Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*

En este número, se presentan tres problemas, y por primera vez, en lugar de las *sucesiones al toque*, hay dos *crucigramas matemáticos*, en los que aparecen solo números enteros no negativos. Las soluciones se encuentran en las páginas siguientes.

Problema 1. *Coleccionando las figuritas del Mundial.*

Un niño tiene el álbum de figuritas del Mundial de Qatar y decide coleccionarlas para llenarlo. Sus padres quieren complacerlo, aunque se preocupan por el costo que podría tener esto, porque saben que su hijo no es de cambiar figuritas. Cada paquetito trae 5 figuritas distintas y cuesta 200 pesos.

Si suponemos que el álbum tiene $n = 650$ figuritas. ¿cuánto costaría completarlo si le tocaran todas figuritas distintas?

Asumiendo que no hay figuritas difíciles, sino que todas salen aleatoriamente ¿cuál es la probabilidad de que en el 2do paquetito no salga ninguna repetida?

En general, si hay pegadas k figuritas en el álbum y se consigue una nueva figurita al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea repetida?

Pregunta (difícil): ¿Cuál es la probabilidad de llenar el álbum con k figuritas?

Pregunta (muy difícil): ¿cuál es el *valor esperado* de lo que costaría, en promedio, completar el álbum sin cambiar figuritas?

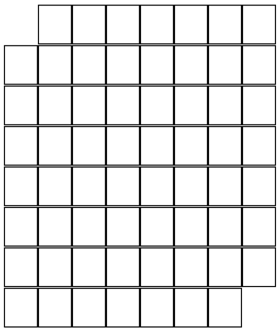
Problema 2. *Polinomios.* Dados los monomios x^2y^2, x^2y^3, x^3y^2, x^3y^3, x^2y^4, x^4y^2, ¿existen enteros $a_1, a_2, \ldots, a_6$ tales que el polinomio $p(x) = a_1x^2y^2+a_2x^2y^3+a_3x^3y^2+a_4x^3y^3 + a_5x^2y^4 + a_6x^4y^2$ sea siempre no negativo?

[Nota. Es muy interesante analizar el caso más general, donde no se especifican los monomios. Esto apareció como Problema nro. 4 en la CIMA (Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina) tomada este año el día 24 de agosto en todo el país.]

Problema 3. *Cubrir un tablero con fichas de dominó.*

Se tiene un tablero de 8×8 casillas y fichas de dominó de 2×1, del tamaño de dos casillas del tablero. Claramente, con 32 fichas se puede cubrir bien el tablero sin superposiciones entre las fichas.

Ahora quitamos dos casillas al tablero, dos esquinas opuestas, como se muestra en la figura. ¿Se lo puede cubrir con 31 fichas?



Vale la pena pensar en el mismo problema en situaciones más generales. Si el lector no conocía el problema planteado, una ayuda para resolverlo puede ser pensar en los casos más pequeños de tableros de 2×2 sin las dos esquinas opuestas y una sola ficha, o de 4×4 y 7 fichas, etc.

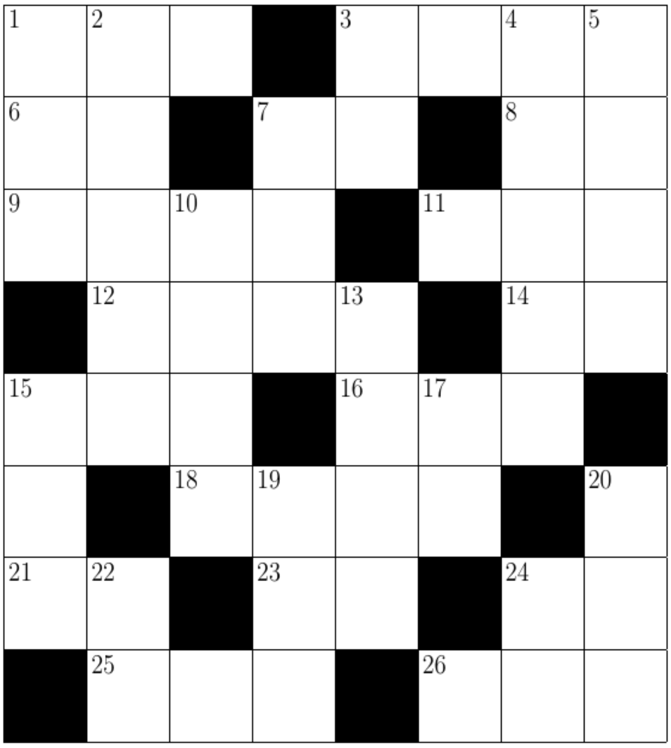
Planteamos la misma pregunta para el tablero 8×8, pero ahora quitando dos casillas arbitrarias del mismo. ¿En qué casos se lo podrá cubrir bien con 31 fichas de domninó?

Pensar también el caso de un tablero de $m \times n$ casillas, al que se le quitan dos casillas. ¿Cuándo se puede cubrir con $\frac{m \times n}{2}$ fichas de dominó? (la pregunta tiene sentido cuando al menos uno de los dos números, m y n, es par; el caso en que ambos son impares, no se puede).

¡Crucigramas matemáticos!

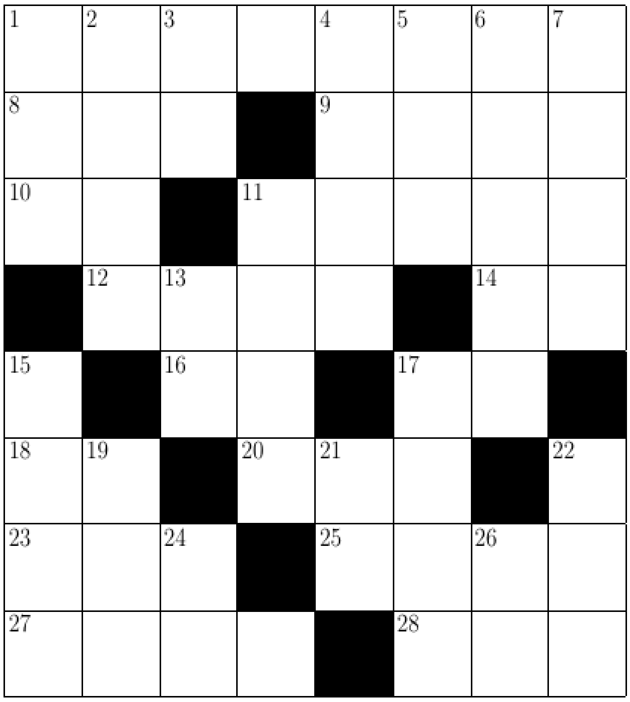
Podés encontrar las soluciones en las páginas siguientes.

Los siguientes dos crucigramas se arman con números enteros no negativos, un dígito por casilla. En el segundo crucigrama algunas preguntas pueden requerir consultas bibliográficas o a internet. En el primero, el desafío es intentar hacerlo sin consultas a internet.



<u>HORIZONTALES</u> 1.- Se pinta un cubo grande formado con 512 cubitos del mismo tamaño. Cantidad de cubitos pintados (en al menos una de sus caras). 3.- n^5, con n tal que el *número de oro* es igual a $\frac{1+\sqrt{n}}{2}$. 6.- Número de particiones del 8. 7.- 6to *número triangular* (el 1 es el primero). 8.- Cantidad de caras del icosaedro. 9.- Suma de los primeros 20 cuadrados perfectos. 11.- Menor número primo mayor que 100. 12.- Término de la sucesión de Fibonacci que se encuentra entre 2584 y 6765. 14.- Cantidad de números primos entre 50 y 100. 15.- 4to primo de Fermat, contando al 3 como el primero. 16.- Tres primeros dígitos significativos de π. 18.- Suma (en grados) de los ángulos interiores de un polígono de 9 lados. 21.- Cantidad de raíces de $\cos(x) = 0$ para $x \in [0, 100]$. 23.- Menor número natural que tiene 12 divisores. 24.- Medida del tercer lado (número entero) de un triángulo rectángulo cuyos otros lados miden 60 y 109. 25.- Cantidad de cuadrados (de todos los tamaños) que se forman en un tablero de ajedrez. 26.- Número de 3 dígitos cuya cifra de las unidades es 4 y que se obtiene al restar el número de 3 cifras abc por su permutado cba.

<u>VERTICALES</u> 1.- Vigésimo número natural que tiene todos sus dígitos iguales (el 1 es el primero). 2.- El 31 % de 299500. 3.- En sistema binario $(11111)_2$ 4.- En base 8 $(52776)_8$. 5.- 10 veces la suma de los primeros 18 primos. 7.- n tal que $n + 2$ es el producto de los primeros 4 primos. 10.- $abab$ con ab primo y $a = b + 6$. 13.- MCCCLX 15.- Potencia quinta de 3 cifras. 17.- Base del sistema decimal. 19.- Área del polígono de vértices $(27, 0)$, $(19, 12)$, $(2, 12)$ y $(0, 0)$. 20.- n tal que $n(n+1)$ es el producto de los primeros 7 primos. 22.- Cantidad de veces que en un día las agujas del reloj forman un ángulo llano. 24.- Capicúa que es suma de 3 cubos consecutivos.



HORIZONTALES 1.- 37mo término de la sucesión de Fibonacci, se encuentra entre 14930352 y 39088169. 8.- Primer cuadrado perfecto mayor que 1 en la sucesión de Fibonacci. 9.- Año del Nacimiento de Karl Friedrich Gauss. 10.- Cantidad de los famosos "Problemas de Hilbert". 11.- 5to primo de Fermat (3 es el 1ero). 12.- Primeros 4 dígitos significativos de e. 14.- Cantidad de triángulos distintos (no congruentes) con lados enteros entre 1 y 5. 16.- Cantidad de primos menores que 50. 17.- Cantidad de veces que se superponen las agujas del reloj en un día, sin contar las que se producen a las 12. 18.- Cantidad de aristas del Dodecaedro. 20.- Cantidad de rectángulos en un tablero de ajedrez. 23.- Menor número primo mayor que 300. 25.- Primeros 4 dígitos significativos del *número de oro*. 27.- Número de la patente del taxi que tomó Hardy cuando visitó a Ramanujan en el Hospital. 28.- Se pinta un cubo grande formado con mil cubitos del mismo tamaño. Cantidad de cubitos que fueron pintados (en al menos una de sus caras).

VERTICALES 1.- Capicúa, par, cuyos dígitos suman 5. 2.- 25 $\%$ de 17728. 3.- 3er *número piramidal* (pirámide de base cuadrada). 4.- En sistema binario $(1101111110110)_2$. 5.- Cantidad de días en 5^3 semanas. 6.- MDCCXXXII por 10. 7.- Se le resta 2, luego se lo divide por 10 y solo le quedan sietes. 11.- En base octal $(14015)_8$. 13.- Primo gemelo del 73. 15.- Cubo perfecto y capicúa. 17.- Yuxtaposición del factorial de 4 y del menor cuadrado y cubo perfecto (simultáneamente) mayor que uno. 19.- Número del Agente Secreto más famoso 21.- Potencia cuarta perfecta, impar. 22.- $\Pi_{k=1}^{4} k!$. 24.- Medida en grados de los ángulos exteriores del pentágono regular. 26. Cantidad de pentominós (cinco cuadrados unidos por sus lados) distinguiendo la orientación.

SOLUCIONES

Solución 1. *Respuesta:* 26 mil pesos costaría si no salen repetidas. Resulta de hacer $650/5 = 130$, serían los paquetitos necesarios, y luego multiplicar por 200 pesos.

Al comprar el 2do paquetito, la probabilidad de tener las 5 nuevas figuritas distintas a las anteriores viene dada por el cociente de números combinatorios:

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{\binom{n-5}{5}}{\binom{n}{5}} = \frac{645\,.\,644\,.\,643\,.\,642\,.\,641}{650\,.\,649\,.\,648\,.\,647\,.\,646} \cong 0,962.$$

En general, si hay k figuritas pegadas, la probabilidad de que salga una nueva es $p_{k+1} := \frac{n-k}{n}$.

Llenar el álbum de n figuritas habiendo comprado k figuritas, es como colocar aleatoriamente k bolas en n celdas y que ninguna celda quede vacía. Esta probabilidad se calcula en la teoría:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^k .$$

Veamos ahora brevemente cómo se calcula el valor esperado de la cantidad de figuritas necesarias para llenar el álbum:

llamemos T y t_i a las variables aleatorias tales que T cuenta la cantidad de figuritas que tendremos que conseguir hasta completar el álbum y t_i las necesarias para obtener la i-ésima figurita nueva después de tener ya $i-1$ pegadas en el álbum. Entonces $T = t_1 + \cdots + t_n$. La probabilidad de obtener una nueva figu es $p_i := \frac{n-(i-1)}{n} = \frac{n-i+1}{n}$. Así, t_i tiene distribución geométrica con valor esperado $\frac{1}{p_i} = \frac{n}{n-i+1}$. Por linealidad de la esperanza tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(T) &= \mathrm{E}\left(t_1\right) + \mathrm{E}\left(t_2\right) + \cdots + \mathrm{E}\left(t_n\right) = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \\ &= \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \cdots + \frac{n}{1} = n \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = n \cdot H_n, \end{aligned}$$

donde H_n es la suma parcial hasta n de la serie armónica, que se puede aproximar bien usando el logaritmo natural; con lo que queda

$$\mathrm{E}(T) = n \cdot H_n \cong n \ln n + 0,577 \cdot n$$

En nuestro caso, para $n = 650$, da cercano a 7. Es decir, si no se cambian figuritas, habrá que comprar aproximadamente $7 \times 650 = 4550$ figuritas; es decir, 910 paquetitos, que en pesos se traduce a un gasto de 182 mil pesos. La conclusión infaltable es que hay que salir a cambiar las figuritas repetidas.

Solución 2. *Respuesta:* Sí, existen. Por ejemplo, tomando $a_1 = 25$, $a_2 = a_3 = -10$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$, $a_6 = 4$, resulta que $p(x) = (xy^2 - 5xy + 2x^2y)^2$, por lo tanto es siempre no negativo.

Solución 3. *Respuesta:* No se puede. La solución al problema es iluminadora, muestra muy bien un aspecto del poder de los invariantes en la matemática.

Pensar el tablero 8×8 como de ajedrez, con las casillas blancas y negras. Notar que cada ficha de dominó que se ponga en el tablero, siempre va a cubrir una casilla blanca y una negra. El tablero original tiene 32 casillas de cada color, pero cuando se le quitan dos esquinas opuestas queda con 32 casillas de un color y 30 del otro. Por lo tanto, es imposible cubrirlo con 31 fichas de dominó.

Lo mismo sucede en general, en un tablero $n \times m$. Se lo colorea como al del ajedrez, por ser m o n pares. Entonces no se lo puede cubrir si se han quitado dos casillas de un mismo color. Ahora, si se se quitan dos casillas de distinto color, se puede ver, que siempre se lo puede cubrir bien, para $m, n > 1$. Una demostración se puede hacer con un razonamiento de tipo inductivo.

Soluciones de los Crucigramas Matemáticos

2	9	6	■	3	1	2	5
2	2	■	2	1	■	2	0
2	8	7	0	■	1	0	1
■	4	1	8	1	■	1	0
2	5	7	■	3	1	4	■
4	■	1	2	6	0	■	7
3	2	■	6	0	■	9	1
■	2	0	4	■	5	9	4

2	4	1	5	7	8	1	7
1	4	4	■	1	7	7	7
2	3	■	6	5	5	3	7
■	2	7	1	8	■	2	2
1	■	1	5	■	2	0	■
3	0	■	7	8	4	■	2
3	0	7	■	1	6	1	8
1	7	2	9	■	4	8	8

Viene de páginas anteriores.