemático de una variable.

González, M.I., Introcaso, B., Braccialarghe, D., Emmanuele, D.

Departamento de Matemática – Escuela de Formación Básica – Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura – Universidad Nacional de Rosario. Av. Pellegrini 250 (Rosario)

Resumen

El objetivo de este trabajo es indagar acerca de las ideas o concepciones previas de los alumnos sobre determinados conceptos, en particular sobre temas que se desarrollan en Análisis Matemático I de las carreras de Ingeniería. Es sabido que estas ideas previas son variables de fundamental importancia a la hora de aprender el concepto. Las mismas pueden evolucionar a medida que se construye el conocimiento en el aula de acuerdo a cómo el docente se posicione ante ellas para favorecer su construcción o para dificultarla.

El conocimiento de las concepciones de los alumnos por parte de los profesores permitirá, seguramente, la comprensión de diversos problemas que se presentan en el aprendizaje y la enseñanza y, por ende, ayudará a determinar qué actividades son necesarias para el adecuado aprendizaje de los conceptos. Según Vergnaud, la escuela sobrestima el conocimiento explícito y subestima, y hasta desvaloriza, los conocimientos implícitos de los alumnos.

Las mayores dificultades en el aprendizaje de los contenidos de un primer curso de Cálculo se encuentran, en general, en las nociones de límite, continuidad, completitud o infinito. Una de las causas de estas dificultades es la complejidad intrínseca de dichos conceptos; pero no debemos desconocer que el alumno tiene ideas previas sobre los mismos, que pueden crear dificultades en la interacción entre la nueva información y la que ya tenía.

Para intentar revertir la actual situación experimentada como un fracaso tanto por docentes como por alumnos nos propusimos, en una primera etapa, recabar información acerca tanto de conocimientos básicos de Matemática para comenzar una carrera de Ingeniería como de preconceptos respecto de algunos de los temas a abordar en Análisis Matemático de una variable.

En este trabajo nos hemos centrado fundamentalmente en los aspectos cognitivos, relacionados en este caso con el conocimiento de la población con la que trabajamos. Si no sabemos cuáles son las ideas o las dificultades que nuestros alumnos pueden tener ante un determinado tema, ¿cómo podremos hacer que estos errores u obstáculos resulten productivos para la construcción del conocimiento?

Es de destacar que – aún sabiendo que los resultados de las actividades propuestas resaltan una situación ya conocida: muchos conceptos o formas de razonamientos no son manejados por los alumnos – los docentes universitarios insistimos en utilizarlos en nuestro lenguaje específico como si fueran conocimientos o tipos de razonamientos ya aprendidos. Es decir, consideramos que los docentes universitarios no tenemos en cuenta, en general, los conocimientos e ideas previas de los alumnos. Hay un saber que el docente supone adquirido en la Escuela Media por los ingresantes a la Universidad pero que se evidencia con toda claridad como fallido. Los alumnos no pueden dar cuenta de estos conocimientos de manera exitosa, por lo menos de la manera en que se lo solicita la Universidad, que resulta ser una nueva institución educativa, con sus propias reglas, mandatos y lenguaje específico.

Al no tener en cuenta cuáles son las ideas subyacentes a los conceptos que se trabajan en Análisis Matemático, nos encontramos con frecuencia con un desconcierto por parte de los alumnos ante la inexactitud de las soluciones que brindan: hay un desconocimiento del desconocimiento. Esta manera de interactuar promueve insatisfacción y descontento tanto en los alumnos como en los docentes, favoreciendo la descalificación mutua como modo de justificación del profundo desencuentro entre ambas partes.

Nos parece importante conocer cuáles son estas ideas subyacentes, para poder repensar la labor en el aula, para poder elaborar propuestas que tengan en cuenta lo que los alumnos saben, lo que esperan saber, lo que los docentes esperamos que aprendan.

1. Introducción

Los pobres resultados obtenidos en las evaluaciones y el escaso rendimiento de los estudiantes en el Curso Introductorio a la Facultad de Ciencias Exactas Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la UNR, no nos sorprenden. Ésta es una situación ya establecida por muchos estudios precedentes y es un hecho recurrente no sólo en nuestra Facultad sino en la mayoría de las Facultades de diversas Universidades, tanto públicas como privadas. La sensación que surge ante la carencia de conocimientos - que consideramos elementales - observada en la mayoría de los ingresantes es que la Escuela Media ha fracasado pues, en general, no ha podido brindar a sus egresados ni métodos de estudio ni contenidos básicos perdurables (esto es, disponibles dentro del marco de los esquemas conceptuales de la cognición) luego de tantos años de escolaridad obligatoria. Parecería que la escuela deja de lado la formación del espíritu crítico, al menos de manera concreta, y esto tampoco nos sorprende considerando que, según nuestra postura, el objetivo primero de la escuela es normativizar a los sujetos para poder integrarlos socialmente: se trata de disciplinarlos; se trata de clasificar a los sujetos de modo binario: bueno / malo; sabe / no sabe; es capaz / no lo es, etc. Si centramos ahora la atención en la asignatura en la cual estamos enfocando nuestra investigación[1]: Análisis Matemático I del primer año de las carreras de Ingeniería, observamos que tiene objetivos claramente explicitados, entre ellos: que el alumno aprenda, de manera significativa (es decir, que el alumno pueda relacionar el nuevo conocimiento de modo no arbitrario y sustancial con lo que ya sabe), los conceptos relevantes del Cálculo. Esta forma de aprendizaje depende de múltiples variables ya que está ligada al logro de aptitudes y actitudes que deben desarrollarse desde la Escuela Media donde, en los últimos años, el alumno debería - por ejemplo - avanzar sobre el pensamiento inductivo hacia el deductivo requiriendo, para ello, de capacidad para la reflexión. Entre las variables a que hacemos referencia se encuentran las dificultades de los estudiantes en lo que hace a temas de Precálculo que obstaculizan la comprensión de los conceptos básicos de esta disciplina.

2. Marco teórico y enfoque metodológico

La problemática intrínseca al aprendizaje de contenidos del Análisis de una variable es analizada por numerosos autores, notándose en la evolución de la investigación en Didáctica – como refieren Azcárate & Camacho (2003) – una clara evolución desde el estudio de los errores y dificultades del alumnado hacia investigaciones acerca del conocimiento de los estudiantes que subyace a dichas dificultades. Más aún, investigadores en Didáctica de la Matemática encuentran que los alumnos tienen “concepciones espontáneas” (Azcarate et al., 1996) que pueden convertirse en obstáculos a la hora del aprendizaje de los conceptos; tienen también dificultades para utilizar adecuadamente las representaciones gráficas (Guzmán Retamal, 1998), como así también dificultades en la comprensión y el manejo de símbolos (Azcárate et al., 1996).

No es discutible que las ideas o concepciones previas de los alumnos sobre determinados conceptos son también, a la hora de aprender el mismo, variables de fundamental importancia ya que dichas concepciones pueden evolucionar a medida que se construye el conocimiento en el aula de acuerdo a cómo el docente se posicione ante ellas para favorecer su construcción o para dificultarla. Al respecto cabe recordar la idea de Bachelard (1938) acerca de *obstáculo epistemológico,* como el efecto limitativo de un sistema de conceptos sobre el desarrollo del pensamiento. Un obstáculo es, entonces, una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problema pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarlos a conseguirlo.

El conocimiento de las concepciones de los alumnos por parte de los profesores permitirá, seguramente, la comprensión de diversos problemas que se presentan en el aprendizaje y la

---

[1] Este trabajo se encuentra enmarcado en el Proyecto: "*La significación de los contenidos conceptuales en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en las carreras de Ingeniería y Agrimensura*" (ING 215 UNR)

enseñanza y, por ende, ayudará a determinar qué actividades son necesarias para el adecuado aprendizaje de los conceptos. Según Vergnaud la escuela sobrestima el conocimiento explícito y subestima, y hasta desvaloriza, los conocimientos implícitos de los alumnos. La formalización es necesaria, pero es preciso tener en cuenta que las ideas científicas evolucionan en el alumno durante un largo período de desarrollo cognitivo, a través de una variedad de situaciones y actividades, y que cualquier conocimiento formal y axiomatizado que el alumno presenta puede no ser más que la parte visible de un iceberg formado básicamente por conocimientos implícitos que muchas veces favorecen la comprensión y otras muchas la obstaculizan. La enseñanza de las ciencias no puede dejar de lado la simbolización y la formalización, porque la ciencia es simbólica, formal y explícita; pero es preciso tener en cuenta que el conocimiento del alumno – como de cualquier otro sujeto – es en gran parte implícito.

Las mayores dificultades en el aprendizaje de los contenidos de un primer curso de Cálculo se encuentran, en general, en las nociones de límite, continuidad, completitud o infinito. Una de las causas de estas dificultades es la complejidad intrínseca de dichos conceptos; pero no debemos desconocer que el alumno tiene ideas previas de los mismos que pueden crear dificultades en la interacción entre la nueva información y la que ya tenía.

Para indagar sobre la actual situación proponemos una metodología cuali-cuantitativa en la que, en una primera etapa, recabamos y analizamos información acerca de conocimientos básicos que el alumno posee al comenzar una carrera de Ingeniería, y de preconceptos respecto de contenidos a abordar en el Análisis Matemático de una variable. A tal efecto se proponen dos actividades en el primer semestre de 2009 (ver Apéndice).

La Actividad Nº 1 fue propuesta a alumnos de dos comisiones de la asignatura Análisis Matemático I de las carreras de Ingeniería: una de ellas de alumnos ingresantes a la Facultad (A); la otra de alumnos recursantes (B). La Actividad Nº 2 se implementó sólo en la de alumnos ingresantes. La primera de estas actividades fue presentada durante la segunda clase de la asignatura; en la primera clase se había trabajado el tema "Número Real" ampliando lo desarrollado en el Curso Introductorio. Esta actividad se restringe a contenidos específicos sobre números reales, (trabajados en dicho curso) presentados con cierto formalismo lógico al que el docente universitario recurre desde su primera clase. La segunda actividad se propone durante la segunda semana de clases luego del examen[2] que se realiza al final del Curso Introductorio, en el que se trabaja el contenido funciones y sus gráficas. En esta actividad se diversifican los conceptos involucrados y se intenta, además, conocer preconceptos respecto de ciertos contenidos.

En una segunda etapa, dos meses más tarde, se propone una tercera actividad que pretende indagar cómo se modificaron los preconceptos sobre límite y recta tangente.

La información recabada en cada una de estas tres actividades permite realizar un análisis cualitativo pues la recolección de los datos está orientada, en cada caso, a proveer de un mayor conocimiento de los significados y experiencias de los alumnos.

3. Análisis cuantitativo de las dos primeras actividades

<u>**ACTIVIDAD 1**</u>

Ejercicio 1: Permite la interacción de los marcos numérico, algebraico y analítico. Los medios de los que disponen los alumnos para su resolución (en lo que respecta a lo numérico y algebraico) son los adquiridos en el nivel medio, recordados en el Curso Introductorio a la Facultad y repasados en la primera clase de la asignatura.

Lo llamativo es que los porcentajes de respuestas correctas de los alumnos de la Comisión (A) son significativamente más altos que los de la Comisión (B). Cuando se les requirió, por ejemplo, completar con $<$, $>$ ó $=$: 0.99......1, sólo un alumno de la Comisión (A) contestó incorrectamente, mientras que el 30% de la Comisión (B) fue incapaz de establecer la relación correcta. Así también, ante el pedido de completar $0,\widehat{9}$ ....1, el 60% de la Comisión (B) contestó incorrectamente, contra el 20% de respuestas incorrectas de la Comisión (A).

---

[2] La evaluación final del Curso Introductorio a la Facultad se realiza una vez comenzado el cursado de las materias de 1° año. La misma es el primer examen parcial de la materia Análisis Matemático I, y en caso de no ser aprobada se recupera al final del cuatrimestre.

Ejercicio 2: En este ejercicio se hace interactuar el marco lógico-analítico con el numérico y el algebraico. Si bien no es trivial que los alumnos interpreten el enunciado, también sabemos que los docentes utilizan la lógica allí presente de manera cotidiana. El docente, más de una vez, utiliza alguna de estas proposiciones verdaderas, alguna de éstas falsas, dentro de una cierta explicación y también en los exámenes, sin siquiera reparar en que estas cuestiones no han sido trabajadas en la escuela secundaria (ni tampoco en el aula universitaria) para ser consideradas -como lo son- conocimientos previos.

Respecto de la Comisión (A): Hay un alto porcentaje de respuestas correctas al primer apartado. Sin embargo, un análisis más exhaustivo permite concluir que algunas de las respuestas correctas pueden ser casuales. Al hecho de que la proposición "$x^2 < 1$ entonces $x < 1$ " es verdadera, responde correctamente el 81%. Sin embargo, sólo el 62% afirma que la proposición: "la solución de $x^2 < 1$ es : $\{x / x < 1\}$" es falsa. Sólo el 54% responde que la proposición "$x < 1$ entonces $x^2 < 1$ " es falsa, lo que sigue corroborando lo dicho anteriormente.

Un alto porcentaje de alumnos (73%) deciden que "$2 < x < 6 \Rightarrow -2 < -x < -6$" es falso, mientras que un porcentaje mucho menor (43%) responde que "$\frac{1}{x} < y \Rightarrow 1 < xy$" es falso. Esto muestra probablemente la incapacidad de que el alumno haga interactuar por sus propios medios los marcos numérico y algebraico.

Respecto de la Comisión (B): El análisis es análogo, con el agravante que los porcentajes de respuestas correctas son bastante menores.

Ejercicio 3: El ejercicio permite la interacción de los marcos numérico, algebraico y analítico. Bastan los conocimientos de Matemática de la Escuela Media para su resolución. El alumno sólo necesita conocer el concepto de valor absoluto y el significado de "<". Sin embargo, sólo el 45% responde correctamente en la Comisión (A) y **ningún alumno** responde correctamente en la Comisión (B).

Ejercicio 4: El alumno necesita conocer el concepto de valor absoluto. Además, debe manejar reglas básicas de razonamiento lógico para poder argumentar.

Supusimos que a partir de los conocimientos de la Escuela Media y de los desarrollados en el Curso Introductorio era factible que los alumnos pudieran realizar esta demostración. Ningún alumno realizó la demostración.

<u>ACTIVIDAD 2</u>

Entre los conceptos involucrados en esta actividad se encuentran los de: intervalo, gráfica de una función, distancia entre dos puntos, pendiente de una recta, números racionales e irracionales, sucesiones, que son parte de la currícula de Matemática de la Escuela Media. La actividad se presenta en la comisión (A) ya que se pretende conocer preconceptos y esto no es factible con alumnos recursantes. La realizaron 36 alumnos.

Ejercicio 1. Para resolverlo el alumno necesita conocer: la noción de intervalo; la regla de los signos; la noción de punto del plano y la de gráfica de una función. Se pretende que, a partir de un enunciado muy simple, el alumno reconozca particularidades de los puntos del plano, analizándolas en la gráfica de una función. En este problema, a partir de un marco gráfico y de ciertos datos volcados en una tabla, el alumno tabula otros. Hay un alto porcentaje de respuestas correctas (75%).

Ejercicio 2. Para su resolución se requiere del conocimiento de la gráfica de $y = x^2$ y del de desplazamientos verticales. El alumno, a partir de conocimientos trabajados en la Escuela Media y en el Curso Introductorio a la Facultad, debe ser capaz de pasar del modo gráfico al algebraico. Sólo uno de los alumnos responde mal.

Ejercicio 3. Se requiere conocer el concepto de distancia entre dos puntos. La noción de mínima distancia de una curva a un punto había sido explicada en clases anteriores.

Dieciocho alumnos responden correctamente y los restantes exhiben diferentes errores que, en general, reflejan que no interpretan la idea de mínima distancia o desconocen que en el enunciado se pide un segmento.

Es de destacar que once de los dieciocho alumnos que responden incorrectamente, marcan bien el segmento en la primera gráfica y mal en la segunda.

Ejercicio 4. Se trata de un problema de enunciado sencillo. Sólo pretende saber si el alumno sabe "calcular" la pendiente de una recta. La solución del problema no pone de manifiesto que el alumno comprenda dicho concepto. Los alumnos disponen de un algoritmo que aplican correctamente teniendo en cuenta los datos: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Sólo 3 respuestas no son correctas.

Ejercicio 5. Sólo un alumno responde mal. La respuesta al mismo había sido trabajada con énfasis en clase.

Ejercicio 6. El problema se basa en conceptos trabajados en la escuela media, el Curso Introductorio y la primera clase de la asignatura. El enunciado es – en general – interpretado por los alumnos, quienes lo resuelven, aparentemente, en forma mecánica o memorística ya que la dificultad se plantea ante lo no mecánico: cuando un número se presenta como diferencia entre otros dos. Sólo ocho alumnos completan la tabla correctamente.

Ejercicio 7. La respuesta al problema no requiere - en este momento - de contenidos de Matemática específicos, pero sí que el alumno interprete la situación y que explicite sus ideas previas de procesos infinitos.

Respecto de calcular la distancia total recorrida por la pelota las frases que más se repiten son: *no se pueden sumar infinitos términos* y *la distancia es infinita.* Algunos hacen otras consideraciones como: *el modelo no es realista, no son suficientes los datos*. Y hay 5 alumnos que realizan una aproximación.

Acerca de si podría decir cuántos rebotes hará la pelota, las respuestas más frecuentes son: *infinitos rebotes* ó *no se puede decir*. Algunos pocos afirman que *no se puede calcular pero se puede aproximar*.

Ejercicio 8. El problema requiere del manejo de una forma de razonamiento lógico básico. Los razonamientos que el docente propone en las primeras asignaturas de Matemática de las carreras de ingeniería están relacionados con los de estos enunciados. Los porcentajes de respuestas correctas son: a) 30%, b) 60%, c) 40% y d) 73%

Pregunta 9. La pregunta apunta a indagar acerca de preconceptos sobre la idea de "limite". La palabra límite tiene un uso cotidiano, ¿cuál es la idea del alumno acerca del mismo? Entre las respuestas más frecuentes encontramos:: *marca un "borde", una restricción, un final, un valor máximo*. Otro tipo de respuestas (menos frecuentes) apuntan a la aproximación: s*e acerca sin tocar, aproximación de una función, extremos de una función, una función se acerca a un valor.*

Pregunta 10. De manera análoga a la pregunta anterior, en ésta se pretende investigar sobre cuál es la idea del alumno acerca de la noción de "recta tangente". La respuestas más frecuente se resume en la frase: *toca en un sólo punto,* con agregados como: *es perpendicular a un eje, está a 90º del radio de la curva, forma un ángulo recto, es perpendicular al radio del círculo, es perpendicular al, radio que forma la curva en ese punto, perpendicular al radio de la curva, forma un ángulo recto con el radio de la circunferencia.* Una frase que podemos destacar es: *La recta tangente a una curva en un punto es la recta que pasa por el punto con pendiente igual a la curva.*

4. Reflexiones sobre las dos primeras actividades

Los ejercicios 1 y 2 de la segunda actividad que involucran un contenido que se retoma en Análisis Matemático I, tienen un alto porcentaje de respuestas correctas. Ante esto nos preguntamos ¿es necesario entonces hacer el hincapié que generalmente se hace sobre dicho contenido para explicar lo ya conocido? ¿Trabajamos e insistimos sobre lo que los alumnos ya saben en lugar de sobre sus falencias?

Las respuestas del ejercicio 3 de la Actividad 2 marcan que, en general, existe desconocimiento de la noción de distancia de un punto del plano a una curva; sin embargo, los docentes- en general- utilizan la misma sin definirla.

Es menester señalar también el hecho de que el ejercicio 5 de esta actividad fue contestado correctamente por casi la totalidad de los alumnos debido, seguramente, a que el contenido conceptual que el mismo incluye había sido trabajado con detalle en la clase anterior. Esto permite inferir que no es *la falta de atención de los estudiantes* la única causa de la puesta en acto fallida del saber que poseen, sino, en muchos casos, el *no poder anticipar* qué es lo que se pretende que hagan a partir de los enunciados propuestos. En este caso, en cambio, el enunciado es extremadamente sencillo y ha sido explícitamente enunciado por el docente. Pero en muchas ocasiones existe lo que podríamos pensar como un desconocimiento mutuo:

- el docente supone la articulación de ciertos conceptos adquiridos previamente que le permitirían al estudiante resolver con éxito las consignas planteadas;
- el estudiante no puede anticipar qué capacidades o destrezas se le demandan ni el modo en que las mismas deben aplicarse.

El ejercicio 8 propone un tipo de razonamiento que resulta, para el alumno universitario, una importante herramienta de trabajo en su quehacer en Matemática. Si el alumno pudiese contestar bien los ítems propuestos, muy probablemente podría también comprender y argumentar con precisión los razonamientos con que debe enfrentarse en sus estudios. Pero no se trata sólo de falta de destreza en el dominio del lenguaje simbólico sino también detectamos falencias en el manejo correcto del método lógico-deductivo correspondiente a las Ciencias Formales, especialmente a la Ciencia Matemática. Esto se pone de manifiesto con claridad en los ejercicios en que intervienen implicaciones lógicas, como el Ejercicio 2 de la Actividad 1; donde se espera que el estudiante reconozca la hipótesis y la tesis como tales. A partir de este reconocimiento, el docente que lo evalúa supone que el alumno debería poner en juego sus conocimientos previos, para que mediante una correcta deducción se llegue al resultado adecuado. Lo que aquí queda al descubierto, es que – en general – los alumnos no son capaces de distinguir el nivel de asignación de valor de verdad a las proposiciones o enunciados, del nivel de validez de un razonamiento. Es por ello, que quizás nos encontramos con situaciones en donde habiendo respondido bien a un ítem, contestan mal otro ítem relacionado con el mismo. Creemos que no es sólo falta de atención o estudio, sino además y prioritariamente un desconocimiento de la lógica subyacente al pensamiento matemático.

Analizando los resultados del Ejercicio 7, en donde interviene la noción de sucesión, pareciera que los estudiantes muestran cierto grado de presteza en la resolución, aunque más no sea en un nivel muy elemental e intuitivo. Suponemos que esto está en relación directa con el énfasis que se ha puesto en estos últimos años desde la escuela primaria en el trabajo con patrones de formación.

Las preguntas 9 y 10 ponen de manifiesto que el alumno tiende a pensar en términos estáticos y no dinámicos: límite es frontera, tope, borde, final, valor máximo, una recta; no piensa, en general, en acercamiento o tendencia; la recta tangente a una curva, por su parte, es para él la que la corta en un único punto y tampoco aquí piensa en acercamiento o en proximidades. Estas son ideas que habría que tener en cuenta para evitar errores, para hacer que las mismas no resulten obstáculos en el aprendizaje de nuevos conceptos. Respecto de la idea de "límite" suponemos que aquellos alumnos que la asociaron con la noción de función habían trabajado la idea de "límite de una función" en la Educación Media. Sin embargo, de los cuatro alumnos que hacen esta asociación sólo dos presentan -con errores - un acercamiento a la idea intuitiva de límite de una función. Uno de ellos expresa: *límite de una función es el valor al cual tiende su resultado cuando la variable se va aproximando a un determinado valor.* Sin embargo, este mismo alumno, agrega que le da la idea de *una condición, un tope que tiene algo*. Otro de estos cuatro alumnos continúa, a pesar de la palabra función, pensando en cuestiones estáticas pues su idea de límite es: *extremo de una función.* El cuarto escribe una frase carente de sentido.

Hay algo notorio en ciertas respuestas que hace que uno recuerde que, cuando se explica la idea intuitiva de límite de una función en un punto, casi siempre surge la pregunta: ¿lo alcanza? Esto lo vemos en respuestas como: "*puede acercarse un objeto a otro sin tocarlo*" o "*estar cerca de algo pero no ser ese algo*" o "*una curva se puede acercar a un punto pero nunca llega a tocarlo*".

5. Actividad que pretende indagar sobre cómo se modificaron los preconceptos sobre límite y recta tangente. Análisis y reflexiones

Dos meses después de haber hecho las preguntas que apuntaban a indagar sobre los preconceptos que los alumnos tenían acerca de las nociones de "límite" o "recta tangente a una curva", y luego de haber trabajado en clases teóricas y prácticas estos conceptos, y de haber tomado evaluaciones que los involucraban, se intentó establecer cómo estos mismos se habían modificado (o no). Se preguntó nuevamente a los alumnos del grupo (A):

1) ¿Qué te sugiere la palabra límite?
2) Se deja caer una pelota desde 2 m de altura sobre una superficie horizontal. Cada vez que la pelota llega al suelo, tras caer desde una altura *h*, rebota hasta una altura *h/*2. ¿Podrías calcular la distancia total recorrida por la pelota?
3) ¿Qué entiendes por recta tangente a una curva en un punto?

Respecto de la primera pregunta, el 60% de las respuestas se restringen a la definición de límite ($\varepsilon - \delta$) de una función en un punto; un 10% mantiene las ideas originales de máximo, tope, etc.; sólo 2 alumnos de 47 expresan que la palabra límite les sugiere "una tendencia"; 3 alumnos confunden la noción de límite con la de derivada de una función en un punto (noción ahora dada en el curso).

Respecto de la segunda pregunta, las respuestas no varían de las dadas en la primera oportunidad: "*es imposible calcular la distancia porque hay que sumar infinitos términos*" ó "*la distancia es infinita porque la pelota no deja de rebotar*".

Respecto de la tercera, el 40% de los alumnos sigue afirmando que la recta tangente es la que corta a la curva en un solo punto, inclusive ya no se ocupan de aclarar (como sí lo hicieron en la primera oportunidad) que, por ejemplo, es "perpendicular al radio"; un 23 % asevera que es la posición límite de las rectas secantes; un 12 % dice que la recta "es la derivada", o "es la pendiente", a lo que se agrega un 8.5 % que dice que "la pendiente se calcula con la derivada". Otros dicen que la recta "sirve para calcular la derivada".

Las primeras reflexiones que nos surgen ante estas respuestas, son que:

- si bien se trabajaron en clase límites infinitos y límites "al infinito", el alumno asocia en primera instancia la palabra límite al límite de una función en un punto;
- la mayoría de las respuestas tienen que ver con límites de funciones, a pesar de que usan la palabra límite para decir que "la recta tangente es la posición límite de las rectas secantes";
- las sucesiones, que parecen intuitivas, no son vistas como casos particulares de funciones (aclaremos que esto no se trata en el ámbito de esta asignatura), y mucho menos se puede pensar en sus límites relacionándolos con el límite al infinito de una función;
- las nociones de "límite" y de "recta tangente", que en principio no parecían tener ninguna interdependencia, empiezan a relacionarse, aunque esto sea – algunas veces y a esta altura – a costa de "confundirse" entre ellas.

Los preconceptos que encontramos que los alumnos tienen respecto de las nociones de límite o recta tangente, así como la idea de que "si se suman infinitos términos el resultado es infinito" no deberían sorprendernos, en tanto tienen su correlato en la historia de la Matemática, que necesitó siglos de desarrollo para aceptar – por ejemplo – que la medida de la diagonal de un cuadrado no puede encontrarse en un proceso que involucre un número finito de pasos.

Algunas de las cuestiones que nos preocupan comparando las respuestas a las mismas preguntas en las actividades 2 y 3 tienen que ver con que:

- los alumnos intentan expresar (muchas veces con poco éxito) una definición formal, cuando se los interroga acerca de lo que les "sugiere" una palabra: ya no piensan realmente en lo que la palabra les sugiere sino más bien en lo que creen que se espera que respondan; comienzan a "adaptarse" a lo que suponen que la Institución espera de ellos;
- los alumnos parecen querer "borrar" sus preconceptos, reemplazándolos por lo que aprenden en el curso, restringiéndolos en lugar de ampliándolos; esto deriva en una severa limitación en sus posibilidades de analizar situaciones, como se nota en el caso de la recta tangente: sus preconceptos estaban ligados fundamentalmente a la tangente a

una circunferencia, y respondían “imaginando” esa situación; cuando la “curva” en sus cabezas es sólo la gráfica de una función, ya no se animan a decir que la recta es “perpendicular al radio”, y terminan diciendo sólo que “la recta corta a la curva en un solo punto”, lo que los lleva a un concepto equivocado.

6. Conclusiones

Es de destacar que – aún sabiendo que los resultados de las actividades propuestas resaltan una situación ya conocida: muchos conceptos o formas de razonamientos no son manejados por los alumnos – los docentes universitarios insistimos en utilizarlos en nuestro lenguaje específico como si fueran conocimientos o tipos de razonamientos ya aprendidos. Es decir, consideramos que los docentes universitarios no tenemos en cuenta, en general, los conocimientos e ideas previas de los alumnos. Hay un saber que el docente supone adquirido en la Escuela Media por los ingresantes a la Universidad pero que se evidencia con toda claridad como fallido. Esto es, los alumnos no pueden dar cuenta de estos conocimientos de manera exitosa, por lo menos de la manera en que se lo solicita la Universidad, que resulta ser una nueva institución educativa, con sus propias reglas, mandatos y lenguaje específico.

Un análisis preliminar de la situación a trabajar en el aula involucra diferentes componentes: didáctica; epistemológica, cognitiva, además de factores socio-políticos y culturales. Sabemos que estos últimos son determinantes a la hora de considerar las causas que llevan al aparente desinterés del alumno en estas materias (Emmanuele et al., 2009), pero en este trabajo nos hemos centrado fundamentalmente en los aspectos cognitivos, relacionados en este caso con el conocimiento de la población con la que se trabaja. Si no sabemos cuáles son las ideas o las dificultades que nuestros alumnos pueden tener ante un determinado tema, ¿cómo podremos hacer que estos errores u obstáculos resulten productivos para la construcción del conocimiento?

Nos parece importante conocer cuáles son las ideas subyacentes a los conceptos que se trabajan en Análisis Matemático, para poder repensar la labor en el aula, para poder elaborar propuestas que tengan en cuenta lo que los alumnos saben, lo que esperan saber, lo que los docentes esperamos que aprendan.

Al no tener en cuenta estas cuestiones, nos encontramos con frecuencia con un desconcierto por parte de los alumnos ante la inexactitud de las soluciones que brindan: hay un desconocimiento del desconocimiento. Esta manera de interactuar promueve insatisfacción y descontento tanto en los alumnos como en los docentes, favoreciendo la descalificación mutua como modo de justificación del profundo desencuentro entre ambas partes.

El análisis de las respuestas nos permite corroborar cuestiones que, como ya hemos dicho, no son novedosas, pero que consideramos tienen que comenzar a tratarse como problemas para poder buscar soluciones. Las cuestiones de lógica implícitas en los enunciados son para los alumnos un obstáculo para la interpretación de los mismos y, por ende, para encarar su resolución. Esto no es menor, y avanzar sobre contenidos sin atenderlo es una de las causas del fracaso de los alumnos en las asignaturas de Matemática. Por otra parte, el hecho de que el alumno recursante haya obtenido peores resultados que el ingresante debe ser un llamado de atención para el docente y las autoridades universitarias.

La tarea de indagar sobre las concepciones previas y trabajar la clase teniéndolas en cuenta no es simple; las concepciones de los alumnos no son fácilmente explicitables, pueden diferir entre distintos alumnos y, más aún, no son simples de modificar a partir de la enseñanza tradicional, sino que hay que recurrir a estrategias orientadas al cambio conceptual: aprovechar las nuevas tecnologías, optimizar el tiempo, analizar los textos a utilizar (Braccialarghe et al., 2008), decidir cómo trabajar con los errores u obstáculos epistemológicos, pensar cómo presentar y dar significado a los conceptos en diferentes contextos, mostrar el origen histórico de los contenidos básicos del Cálculo.

Bibliografía

- ✓ Azcárate, C., Bosch, D., Casadevall, M. & Casellas, E. 1996. *Cálculo Diferencial e Integral*. Educación Matemática en Secundaria (Directores: M. de Guzmán, L. Rico). Ed. Síntesis. S.A. Madrid,

- Azárate Jimenez, C. & Camacho Machin, M. 2003. *Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, pp. 135-150
- Bachelard, G. 1988. *La formación del espíritu científico.* México, Siglo XXI © *1938*
- Braccialarghe, D., Emmanuele, D., González, M. I., Introcaso, B. & Lagreca, L. 2008**.** *El libro de texto de matemática en carreras de ingeniería.* XIV EMCI Nacional, VI Internacional (Mendoza, 2008).
- Emmanuele, D., González, M. I., Introcaso, B & Braccialarghe, D. 2009. *Análisis de libros de Cálculo en carreras de Ingeniería*. *Su relación con los cambios sociopolíticos en Argentina*. Enviado a: Revista de Educación Matemática.
- Guzmán Retamal, I. 1998. *Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes*. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa.

Apéndice

Actividad 1

1) Completar con $<$, $>$ ó $=$

$0{,}99$	$\square$	1	$a<0 \Rightarrow \dfrac{1}{a}$	$\square$	0
$0{,}999\ldots$	$\square$	1	$a>1 \Rightarrow \dfrac{1}{a}$	$\square$	1
$0{,}\hat{9}$	$\square$	1	$\lvert -a \rvert$	$\square$	0

2) Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es Verdadera ó Falsa, si x e y son números reales:

a) Si $x^2<1$ entonces $x<1$ $\square$
b) La solución de la inecuación $x^2<1$ es $\{x / x<1\}$ $\square$
c) $x<1 \Rightarrow x^2<1$ $\square$
d) $x<x^2$ $\square$
e) $\dfrac{1}{x}<y \Rightarrow 1<xy$ $\square$
f) $2<x<6 \Rightarrow -2<-x<-6$ $\square$

3) Hallar la solución de la inecuación $\lvert x \rvert < -3$

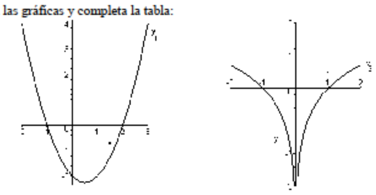
....

4) Demostrar que si $a>0$ entonces: $\lvert x \rvert < a \Rightarrow -a<x<a$

....

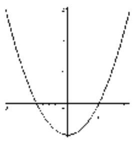
Actividad 2

1) Observa las gráficas y completa la tabla:



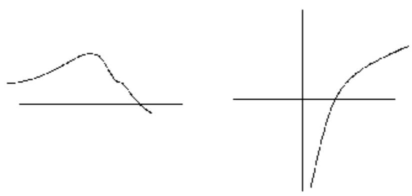
Intervalo	signo de y_1	signo de y_2	signo del producto $y_1 y_2$
$(-\infty,-1)$	>0		
$(-1,1)$		<0	
		>0	<0
$(2,+\infty)$			>0

2) La siguiente es la gráfica de:



a) $y=x^2$ $\square$ c) $y=x^2-1$ $\square$
b) $y-1=x^2$ $\square$ d) $y=(x-1)^2$ $\square$

3) ¿Cuál es la mínima distancia de la curva al origen de coordenadas? (marca el segmento que medirías)



4) El punto P (2,4) pertenece a una recta que pasa por el origen de coordenadas ¿cuál es la pendiente de dicha recta?

5) La siguiente afirmación ¿es verdadera o falsa?

$-a<0$, cualquiera sea a

6) Completa la siguiente tabla:

número	¿Racional o irracional?	¿Positivo o negativo?	Valor absoluto del número	Si el número es racional, su expresión como cociente de enteros es:
$0{,}\hat{1}$				
$-0{,}1010010001\ldots$				
$0{,}10101010\ldots$				
$1-3{,}121212\ldots$				

7) Se deja caer una pelota desde 2 m de altura sobre una superficie horizontal. Cada vez que la pelota llega al suelo, tras caer desde una altura h, rebota hasta una altura $\dfrac{h}{2}$.

a) ¿Podrías calcular la distancia total recorrida por la pelota? Explica tu respuesta.

....
....
....
....
....

b) ¿Podrías decir cuántos rebotes hará la pelota? Explica tu respuesta.

....
....
....
....
....

8) La siguiente afirmación es verdadera:

Juan aprueba la materia si contesta bien una última pregunta.

Decide entonces si es verdadera o falsa cada una de las que siguen:

a) Si Juan no contesta la última pregunta, entonces no aprueba la materia $\square$
b) Si Juan no aprueba la materia, entonces no contestó bien la última pregunta $\square$
c) Juan aprueba la materia sólo si contesta bien la última pregunta $\square$
d) Juan puede no haber aprobado la materia aún habiendo contestado bien la última pregunta $\square$

9) ¿Qué te sugiere la palabra ***límite***?

....
....
....

10) ¿Qué entiendes por ***recta tangente*** a una curva en un punto?

....
....
....