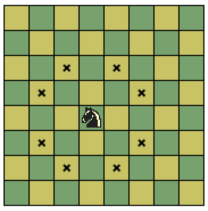
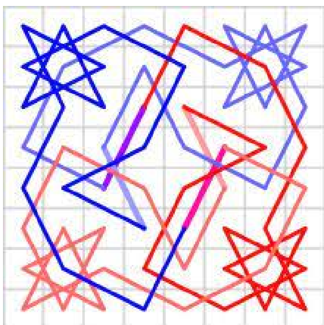
se puede ir de un número racional cualquiera a otro
con saltos de un caballo de ajedrez?

Pues es posible, pero primero tenemos que precisar qué entendemos por ¡movidas de caballo entre números!

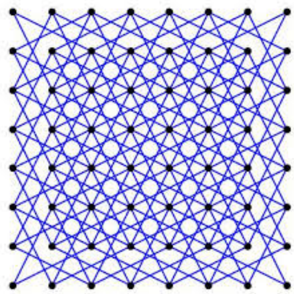
Como casi todos saben, el ajedrez es un juego de estrategia que se juega en un tablero de 8×8 casillas. Una de sus piezas es el *caballo* que tiene un curioso movimiento en forma de L y que además puede saltar a piezas propias y rivales. Más precisamente, para moverse, el caballo avanza dos casillas horizontales (resp. verticales) en cualquier dirección y luego, desde esta casilla, una casilla vertical (resp. horizontal) en cualquier dirección, sin importar si las casillas por las que pasaría están ocupadas por otras piezas o no. A continuación mostramos los 8 posibles movimientos de un caballo ubicado en el centro del tablero. No usaremos en lo que sigue la capacidad de saltar, sólo su movimiento en forma de L.



Hay un antiguo y famoso problema ajedrecístico, conocido como la *ruta del caballo*. En éste, se trata de recorrer todas las casillas del tablero con un único caballo pasando por cada una de ellas una sola vez y comenzando desde cualquier casilla. Una variante es que la ruta sea cerrada, es decir comenzar y terminar en la misma casilla. Existen un total de 19.591.828.170.979.904 rutas de caballo (abiertas o cerradas) en un tablero de ajedrez. En la siguiente figura mostramos una ruta cerrada y simétrica.



Matemáticamente, pensamos al tablero como un grafo de 64 vértices (las casillas) donde los vértices se conectan entre dos casillas si existe una movida de caballo entre ellos (ver siguiente figura). El problema de la ruta del caballo es entonces equivalente a encontrar caminatas Hamiltonianas del grafo (circuitos Hamiltonianos si la ruta es cerrada).



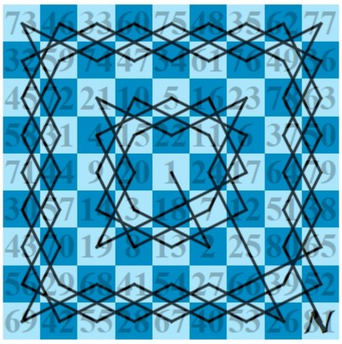
Bueno, pero volvamos a los números racionales, ¿qué tienen que ver con los tableros de ajedrez? Sabemos que los números racionales son infinitos de la forma $\frac{m}{n}$ con m y n enteros y $n \neq 0$. Entonces la idea es que vamos a pensar en el plano como un "tablero de ajedrez infinito", donde cada casilla represente un número racional. En efecto, podemos pensar en un tablero infinito donde cada casilla es un cuadradito de lado 1 centrado en los puntos de coordenadas enteras. De esta manera, la casilla cuyo centro corresponde al punto $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tiene asociado el número racional $\frac{m}{n}$, si n no es 0. Cada número racional con sus dos coordenadas no nulas aparece 2 veces en el tablero: (m, n) y $(-m, -n)$ representan a $\frac{m}{n}$ y $(-m, n)$ y $(m, -n)$ representan a $-\frac{m}{n}$. Las casillas correspondiente al eje x representan todas al 0 y convenimos en asignar el número 0 también a las casillas que corresponden al eje y. De esta manera podemos decir que hay un salto de caballo entre los números racionales $\frac{m_1}{n_1}$ y $\frac{m_2}{n_2}$ si existe un salto de caballo entre alguna de las casillas $(\pm m_1, \pm n_1)$ y $(\pm m_2, \pm n_2)$ que los representan en el tablero infinito. Matemáticamente, (m_1, n_1) está a salto de caballo de (m_2, n_2) si y sólo si (m_2, n_2) es alguno de los siguiente 8 puntos

$$(m_1 + 2, n_1 \pm 1), \quad (m_1 - 2, n_1 \pm 1), \quad (m_1 \pm 1, n_1 + 2), \quad (m_1 \pm 1, n_1 - 2).$$

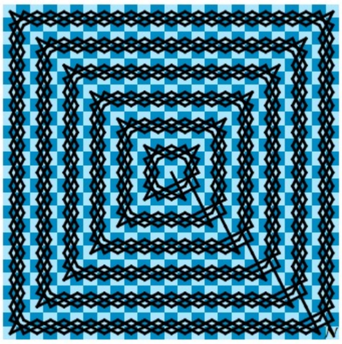
Ahora que tenemos identificados los puntos de $\mathbb{Q}$ con un tablero de ajedrez infinito, nos preguntamos si hay una ruta de caballo que vaya de un punto racional cualquiera a otro punto racional cualquiera.

Allen Schwenk probó en 1991 (*Which rectangular chessboards have a knight's tour?* Mathematics Magazine 64:5, 325–332) que existen rutas cerradas de caballo en un tablero $n \times m$ con $n \leq m$ si y sólo si (a) n y m no son ambos impares y (b) $n \geq 5$ ó $n = 3$ y $m \geq 10$. Sin embargo nos interesan las rutas abiertas. Es sabido que para todo tablero $n \times n$ con n impar mayor que 5 existe una ruta de caballo abierta. En efecto, en 2005 Shun-Shii Lin y Chung-Liang Wei probaron (*Optimal algorithms for constructing knight's tours on arbitrary n×m chessboards*, Discrete Applied Mathematics 146:33, 219–232) que existe una ruta de caballo abierta en un tablero $n \times m$, con $n \leq m$, si y sólo si (a) $n = 3$ y $m = 4$ o $m \geq 7$ o bien (b) $n \geq 4$ y $m \geq 5$. De hecho, el procedimiento es repetido de tableros más chicos a tableros más grandes. A continuación mostramos una ruta en un tablero 9×9

donde si nos concentramos en tablero 5×5 del centro vemos además una ruta de caballo en un tablero 5×5 (aunque no en el tablero 7×7).



La siguiente es una ruta de caballo 25×25 que incluye rutas de caballo para todos los tableros $n \times n$ con n impar de la forma $4k + 1$ menor que 25.



Es claro que este procedimiento sirve para cualquier tablero $4k + 1 \times 4k + 1$ y por lo tanto, dados dos racionales $q_1 = \frac{m_1}{n_1}$ y $q_2 = \frac{m_2}{n_2}$, primero los ubicamos en un tablero $4k + 1 \times 4k + 1$ (el menor posible) y luego los unimos siguiendo la ruta que sabemos que existe (y que puede ser inductivamente construida por el procedimiento que ya mencionamos arriba). Luego, ¡existen saltos de caballos que unen cualquier par de números racionales!

La primera referencia a una ruta de caballo se remonta al siglo IX d.C. En el libro de poesía en sánscrito escrito por **Rudrata**, menciona poemas escritos a partir de rutas de caballo. En un libro escrito por **Bhat Nilakantha**, que data de entre los años 1600 a 1700, describe 3 rutas de caballo, que no sólo son cerradas sino que son simétricas. Uno de los primeros matemáticos en ocuparse del tema fue, cuando no, **Leonhard Euler**, quien en 1759 presentó varias rutas de caballo simétricas. En 1823, **H. C. von Warnsdorff** introdujo un procedimiento heurístico para producir rutas de caballo en el 85 % de las veces en tableros menores que 50×50 y un 50 % en tableros menores que 100×100. La regla de Warnsdorff dice: 'iniciar en cualquier casilla e ir siempre a una casilla que tenga la menor cantidad de casillas vecinas (a tiro de salto de caballo) no visitadas.