Revista de Educación Matemática
Volumen 35, N° 3 (2020), páginas 7–19
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Aportes para la Enseñanza de la Matemática

INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS: EL USO DE GEOGEBRA

Marisa Álvarez y Rodolfo Murúa

Resumen. Son bien conocidos los problemas donde los alumnos y las alumnas tienen que interpretar y "leer" información de un gráfico de una función (o de una relación entre dos variables) dada una situación en contexto extramatemático. Aquí suelen incluirse preguntas para hallar el correspondiente de cierto valor de abscisa (u ordenada), donde a veces la información puede deducirse de forma exacta y otras aproximada. También se pueden analizar variaciones o cuestiones que tengan que ver con el crecimiento o decrecimiento de la función. Ahora bien, ¿qué ocurre si el gráfico viene dado en GeoGebra? Los procedimientos (o las técnicas) para deducir información de él, ¿son las mismas que al trabajar con lápiz y papel? En este artículo anticiparemos distintos tipos de procedimientos que podrían implementar las y los estudiantes. Algunos de ellos están más cercanos al trabajo realizado en lápiz y papel y otros, en nuestra opinión, son sumamente novedosos. Por otro lado, nos podemos preguntar cuáles son los aportes, en cuanto a conocimientos matemáticos, que brinda el programa al trabajar con gráficos "dinámicos". Cabe aclarar que cualquier potencialidad que tenga el *software* no se puede desligar de la intencionalidad docente.

Palabras clave: registros de representación, procedimientos instrumentales, GeoGebra.
Keywords: registers of representation, instrumental procedures, GeoGebra.

Abstract. Problems in which students have to interpret and "read" information from a graph of a function (or a relationship between two variables), given a situation in an extra-mathematical context, are well known. Questions to find the corresponding value of a certain abscissa (or ordinate), in which sometimes the information can be deduced exactly and others approximately, are usually included. It is also possible to analyze variations or issues related to increasing or decreasing intervals of a function. Now, what happens if the graph is presented in GeoGebra? Are the procedures (or techniques) for deducing information from it the same as working with pencil and paper? In this article, we will anticipate different types of procedures that could be implemented by students. Some of them are closer to the work done with pencil and paper and others, in our opinion, are extremely novel. Besides, we may ask ourselves what are the contributions, in terms of mathematical knowledge, that the software provides when working with "dynamic" graphs. It should be clarified that any potentiality of the software cannot be separated from the teaching intention.

§1. Introducción

Hay algunas investigaciones que dan cuenta de la "potencia" que tiene el programa GeoGebra para modelizar un problema geométrico y luego estudiar posibles relaciones entre pares de variables involucradas analizando los gráficos de las funciones resultantes (Arcavi & Hadas, 2000; Borsani et al., 2018); aunque para trabajar con este tipo de problemas, las y los estudiantes deben tener varios conocimientos geométricos y sobre todo, conocer la noción de función. Es por esto que, nos propusimos indagar sobre un contenido previo que es la interpretación y la lectura de gráficos; la novedad radica en que, en nuestra propuesta, los gráficos están presentados en GeoGebra.

Sostenemos que un gráfico dado en lápiz y papel y otro dado en GeoGebra son distintas representaciones. En este último caso, es posible cambiar la escala, visualizar o no los ejes, hacer *zoom*, trazar rectas horizontales o verticales, utilizando determinadas herramientas del programa, e intersecarlas con el gráfico, marcar un punto sobre un gráfico e ir desplazándolo para ver sus coordenadas, etc. Por lo tanto, varios de los procedimientos para leer información de un gráfico son distintos a los utilizados en lápiz y papel. Es por esto, que el estudio de estas dos representaciones del objeto gráfico, en lápiz y papel y en GeoGebra, debiera diferenciarse.

§2. Referencias teóricas

En el artículo mostraremos distintas anticipaciones sobre algunos posibles procedimientos de las y los estudiantes a la hora de interpretar y leer información de un gráfico dado en GeoGebra; por ello consideramos pertinente hacer referencia a la noción de *técnica instrumentada* (Artigue, 2007). Con lo cual, es necesario mencionar la idea de *técnica* de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997). Según esta teoría, toda tarea se puede resolver por una o varias técnicas, pensando a la técnica como una manera de hacer, no necesariamente algorítmica, ni siquiera algoritmizable.

> *Una técnica es una manera de resolver una tarea y, tan pronto como uno va más allá del cuerpo de tareas rutinarias de una institución determinada, cada técnica es un conglomerado complejo de razonamiento y trabajo rutinario. Me gustaría recalcar que las técnicas se perciben y evalúan con mayor frecuencia en términos de su valor pragmático, es decir, centrándose en su potencial productivo (eficiencia, costo, campo de validez). Pero también tienen un valor epistémico, ya que contribuyen a la comprensión de los objetos que involucran, por lo que las técnicas son fuente de interrogantes sobre el conocimiento matemático. (Artigue, 2002, p.4, traducción propia)"*

A las técnicas utilizadas en un ambiente computarizado, (Artigue, 2007) las llama **técnicas instrumentadas**. También este tipo de técnicas tienen un valor pragmático y uno epistémico. Como se mencionó en la cita anterior, la investigadora hace referencia al valor pragmático cuando el sujeto puede actuar sobre las representaciones de un objeto determinado permitiendo producir ciertos resultados. Se habla de valor epistémico cuando luego de llevar a cabo el procedimiento, se pudo comprender mejor al objeto en cuestión, se aprendió algo que hasta el momento no se conocía, se abren nuevas preguntas a ser indagadas, etc. Al igual que en un entorno de lápiz y papel, una técnica instrumentada resulta interesante si contiene tanto valores pragmáticos como epistémicos. Cuando se trabaja con un problema en un ambiente computarizado es esperable que surjan, por parte de las y los estudiantes, procedimientos propios de ese entorno. Luego, el o la docente determinará cuáles son valiosos por sus valores epistémicos y pragmáticos, para luego sistematizarlos y darles el "status" de técnicas.

Por otro lado, una potencialidad muy interesante que tiene el programa GeoGebra es la posibilidad de trabajar simultáneamente con una vista algebraica y una vista gráfica[1]. En este artículo estaremos interesados, en particular, por las distintas representaciones del objeto "punto".

(Duval, 1993) fue uno de los primeros investigadores en analizar las representaciones de los objetos bajo su teoría de registros de representación semiótica. La enseñanza de la matemática trata con muchos objetos ideales, abstractos, como

[1]Estos nombres fueron tomados de las versiones anteriores al GeoGebra 6. En la versión actual esas "vistas" no tienen una denominación.

por ejemplo los números, las funciones, los puntos o las figuras dentro del campo de la geometría. Ahora bien, como estos objetos teóricos no son accesibles, es necesario representarlos de alguna manera; la complejidad radica en que cada objeto puede tener más de una representación. El desafío para los y las docentes es doble: por un lado, que sus estudiantes sepan diferenciar al objeto de sus representaciones y por el otro, que además sepan coordinarlas. Cuando se establecen vínculos y relaciones entre distintos registros de representación se dice que se realiza una coordinación entre registros. Para este investigador (Duval, 1993) la existencia de al menos dos registros de representación de un mismo objeto, el tratamiento (transformaciones dentro del mismo registro), la conversión de uno al otro y la coordinación entre los mismos, son todas condiciones necesarias para que haya aprendizaje con respecto a la aprehensión del objeto teórico en cuestión por parte de las y los estudiantes.

§3. Un posible problema para ser llevado al aula

A continuación, haremos un despliegue del análisis a *priori* de un problema para ser trabajado con GeoGebra. Decimos que es un estudio a *priori* porque tiene un carácter anticipatorio: es previo a que la actividad se lleve a cabo en el aula. En él, incluimos posibles procedimientos instrumentados por parte de las alumnas y los alumnos y algunas intervenciones docentes frente a dichos procedimientos. Esperamos que este estudio sea un insumo para la gestión de una clase.

El problema analizado es la cuarta actividad de una secuencia didáctica destinada a estudiantes de segundo año de la escuela secundaria. En los primeros problemas de la misma[2], se propone un trabajo en torno a las distintas representaciones de los puntos y también se trabaja sobre las nociones de paralelismo y perpendicularidad. Luego, se plantea comenzar a trabajar con la interpretación y lectura de gráficos en lápiz y papel y a continuación, se propone esta misma tarea con GeoGebra.

Los objetivos generales de la secuencia son: que las y los estudiantes identifiquen que un punto permite relacionar dos variables en un contexto dado, que reconozcan las distintas representaciones de un punto y sean capaces de coordinarlas, que deduzcan el tipo de información que se puede inferir a partir de un gráfico y que además analicen el crecimiento o el decrecimiento de una relación entre variables[3].

[2]Para ver la secuencia, el lector o la lectora pueden ingresar a este enlace: `https://drive.google.com/file/d/1Q0tVj1-6jYEhW_mli_ZCVRd8SSPh2sZs/view`

[3]Hablamos de relación entre variables porque algunos gráficos no se corresponden con el de una función.

3.1. Lectura e interpretación de gráficos. En esta sección presentaremos la consigna del primer problema a ser trabajando con GeoGebra, posibles procedimientos de las y los estudiantes, tanto en lápiz y papel como con el programa, y algunas posibles intervenciones docentes.

En cuanto a los objetivos, se espera que las alumnas y los alumnos sigan relacionando las distintas representaciones de un punto, utilicen y luego identifiquen que hay varias estrategias para hallar el correspondiente de un valor de abscisa (u ordenada) determinado. Por último, se pretende poner a discusión las distintas respuestas dadas a partir del uso del GeoGebra, en comparación a las obtenidas cuando el gráfico viene dado en lápiz y papel.

Para abordar los objetivos mencionados, proponemos plantear la siguiente tarea:

Un grupo de estudiantes realizó una excursión. El siguiente gráfico muestra la distancia del colectivo al colegio (en km) en función del tiempo transcurrido desde la partida.

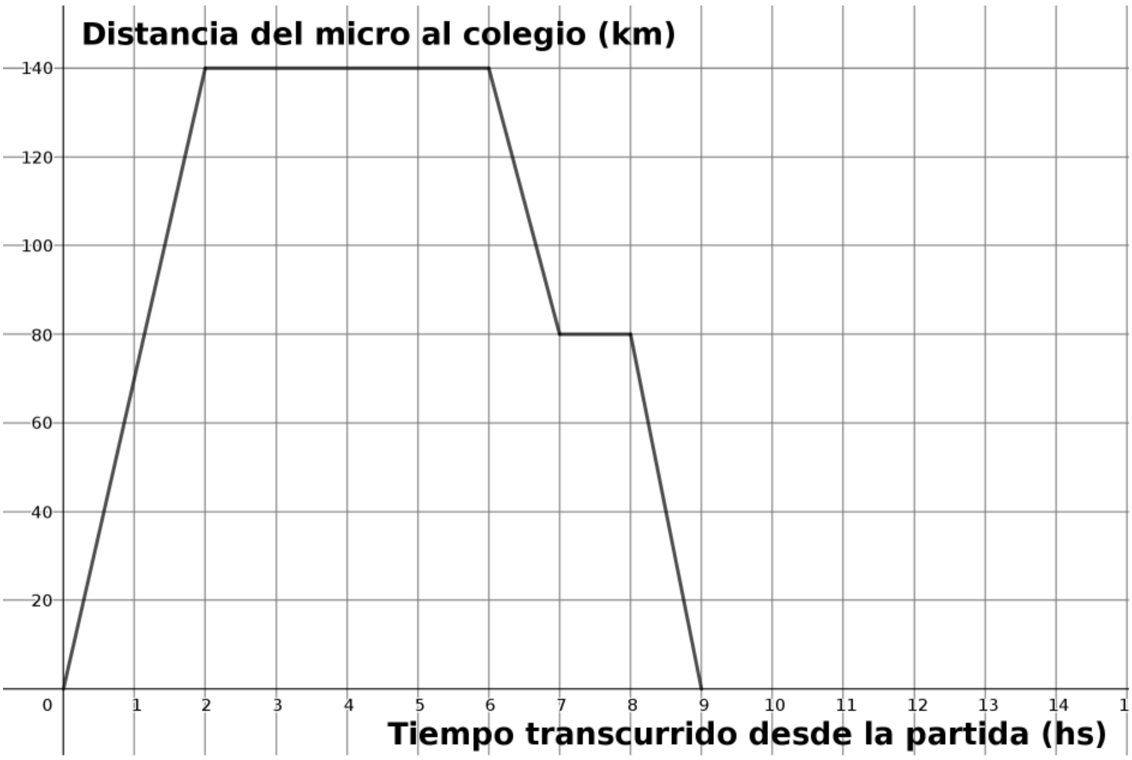

FIGURA 1. Gráfico en papel correspondiente a la tarea.

Dada la siguiente tabla, completen la primera columna viendo el gráfico en lápiz y papel. Luego abran el archivo de GeoGebra y completen la segunda y tercera columna. Comparen si sus respuestas fueron las mismas analizando los dos gráficos presentados.

	Pregunta	Respuesta viendo el gráfico en papel	Respuesta viendo el gráfico en GeoGebra	Herramientas utilizadas
a)	¿A qué distancia se encontraban después de una hora de viaje? ¿y después de 7 horas? ¿y después de media hora?			
b)	¿En qué momento los estudiantes se encontraban a 100 km del colegio? ¿Y a 80 km? ¿Y a 110 km?			
c)	¿A cuántos kilómetros estaba el lugar que visitaron?			
d)	¿Cuánto tiempo duró la visita al lugar?			
e)	¿Hubo alguna parada a la ida? ¿y a la vuelta?			
f)	¿Cuánto duró la excursión completa (incluyendo el viaje de ida y el de vuelta)?			
g)	¿Cuántos kilómetros recorrió el colectivo?			
h)	A la vuelta, ¿la velocidad del colectivo fue siempre la misma?			

FIGURA 2. Figura 2: Tabla comparativa de respuestas a la tarea.

Como se menciona en el enunciado, el problema planteado tiene dos instancias. En la primera, los alumnos y las alumnas tienen que analizar el gráfico dado en papel (Figura 1) y en la segunda, en GeoGebra[4]. Luego de estudiar cada gráfico, deben completar la información en la tabla (Figura 2) utilizando la columna correspondiente y comparar la información registrada.

3.2. Posibles procedimientos de las y los estudiantes y algunas intervenciones docentes. A continuación, presentaremos diversos procedimientos por parte de las y los estudiantes con algunas intervenciones docentes. Elegimos analizar los apartados en los cuales las posibles estrategias permiten evidenciar el contraste entre los procedimientos en lápiz y papel y aquellos con GeoGebra. Es por esto, que focalizaremos nuestro estudio en los ítems a) y b), relacionando el trabajo en ambos entornos.

3.2.1. Viendo el gráfico en lápiz y papel. Respecto del ítem a), pensamos que es probable que las y los estudiantes respondan que no se puede saber la distancia a la hora de haber partido porque no es un valor exacto. También anticipamos que

[4]Enlace al archivo: https://www.geogebra.org/classic/ehugntk7

pueden utilizar dos reglas apoyadas perpendicularmente para dar una respuesta aproximada a la pregunta planteada.

El ítem b) tiene una complejidad mayor porque el dato brindado se tiene que identificar en el eje y. Nuevamente las respuestas son aproximadas. Al igual que en el punto anterior, para lograr una mayor exactitud quizás los alumnos y las alumnas utilicen dos reglas, una apoyada sobre la recta horizontal $y = 100$ y otra apoyada perpendicularmente a ella sobre los puntos de intersección con el gráfico de la función. Es de esperar que solamente miren el primer valor y respondan 1,5hs aproximadamente. Aquí pensamos en no realizar ninguna intervención para que luego las y los estudiantes quizás entren en una contradicción en la segunda parte del problema con GeoGebra.

Con respecto a los 80 km, hay toda una franja horaria en la cual el colectivo estaba a dicha distancia (además del valor cercano a 1 hora). En general, las alumnas y los alumnos suelen identificar solamente a los extremos del intervalo, en este caso las 7hs y las 8hs.

3.2.2. Viendo el gráfico en GeoGebra. Si bien muchas respuestas se obtendrán de la observación de la pantalla, esa lectura requiere de varios conocimientos matemáticos, como ser: coordenadas de un punto, rectas paralelas, perpendiculares, horizontales, verticales, entre otros. Respecto del ítem a) al abrir el archivo (Figura 3) no se visualiza el número 1 en el eje x.

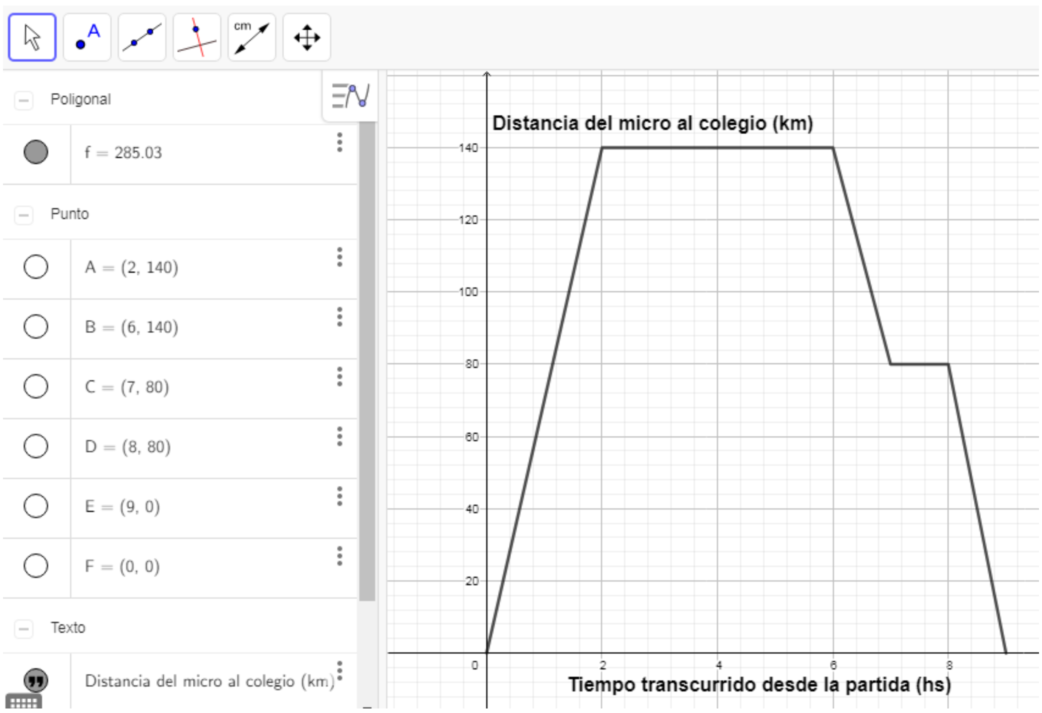

Figura 3. Captura de la pantalla inicial que se observa al abrir el archivo.

En caso de ser necesario, pensamos comentar cómo se hace para cambiar la escala de los ejes coordenados, por ejemplo, haciendo *zoom*. Al hacer esto, se podrían modificar las escalas hasta obtener un gráfico como el de la Figura 4 y visualizar que la distancia solicitada es de 70 km.

También se podría trazar una recta vertical por $x = 1$ ingresando por ejemplo los puntos $(1, 0)$ y $(1, 20)$ en la barra de entrada y luego mediante la herramienta *Recta* trazar la recta que pasa por dichos puntos (Figura 5).

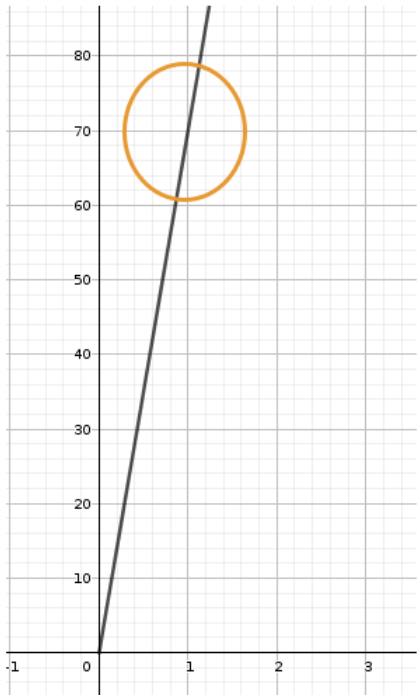

Figura 4. Captura de pantalla del gráfico con *zoom* en el cual la escala muestra el 1 en el eje x y el 70 en el eje y.

Finalmente se puede marcar el punto de intersección entre la recta vertical y el gráfico y leer las coordenadas de dicho punto en la Vista Algebraica.

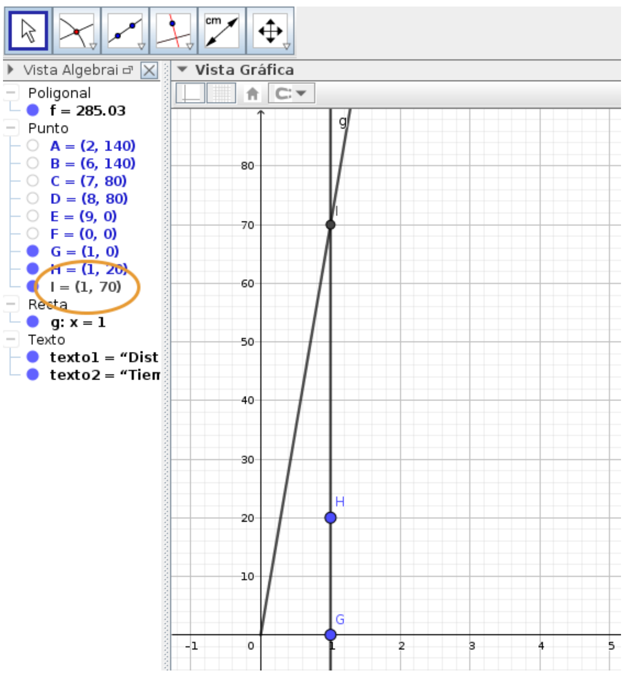

Figura 5. Captura de pantalla del gráfico con *zoom* en el cual la escala muestra el 1 en el eje x y el 70 en el eje y.

La estrategia previamente descripta involucra conocimientos matemáticos ya que, por un lado, para construir una recta vertical que pasa por dos puntos se tiene que identificar que éstos tienen que tener la misma abscisa y por otro, se tienen que interpretar las coordenadas del punto de intersección.

En este caso, este procedimiento instrumentado nos resulta interesante tanto por su valor pragmático como por su valor epistémico.

En caso de utilizarse la herramienta *Punto* (en lugar de ingresarlo en la barra de entrada), dado que el trazado de un punto es “a ojo”, tal vez su abscisa no sea 1 sino algún valor cercano. Ante esta situación, una posible intervención docente consiste en invitar a utilizar el *zoom* para visualizar, apelando a la cuadrícula, si ante la ampliación la recta construida es vertical o no. También, para fomentar la coordinación entre los distintos registros de los puntos, se puede preguntar cómo nos damos cuenta si la recta es vertical mirando la vista algebraica del programa.

Con respecto a la pregunta b) "¿En qué momento los estudiantes se encontraban a 100 km del colegio? ¿Y a 80 km? ¿Y a 110 km?" se podría trazar una recta horizontal a partir de dos puntos cuyas ordenadas sean los valores indicados y luego obtener las intersecciones de esta recta con el gráfico. Por ejemplo, como se muestra en la Figura 6, para responder la primera pregunta, se pueden marcar dos puntos con ordenada 100 y luego con la herramienta *Recta*, trazar la recta que pasa por ellos.

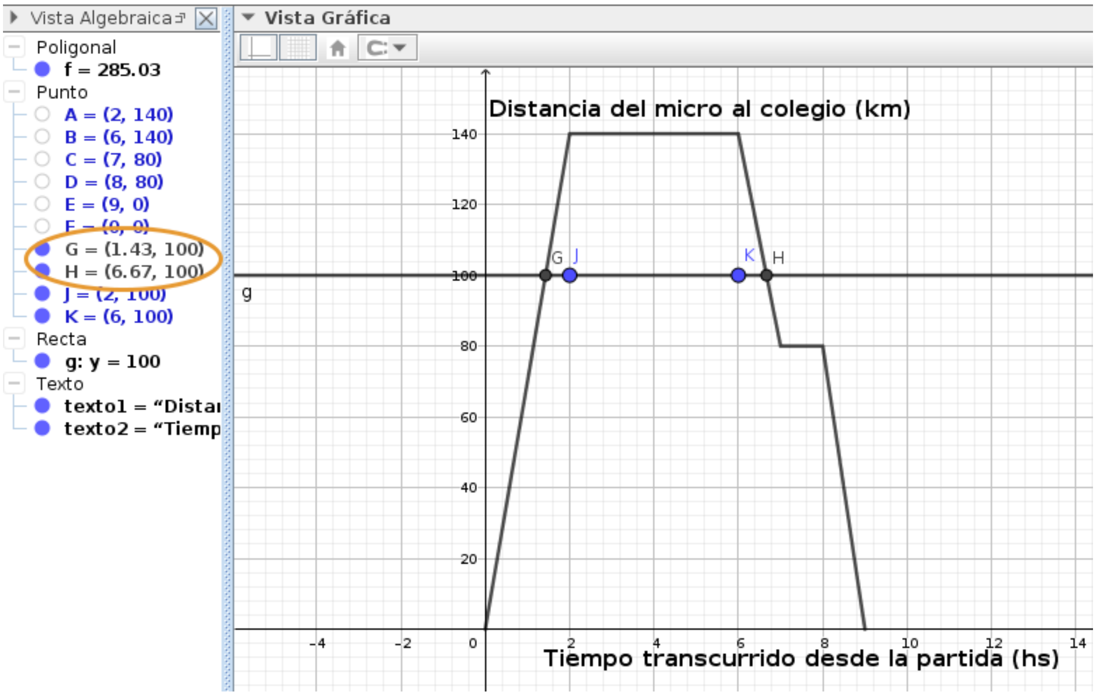

Figura 6. Trazado de la recta horizontal $y = 100$ mediante dos puntos con ordenada 100.

En este caso, al utilizar la herramienta *Intersección*, el software muestra dos puntos de intersección, hecho que podría invitar a la reflexión si en la resolución en papel solamente se identificó un sólo momento. Aquí el valor pragmático de este procedimiento resulta fundamental para hallar todas las soluciones pedidas.

Para responder las preguntas de este ítem, otra estrategia resulta de modificar la escala del eje y hasta que el valor en cuestión aparezca. Veamos en la Figura 7, el caso de 110 km.

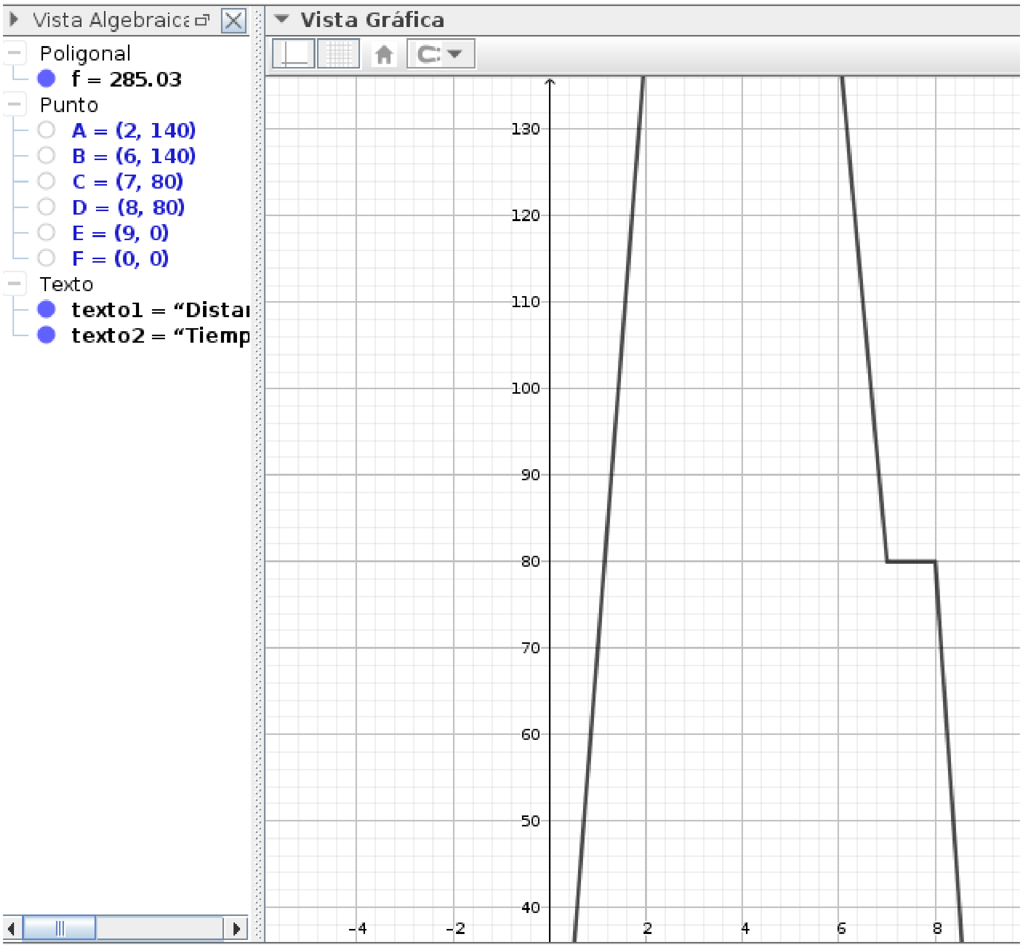

FIGURA 7. Captura de pantalla donde se visualiza el valor 110 en el eje y.

La dificultad de esta estrategia radica en luego identificar cuáles son los valores de abscisa que se corresponden con 110 km.

Dado que la construcción del gráfico está hecha como una poligonal, también anticipamos que se podría marcar un punto utilizando la herramienta *Punto en objeto* sobre la poligonal y ver sus coordenadas en la Vista Algebraica. En este caso, una estrategia podría consistir en ir deslizando el punto hasta intentar obtener puntos con las coordenadas deseadas. En la Figura 8, se muestra cuando el punto G tiene ordenada 110. Esta estrategia no siempre es útil porque a veces no se puede "atrapar" el valor buscado al mover el punto sobre la poligonal.

Más allá de que este procedimiento no tenga un alto valor pragmático, rescatamos esta estrategia porque permite poner en juego la coordinación de los distintos registros de representación de un punto (uno de nuestros objetivos de enseñanza) y además porque esa **coordinación se da de manera instantánea, en tiempo real**. Es decir, no se ven fotos, sino que se van visualizando los cambios de las coordenadas a medida que vamos moviendo el punto.

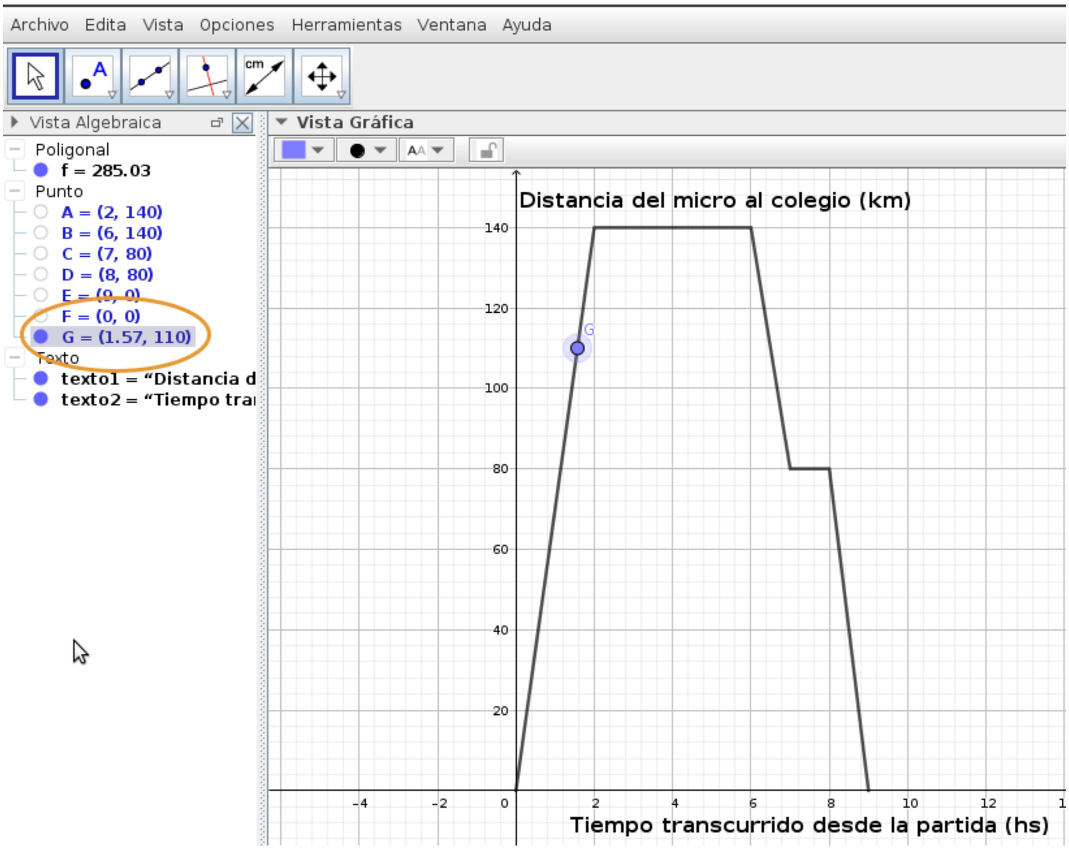

FIGURA 8. Captura de pantalla donde se muestra que G tiene ordenada 110.

Luego del trabajo realizado, para finalizar la clase pensamos enfatizar que en las dos partes de la actividad se aplicaron distintas estrategias para extraer información de un gráfico. Los conocimientos construidos en la primera parte (lectura de un gráfico dado en papel), como por ejemplo el trazado de rectas verticales por un valor de abscisa hasta la intersección con el gráfico y luego el trazado de una recta horizontal que contenga a ese punto de intersección para determinar la ordenada, se aplican y adquieren un nuevo sentido al estudiar un gráfico hecho en GeoGebra. Esto ocurre porque, en general, la selección de las herramientas que se utilizan, da cuenta de los conceptos involucrados. Es decir, varias herramientas tienen un conocimiento matemático detrás, aunque pueda ocurrir que el alumno o la alumna no sea consciente del mismo.

Pensamos en hacer una sola puesta en común al finalizar todo el problema con el objetivo de ver qué le aporta el GeoGebra a las primeras respuestas dadas viendo el gráfico en papel. Además de analizar los distintos procedimientos que podrían surgir en la clase, también pretendemos comparar las respuestas deducidas de los distintos entornos.

§4. Conclusiones

Como cierre de este artículo, queremos comentar algunas de las potencialidades que, a nuestro entender, tiene GeoGebra en contraposición con el trabajo en lápiz y papel. Al no encontrar bibliografía sobre actividades de lectura de gráficos en un entorno dinámico, muchas de estas ventajas las hemos ido descubriendo al anticipar posibles estrategias de nuestros y nuestras estudiantes. En este sentido, queremos destacar la importancia de haber realizado este análisis a *priori* ya que, además de permitir anticipar posibles intervenciones frente a las estrategias que desarrollen las alumnas y los alumnos, permite al docente conocer más en profundidad el programa, ya sea, tanto sus potencialidades como sus limitaciones. Al mismo tiempo, brinda la posibilidad de estudiar y anticipar si las posibles estrategias a desplegar involucran relaciones teóricas y en caso afirmativo, identificar las nociones que se ponen en juego, estudiar su valor pragmático y su valor epistémico para decidir si serán futuras técnicas a ser institucionalizadas. Como toda técnica, luego se deberán plantear problemas de ejercitación para que las mismas puedan ser sistematizadas.

Por otro lado, como mostramos en nuestras anticipaciones, pensamos que al trabajar con el programa GeoGebra la cantidad de estrategias para leer información de un gráfico es mucho mayor a las disponibles en lápiz y papel. Por lo tanto, la o el estudiante tiene un abanico más amplio de posibilidades para arribar a una respuesta determinada.

Además, una "potencia" del programa, para nosotros fundamental, es que permite visualizar al mismo tiempo dos registros de un punto: la escritura como par ordenado y su gráfico. Creemos que cuanto mayor sea la cantidad de registros (de un mismo objeto) con la cual se trabaje, más se va a comprender al objeto en cuestión. A esto último hay que sumarle el dinamismo del programa ya que, al mover un punto, se visualiza instantáneamente el cambio (o no) de sus coordenadas. Esta coordinación en paralelo con dos registros es muy difícil (o imposible) de abordarla en lápiz y papel.

Por último, aclaramos nuevamente que tiene que haber una intencionalidad docente detrás para explotar todas las potencialidades del programa mencionadas en los párrafos precedentes; es decir, la mera utilización del software no garantiza que ocurra todo lo desplegado en este artículo.

Bibliografía

Arcavi, A., & Hadas. (2000). Computer medialted learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *5*, 25-45. doi: https://doi.org/10.1023/A:1009841817245

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245-274. doi: https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. In E. Mancera & C. Pérez (Eds.), *Historia y Prospectiva de la Educación Matemática, Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (p. 9-21). México: Edebé Ediciones Internacionales, S. A.

Borsani, V., Cedrón, M., Cicala, R., Di Rico, E., Duarte, B., & Sessa, C. (2018). Modelización de relaciones entre magnitudes geométricas en un entorno enriquecido con TICs: actividades para la escuela secundaria, diseñadas en un grupo colaborativo. *Yupana*, *10*, 56-69. doi: https://doi.org/10.14409/yu.v0i10.7697

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-HORSORI.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37-65.

Marisa Álvarez
Universidad Nacional de General Sarmiento
Argentina.
(✉) *malvarez@es.ungs.edu.ar*

Rodolfo Murúa
Universidad Pedagógica Nacional
& Universidad Nacional de General Sarmiento
Argentina.
(✉) *rodolfo.murua@unipe.edu.ar – rmurua@es.ungs.edu.ar*

Recibido: *6 de marzo de 2020.*
Aceptado: *24 de septiembre de 2020.*
Publicado en línea: *7 de diciembre de 2020.*