Revista de Educación Matemática
Volumen 35, N° 3 (2020), páginas 53 – 72
Unión Matemática Argentina - FaMAF (UNC)

Artículos de Matemática

EL CRECIMIENTO EXPONENCIAL: UN DESAFÍO A LA INTUICIÓN

Marilina Carena

Resumen. Este texto consiste en una recopilación de problemas, ya conocidos en la literatura, relacionados con el crecimiento exponencial: la leyenda de Sissa y los granos de trigo; contagio exponencial; cómo llegar a la Luna doblando papeles; el telar de la abundancia y la estafa piramidal; interés compuesto. El objetivo es mostrar cómo este tipo de crecimiento desafía a nuestro pensamiento lineal, y de qué manera las potencias hacen crecer los números de una forma difícil de imaginar e, incluso, de creer. Veremos cómo el crecimiento exponencial produce un aumento en las cantidades a una velocidad contraria a la intuición. Cada problema se abordará a un nivel que pueda ser comprendido por un estudiante de escuela secundaria, o por cualquier persona con conocimientos mínimos de matemática. Para ello, algunos modelos se simplificarán de modo que se adapten al nivel deseado.

Introducción

Desde chicos estamos familiarizados con procesos que involucran magnitudes que se relacionan proporcionalmente, ya sea forma en directa o inversa. Por ejemplo, si compramos 2 alfajores pagaremos el doble que si compramos uno, o si viajamos a una velocidad constante de 120 kilómetros por hora tardaremos la mitad de tiempo que si lo hacemos a 60 kilómetros por hora. En el primer caso, la cantidad de alfajores y el precio total son magnitudes directamente proporcionales, ya que si una aumenta la otra también, en igual proporción. En el segundo ejemplo, la velocidad y el tiempo que tardamos en hacer un recorrido son magnitudes inversamente proporcionales, ya que si una aumenta la otra disminuye en igual proporción.

A medida que comenzamos a entender procesos más complejos comprendemos que existen otros tipos de relaciones entre magnitudes. Si duplicamos cada lado de un cuadrado, el área del nuevo cuadrado también aumentará, pero no será el doble del área del primero, sino que será su cuádruple. Si subimos una foto a una red social y recibe muchos “Me gusta” durante el primer día, no significa que al segundo día habrá acumulado el doble.

Palabras clave: Educación Matemática, Escuela Secundaria, Crecimiento Exponencial.
Keywords: Mathematics Education, Secondary School, Exponential Growth.

Así, vemos que existen muchas formas de crecimiento. En este trabajo centraremos nuestra atención en un tipo particular: el exponencial. Veremos, mediante ejemplos concretos, cómo este tipo de aumento desafía a nuestra intuición y de qué manera las potencias hacen crecer los números de una forma difícil de dimensionar.

El primer ejemplo que veremos relata una historia que ilustra la velocidad de este tipo de crecimiento. Esta historia, con algunas variantes, es una leyenda clásica que puede encontrarse en varios textos o en Internet. Sin embargo, la idea de fondo es la misma en todas y la explicamos a continuación.

La leyenda cuenta que, hace muchos años, un rey se encontraba extremadamente triste por la muerte de su hijo en una batalla. Para lograr recuperarse necesitaba algo que ocupara su mente, lo distrajera y evitara que cayera en depresión. De esta forma podría, de a poco, salir adelante.

Así fue que un buen día un sabio llamado Sissa, enterado de la situación, se presentó ante el rey y le ofreció un juego, asegurando que conseguiría entretenerlo: el ajedrez. Sissa le entregó un tablero, le explicó las reglas y el rey comenzó a jugar. Quedó maravillado con el juego, porque lo mantenía ocupado y entretenido. Entonces, como agradecimiento, le dijo a Sissa que pida lo que quisiera como recompensa. El rey era extremadamente rico, así que no tendría problemas en concederle a Sissa su deseo.

Sissa, que era muy sabio, pidió lo siguiente:

"Quiero un grano de trigo por la primera casilla del tablero, 2 granos por la segunda, 4 por la tercera, 8 por la cuarta, 16 por la quinta, y así sucesivamente hasta cubrir todo el tablero."

En otras palabras, la cantidad de trigo equivaldría a dejar un grano en el primer cuadrado del tablero y, a partir de allí, ir dejando en cada uno el doble de granos de los colocados en el anterior. La recompensa solicitada por Sissa correspondería a la suma de lo acumulado en cada una de las casillas del tablero.

El rey estaba sorprendido por el pedido, porque consideraba que era poco premio por tan maravilloso juego. De todas formas, accedió a concederle la recompensa solicitada y ordenó a sus ayudantes que calcularan la cantidad total de granos y se la entregasen a Sissa.

Al otro día, sus ayudantes le informaron al rey que no podían entregarle a Sissa la cantidad de granos de trigo solicitada, pues no podrían llegar a ella ni siquiera consiguiendo el trigo disponible en todo el mundo.

¿De qué cantidad se trata? ¿Podemos imaginarla? Encontraremos la respuesta en la próxima sección.

§1. La leyenda de Sissa y los granos de trigo

Calcularemos ahora la cantidad de granos de trigo que Sissa pidió al rey, como recompensa por haberle dado el juego de ajedrez. Para esto no necesitamos conocer la reglas del ajedrez, sino simplemente saber que el tablero es un cuadrado de 8×8 casillas, es decir, un total de 64 cuadrados negros y blancos. En la Figura 1 se representa un tablero y la cantidad de granos pedidos por Sissa por cada una de las primeras 6 casillas.

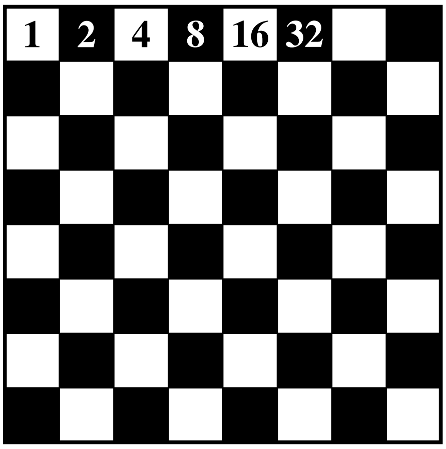


FIGURA 1. Cantidad de granos de trigo por cada una de las primeras 6 casillas.

En el siguiente cuadro iremos contando los granos de trigo por cada casilla, así como el total acumulado hasta ella, para observar si existe algún patrón. Para ello, numeramos las casillas del tablero con los números de 1 a 64.

Número de casilla	Granos por la casilla	Total de granos acumulados
1	1	1
2	2	$1+2$
3	4	$1+2+4$
4	8	$1+2+4+8$
5	16	$1+2+4+8+16$
6	32	$1+2+4+8+16+32$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
64	2^{63}	$1+2+4+8+16+32+\cdots+2^{63}$

CUADRO 1. Granos de trigo por casilla y acumulados.

En el cuadro anterior, para saber la cantidad de granos de trigo en la casilla número 64 hemos observado que, efectivamente, existe un patrón. Por ejemplo, la cantidad de granos en la casilla número 4 es 8, que es igual a 2^3. Lo mismo ocurre en cada una de las casillas: si tiene número n, la cantidad de granos correspondientes por ella es igual a 2^{n-1}. Así, en casilla número 64 habrá 2^{63} granos de trigo.

Por lo tanto, para calcular la cantidad total de granos que Sissa pidió de recompensa debemos obtener el resultado de la suma

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 2^{63}.$$

Como mencionamos al detectar el patrón, es posible reescribir cada uno de los términos de esta suma como

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{63}.$$

Podemos obtener el resultado de la suma con una calculadora pero, además, podemos utilizar una fórmula que resultará muy útil para todos los fenómenos que involucran crecimiento exponencial. Esta fórmula nos da el resultado de una suma de la forma

$$a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^n,$$

para cualquier número real a y cualquier número entero no negativo n. Si $a = 1$ entonces cada término es igual a 1 y el resultado es $n + 1$. Lo interesante es encontrar el resultado cuando a es distinto de 1. En este caso la suma recibe el nombre de *suma geométrica*, y su resultado se calcula fácilmente aplicando la siguiente fórmula:

$$a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

La igualdad anterior se obtiene de una forma tan simple como ingeniosa: llamemos S al resultado de la suma $a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$. Es decir,

$$S = 1 + a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^n.$$

Con el fin de encontrar el valor de S, multiplicamos por a ambos miembros de esta igualdad, obteniendo:

$$a \cdot S = a + a^2 + a^3 + a^3 + \cdots + a^{n+1}.$$

Si a esta última expresión le restamos miembro a miembro la anterior, obtenemos

$$a \cdot S - S = a^{n+1} - 1,$$

puesto que todos los demás términos del lado derecho se cancelan. Extrayendo S como factor común del lado izquierdo, nos queda

$$(a - 1) \cdot S = a^{n+1} - 1.$$

La fórmula enunciada se obtiene al dividir cada miembro de la igualdad anterior por $a - 1$.

Esta fórmula es tan simple de demostrar como de aplicar. Para ilustrar su uso, calculemos la cantidad de granos de trigo acumulados hasta la casilla 4, inclusive. Es decir, observando el Cuadro 1, debemos calcular el resultado de

$$1+2+4+8,$$

lo que se reescribe como

$$2^0+2^1+2^2+2^3.$$

Para hallar el resultado mediante la fórmula, la aplicamos con $a=2$ y $n=3$ para obtener

$$\frac{2^{3+1}-1}{2-1}=\frac{2^4-1}{1}=16-1=15,$$

tal como puede verificarse realizando la suma directamente.

Volviendo al problema del total de granos pedidos por Sissa, en ese caso tenemos $a=2$ y $n=63$, por lo que el resultado de la suma es

$$\frac{2^{64}-1}{2-1}=2^{64}-1=18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Esa es la cantidad total de granos que pidió Sissa como recompensa. Este número tan grande se lee como: *dieciocho trillones cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones setenta y tres mil setecientos nueve millones quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince.*

Hemos hallado la cantidad de *granos* de trigo que pidió Sissa y vimos que es un número muy grande pero, quizás, sea una cantidad razonable si la expresamos en kilogramos. Para ello, usaremos que mil granos de trigo pesan 40 gramos, aproximadamente. Es claro que el peso depende de la variedad de trigo, pero este valor es un promedio entre las más conocidas.

La cantidad de granos y su peso son dos magnitudes que mantienen una relación de proporcionalidad directa. Esto significa que si duplicamos una, la otra también se duplica, si la triplicamos la otra se triplica, y si la reducimos a la mitad la otra también se reduce en la misma proporción.

Así, podemos estimar que 25 000 granos de trigo pesan aproximadamente un kilogramo, puesto que $25\cdot 40=1\,000$. De igual forma podemos obtener el peso en kilogramos de la recompensa solicitada por Sissa:

$$\text{Peso de la recompensa}=\frac{18\,446\,744\,073\,709\,551\,615}{25\,000}\ \text{kg}.$$

El resultado de esta división es, aproximadamente, 737 869 762 948 382 kilogramos, es decir, ¡poco más de

737 869 762 948 toneladas!

Otra vez, este número quizás no nos permite dimensionar la magnitud de la recompensa solicitada por Sissa, por lo que vamos a tener en cuenta la producción *mundial* de trigo por año, al igual que lo hicieron los ayudantes del rey. La misma varía año tras año, pero actualmente podemos considerar un promedio de 750 000 000 toneladas anuales. Entonces,

¿cuántos años de cosecha son necesarios para conseguir la recompensa de Sissa? Haciendo la división obtenemos que se necesitan las cosechas *mundiales* de casi 984 años para acumular la cantidad necesaria de granos de trigos que pidió Sissa.

El rey, quien primero se mostró sorprendido por el pedido de Sissa por considerarlo poco, tuvo que comunicarle que no podían entregarle su recompensa. Entonces, le preguntó por qué le había hecho esa petición si sabía que era imposible. Sissa, le respondió:

"A los seres humanos nos cuesta dimensionar los procesos exponenciales. Aunque sabía que la recompensa que pedí era imposible de conseguir, lo hice por si alguna vez ocurre una epidemia en tu reino. Bastaría con que llegue un solo infectado por una enfermedad desconocida, que este contagie a dos personas, que cada una de ellas contagie a otras dos, y así sucesivamente, para que todo el reino se enferme en pocos días. Debes recordar esto para tomar decisiones a tiempo."

El contenido de la próxima sección nos permitirá comprender mejor la preocupación de Sissa ante una posible epidemia, y por qué le advierte al rey que, en tal caso, deberá tomar medidas a tiempo.

Una observación final: cada casilla contiene un grano más que el total acumulado en todas las casillas anteriores. Por ejemplo, el total de granos de trigo acumulados en las primeras 7 casillas es igual a

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127,$$

mientras que solamente por la casilla 8 corresponden 128 granos. Esto se verifica en cada casilla debido a la fórmula que otorga el resultado para esta suma geométrica. Así, la cantidad de granos de trigo correspondiente a la última casilla supera en una unidad lo acumulado hasta el momento por el resto del tablero. Este hecho ilustra la velocidad del crecimiento exponencial.

§2. Contagio exponencial

Durante la primera mitad del año 2020, cuando el mundo entero tuvo que hacer frente a la pandemia de COVID-19, una gran cantidad de información sobre el comportamiento del virus causante de dicha enfermedad circuló por todos los medios de información. Una palabra, en relación a la manera de propagación del coronavirus, comenzó a aparecer de modo recurrente: *exponencial*. Si uno comprende realmente el significado de un crecimiento exponencial, entiende también la importancia de detenerlo rápidamente mediante medidas de distanciamiento y desinfección.

Otra de las frases resonantes en medio de la pandemia fue la de "aplanar la curva" de contagios, para que no colapse el sistema de salud. Veremos con un ejemplo simple qué significa esta expresión y su relación con el crecimiento exponencial de los contagios. Este tipo de crecimiento ocurre cuando, por ejemplo, los contagios se duplican en relación al día anterior. Así, el número de contagios en un día dado se calcula multiplicando por una constante mayor que 1 el número de contagios del día anterior, generando un crecimiento exponencial de los contagios diarios. En un crecimiento lineal, en cambio, el número de contagios por día es un valor fijo, por lo que el total de enfermos va aumentando sumando una cantidad constante de casos por día. Cuando hablamos de "número de contagios diarios" nos referimos, obviamente, a una aproximación o promedio.

Para poder visualizar el modo de propagación exponencial supondremos dos modelos de contagio. En el primero asumiremos que cada persona que contrae el virus contagia solamente a una persona por día, pero que continúa contagiando durante los 14 días posteriores a haberlo contraído. Esto ocurre, por ejemplo, si la persona continúa con su vida habitual, sin aislarse (como el caso de los asintomáticos). En el segundo modelo supondremos, en cambio, que cada persona se aísla inmediatamente al detectar su enfermedad, por lo que solamente contagia a dos personas. Si estas dos personas son desconocidos, es decir, si no puede establecerse una cadena de contactos del "paciente cero" como para aislar inmediatamente a todos ellos (por ejemplo, porque asistió a un bar), podemos asumir que cada una de estas dos personas puede contagiar a otras dos, y así sucesivamente.

En ambos casos, haremos un registro de la cantidad de contagios y enfermos totales originados por una sola persona, denominada "paciente cero", durante los 14 días posteriores a haber contraído el virus.

Cabe señalar que ninguno de los modelos presentados sirve para describir el comportamiento real de la enfermedad, ya que no se tienen en cuenta las personas recuperadas ni una cantidad de factores que influyen en la realidad. Esta simplificación se debe a que solamente deseamos ilustrar el significado del crecimiento exponencial en los contagios, a un nivel accesible para escuela media. Para un modelo que resulte más real y contemple otros factores, así como para comprender cómo es posible aplanar la curva de contagios, se recomienda la lectura de (Amster, 2020) y (Pinasco, 2020).

Modelo 1: contagio continuo durante la enfermedad.

Supongamos el siguiente escenario: cada infectado contagia a una persona al día, y el período de contagio es durante los 14 días posteriores a haberlo contraído. Asumamos, para ilustrarlo, que en una determinada ciudad, un cierto día (denominado "día cero") aparece una persona portadora del virus, que identificamos como P_0 (por persona o paciente cero). Haremos un seguimiento de los contagios nuevos y totales en cada día, durante los 14 días siguientes.

- **Día 1:** la persona P_0 contagia a una persona, a la que llamaremos P_1. Luego, en este día hay un solo contagio nuevo, acumulando un total de 2 personas enfermas (el paciente cero P_0 que sigue enfermo más el contagio P_1).
- **Día 2:** según el supuesto, las personas enfermas, P_0 y P_1, contagian hoy a una nueva persona cada una, denotadas por P_2 y P_3, respectivamente. Por lo tanto, la

cantidad de nuevos contagiados es 2, mientras que la cantidad total de enfermos es 4.

- **Día 3:** siguiendo el razonamiento anterior, cada una de las 4 personas enfermas contagia a una persona, por lo que la cantidad de nuevos contagios es 4, mientras que la cantidad total de enfermos es 8.
- **Día 4:** hay 8 nuevos contagios, haciendo un total de 16 enfermos.
- **Día 5:** aparecen 16 nuevos contagios, acumulando un total de 32 enfermos.

Siguiendo de esta forma, se puede ver que el total de casos activos se duplica día tras día, pues cada persona enferma contagia a una persona por día. Lo mismo ocurre con la cantidad de nuevos contagios, que es igual a la mitad de los casos activos en ese día. Así, la cantidad de enfermos cada día es:

	Contagios nuevos	Total de enfermos
Día 1	1	$2 = 2^1$
Día 2	2	$4 = 2^2$
Día 3	4	$8 = 2^3$
Día 4	8	$16 = 2^4$
Día 5	16	$32 = 2^5$

Lo anterior se resume diciendo que la cantidad de enfermos, originados por la persona inicial P_0, que habrá en el día n será igual a 2^n. De estos enfermos, la mitad son contagios nuevos producidos en ese día.

- **Día 14:** Así, por lo anterior, la cantidad de personas enfermas luego de 14 días será igual a $2^{14} = 16\,384$. Este número se alcanza en tan solo dos semanas asumiendo que haya una sola persona contagiada inicialmente y que, a su vez, cada persona contagie solamente a una más por día.

El gráfico en la Figura 2 ilustra la cantidad de contagios nuevos producidos en cada día a partir del modelo anterior, hasta el noveno día. Como puede observarse, este tipo de aumento es asombroso, ya que los casos se incrementan muy rápido aunque se parta de números bajos. Esta es, precisamente, la curva que se desea aplanar mediante las medidas de desinfección y distanciamiento.

Modelo 2: contagio a los cercanos y aislamiento.

Pensemos en un modelo diferente de contagios, en el que cada persona contagia solamente a dos más. Luego, se aísla y no contagia nuevamente. Sin embargo, cada una de

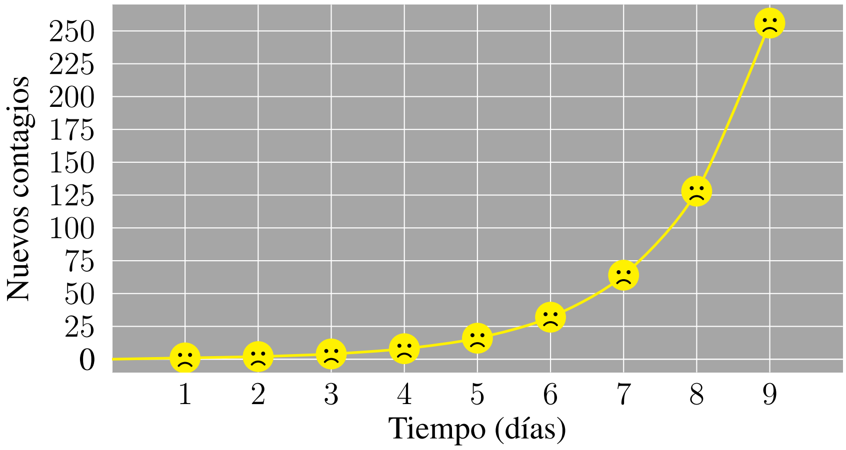
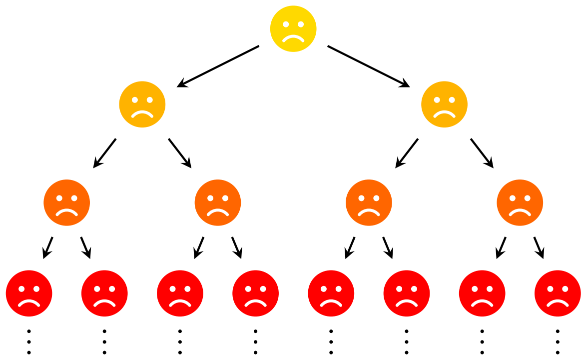


FIGURA 2. Cantidad de contagios producidos en cada día.

esas personas contagia, a su vez, a dos más. Y así sucesivamente. Como antes, supongamos que todo comienza con una persona P_0 que contrae el virus. Analizaremos todos los contagios nuevos que se originan a partir de ella, cuando la situación no logra controlarse. Esta persona, P_0, contagia a 2 personas. Cada una de estas contagia a 2 más y, luego, estas 4 personas contagian a un total de 8. Esta cadena de contagios es muy clara si se representa gráficamente:



Nuevamente podemos observar que el crecimiento de los contagios es exponencial y que la cantidad de contagiados se va duplicando. Solo a modo de ilustrar la velocidad de este tipo de aumento, supongamos que cada persona demora un día en producir los dos contagios. Es decir, cada uno de los "niveles" representados en el gráfico anterior simbolizan los contagios producidos en cada día, a partir del primero (dado en el "día cero"). De este modo, en el primer día hay 2 nuevos contagios, en el segundo hay 4, en el tercero hay 8, y así.

Al igual que antes, lo anterior se resume diciendo que en el día n se producen 2^n contagios, por lo que durante el día 10 posterior a la aparición del primer caso se producirán $2^{10} = 1024$ infecciones. Sin embargo, si esto no se controla, solamente 14 días después del comienzo de la enfermedad en el lugar (es decir, luego de dos semanas), $2^{14} = 16\,384$ personas serán contagiadas durante ese día.

Estos 16 384 casos son solamente los producidos durante el día 14, y originados por el paciente cero. ¿Podemos calcular exactamente el total de personas que contrajeron el virus hasta ese día? Para ello, se deben sumar todas las personas que se contagiaron por día:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 16\,384,$$

lo que se escribe también como

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{14}.$$

Esto nos recuerda a la suma geométrica presentada previamente, cuyo resultado se calcula fácilmente como:

$$a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Así, para hallar la cantidad acumulada de personas infectadas luego de 14 días desde el primer caso, aplicamos la fórmula con $a = 2$ y $n = 14$, para obtener

$$\frac{2^{14+1} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{15} - 1}{1} = 32\,767.$$

Así, luego de 14 días se habrán enfermado 32 767 personas. Lo interesante de la fórmula es que permite, además, calcular la cantidad de días necesarios para que una determinada parte de la población se enferme, suponiendo que el virus se propaga de esta forma y a partir de una sola persona enferma. Por ejemplo, ¿cuántos días hacen falta para que toda una ciudad de 80 000 habitantes se enferme? ¿Y una de 500 000?

Para responder la primera pregunta simplemente debemos hallar un valor de n para el cual

$$\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 80\,000.$$

Es decir,

$$2^{n+1} = 80\,000 + 1,$$

o equivalentemente

$$2^n = \frac{80\,001}{2} = 40\,000.5.$$

Notemos que $2^{15} = 32\,768$ y $2^{16} = 65\,536$. Luego, la cantidad de días buscada está entre 15 y 16. Para redondear a un número entero, nos quedamos con 16. Así, sabemos que luego de 16 días se habrán contagiado

$$2^{16+1} - 1 = 131\,071$$

personas, es decir, toda la ciudad y más. En el día anterior, luego de 15 días del primer caso, la cantidad de infectados en la ciudad es de

$$2^{15+1} - 1 = 65\,535$$

personas. Haciendo el mismo razonamiento, para que una población de 500 000 personas se contagie por completo a partir de un solo caso y mediante una propagación en la que los contagios se duplican día tras día, es suficiente con que transcurran tan solo 18 días.

Bajo este modelo, la curva de nuevos contagios diarios tiene un aspecto similar a la bosquejada en el modelo previo. En ambos casos, como el crecimiento de los contagios es exponencial, se satura rápidamente el sistema de salud. Así, resulta de suma importancia lograr "aplanar" la curva tomando medidas adecuadas.

En el primer modelo supusimos que cada persona infectada por el virus contagia solamente a una persona más, pero durante 14 días. Esto se puede evitar si la persona no continúa con su rutina habitual luego de enfermarse, como sí suele hacerse con otro tipo de afecciones a la salud (como un resfrío). Para esto es fundamental detectar la enfermedad a tiempo, incluso en aquellas personas asintomáticas.

En el segundo modelo el problema que causó la propagación exponencial fue no poder "cerrar" la cadena de contagios. Para evitar esto, resulta fundamental no asistir a reuniones con personas fuera del círculo cercano apenas exista la sospecha de ser portador del virus. En este modelo supusimos que el promedio de personas contagiadas por cada portador es 2, pero puede ser mayor al asistir a lugares con mucha gente sin distanciamiento.

Aunque se espera que la ciencia encuentre vacunas o tratamientos que permitan recuperar la forma de vida previa a la pandemia, lo anterior explica por qué en todas partes del mundo se tomaron medidas para intentar aplanar la curva de contagios.

§3. Plegando papeles para llegar a la Luna

Es probable que todos, alguna vez, tomamos un papel de golosina o una servilleta de papel que teníamos cerca, y lo doblamos por la mitad tantas veces como pudimos. ¿Cuántas veces pudimos repetir ese doblez? ¿Cómo aumentó el grosor a medida que hicimos los dobleces? En esta sección nos ocuparemos de responder estas preguntas.

Supongamos que tenemos un papel, de cualquier tamaño, cuyo grosor es de 0.1 milímetros. Este es el grosor de una hoja de tamaño A4 clásica. Al doblar la hoja por la mitad la primera vez, el resultado tendrá un grosor de 0.2 mm. Al hacerlo por segunda vez este grosor se duplicará, obteniendo un resultado de 0.4 mm. Al doblar por tercera vez el papel por la mitad alcanzaremos un grosor de 0.8 mm, luego 1.6 mm, y así sucesivamente. Representamos estas cantidades en una tabla para organizar visualmente la información (ver Cuadro 2).

Resumiendo, cada vez que doblamos una hoja por la mitad, el grosor del resultado se duplica. Así, esta cantidad aumenta exponencialmente: luego de n dobleces habrán 2^n capas de papel, por lo que el grosor será igual a

$$2^n \cdot 0.1\,\mathrm{mm}.$$

	Grosor en mm	Cantidad de capas de papel
1° doblez	0.2	$2 = 2^1$
2° doblez	0.4	$4 = 2^2$
3° doblez	0.8	$8 = 2^3$
4° doblez	1.6	$16 = 2^4$

CUADRO 2. Grosor del papel al ser doblado.

Para dimensionar la velocidad de este aumento en el grosor, tomemos como referencia la distancia de la Tierra a la Luna, que es de 384 400 km, aproximadamente. Esta distancia, expresada en mm, es igual a 384 400 000 000.

Entonces, si queremos calcular cuántas veces debemos doblar un papel de 0.1 mm de espesor para llegar a la Luna, debemos buscar un número n tal que

$$2^n \cdot 0.1 = 384\,400\,000\,000$$

Asombrosamente, con $n = 42$ alcanza (y sobra) pues:

$$2^{42} \cdot 0.1 = 439\,804\,651\,110.4.$$

Es decir, luego de doblar 42 veces el papel, el grosor superaría los 439 804 km, lo que supera la distancia de la Tierra a la Luna. Por lo tanto, con 42 pliegues llegaríamos más allá de la Luna.

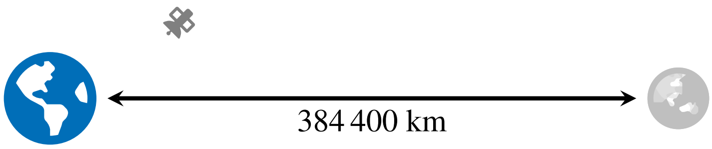


FIGURA 3. Distancia de la Tierra a la Luna.

De la misma forma podemos calcular los pliegues necesarios para alcanzar otras longitudes menores:

Longitud	Cantidad de dobleces
Largo de una cancha de fútbol	20
Distancia entre Tierra del Fuego y Jujuy	35
Altura aproximada de Lionel Messi	14

Estos resultados, que pueden resultar poco intuitivos, se deben la rapidez del crecimiento exponencial, que hace que las cantidades aumenten a una velocidad extraordinaria. Una pregunta que nos hace dar cuenta de la magnitud de esta velocidad es la siguiente: si doblando el papel 42 veces llegamos a la Luna, ¿a dónde llegamos justo antes de realizar el último doblez? Puesto que duplicamos el grosor con cada doblez, antes de realizar el último estaríamos exactamente ¡a mitad de camino!

¿Cuántas veces es posible doblar un papel por la mitad? Ya vimos que doblando 42 veces un papel por la mitad podemos llegar más allá de la Luna, pero ¿es posible hacerlo?

La respuesta es no. Si tomamos una hoja de papel que tengamos a mano podemos comprobar que es posible doblarla por la mitad, como máximo, unas 7 veces. El récord fue conseguido en 2011 cuando unos estudiantes doblaron 13 veces un papel, superando a los 12 dobleces conseguidos en el año 2002. Se utilizó un rollo de papel higiénico, fabricado especialmente para este fin, de aproximadamente 16 km de longitud. Al doblarlo 13 veces la cantidad de capas obtenidas es igual a 2^{13}, lo que significa un total de 8 192 capas superpuestas. Puesto que el grosor del papel era de 0.1 mm, aproximadamente, la altura del resultado obtenido luego de 13 dobleces fue de $2^{13} \cdot 0.1$ mm, es decir, 81.92 cm. El proceso de doblar comienza a complicarse debido a las curvaturas laterales del plegado, que alcanzan un tamaño importante. La experiencia fue grabada y puede verse en `https://youtu.be/NNgxmyGPZls`.

Vimos que cuando multiplicamos por sí mismo un número mayor que 1 (en los ejemplos anteriores, ese número es 2) se produce un crecimiento exponencial. ¿Qué ocurre si dicho número es menor que 1? Similarmente, se producirá un *decrecimiento exponencial*.

Para ilustrarlo, observemos qué ocurre con el largo del papel a medida que se van produciendo los pliegues. No importa cuánto sea su largo, lo denotamos como ℓ, en alguna unidad de longitud establecida. Al doblar el papel por primera vez, el largo será igual a $\frac{\ell}{2}$. Luego del segundo doblez, y olvidando que las curvaturas laterales ocupan parte del papel, la longitud será igual a $\frac{\ell}{4}$. Siguiendo de esta forma, con el doblez número 3 obtendremos un largo de $\frac{\ell}{8}$ y, en general, en el doblez número n el largo del resultado será igual a $\frac{\ell}{2^n}$, pues en cada paso lo dividimos por la mitad.

Entonces, volviendo al récord de 13 dobleces conseguido en 2011, ya vimos que el alto del papel plegado resultante era de poco más de 80 cm. ¿Cuánto habrá medido de largo luego de los 13 dobleces? Según la fórmula anterior, en la que hemos ignorado el papel que se ocupa en las curvaturas laterales, partiendo de un largo igual a $\ell = 16\,000$ metros, luego de 13 dobleces la longitud será igual a

$$\frac{16\,000}{2^{13}} = 1.953125,$$

es decir, ¡menos de 2 metros de largo!

Lo anterior muestra, nuevamente, el poder de las potencias tanto en el crecimiento como en el decrecimiento. En este caso, partiendo de una longitud tan grande como 16 km, luego de tan solo 13 dobleces la misma se reduce a algo menos de 2 m.

§4. La estafa del telar de la abundancia

No es casualidad que, en medio del confinamiento a causa del COVID-19, haya resurgido un sistema que aparece cada un cierto tiempo. El motivo es simple: la pandemia produjo daños económicos en todo el mundo y este sistema se nutre, justamente, de la necesidad de la gente. El mismo se presenta (o se esconde) de diversas formas. Analizaremos una de las más evidentes: los telares de la abundancia, conocidos también como mandalas, flores o fractales de la abundancia.

Un telar está compuesto por 15 pétalos que forman una flor o mandala, que se agrupan en 4 categorías o niveles: un agua, dos tierras, cuatro aires y ocho fuegos (ver Figura 4).

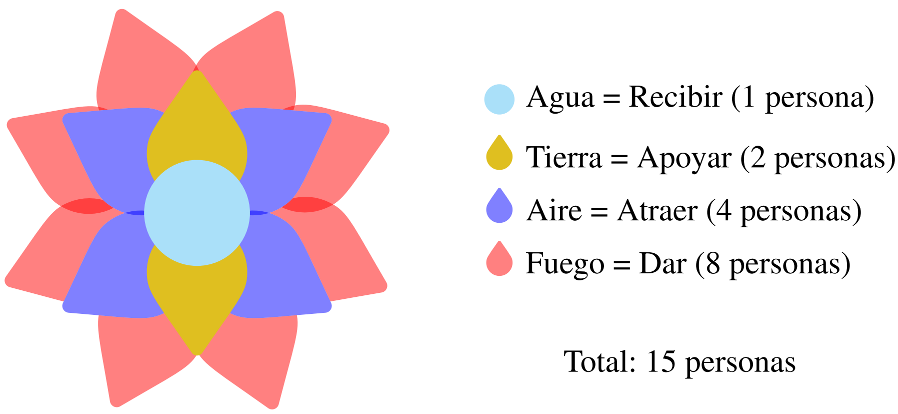


FIGURA 4. Composición de cada flor o mandala.

Cada pétalo representa a cada una de las 15 personas que integran el telar. En el centro de la flor está el “agua”, quien tiene que invitar a dos personas a entrar al telar, los “tierra”. Los elementos tierra invitan a dos personas cada uno, que forman parte de la categoría “aire”. Los elementos aire también invitan a dos personas cada uno, denominados “fuego”, que son quienes completan la flor. Los elementos fuego son siempre quienes hacen la inversión inicial (que suele ser alta, entre 1 000 y 1 500 dólares), y el agua es quien recibe la suma de todas ellas. Es decir, suponiendo que cada fuego ingrese con 1 000 dólares, el agua recibe 8 000 mil y sale del sistema. Los elementos tierra pasan entonces a ser agua y forman una nueva flor cada uno. Los demás elementos suben un nivel en la estructura pasando a ser tierra y aire en las nuevas flores. Los aire de las nuevas flores, que eran fuego en la anterior, son quienes ahora deben invitar cada uno a dos personas más, para que sean los nuevos fuegos (invirtiendo mil dólares al ingresar). Este ciclo se repite, y cada uno cobra 8 veces la inversión inicial cuando llega a ser agua de una nueva flor, y esa flor se completa con sus 8 fuegos.

Lo anterior se puede visualizar mejor como diagrama de árbol, como el de la Figura 5. Cuando el agua recibe el dinero y se retira, la rama izquierda del árbol forma una nueva flor, ascendiendo cada uno de nivel. Así, los fuego pasan a ser agua y cada uno de los 4 debe lograr ingresar a 2 personas cada uno, quienes serán los nuevos fuegos y deberán invertir. Lo mismo ocurre con la rama derecha.

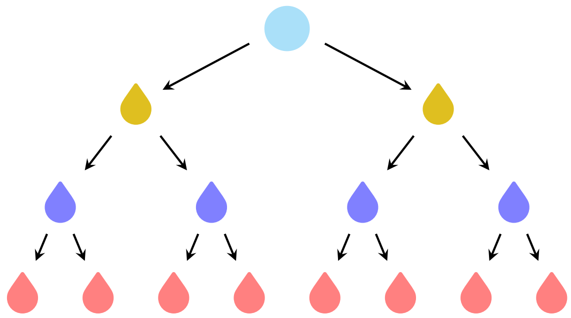


FIGURA 5. Representación del telar como árbol.

Resumiendo: para que una persona reciba dinero debe llegar a ser agua, y luego 8 personas deben ingresar e invertir. Nadie recupera la inversión hasta llegar a liderar y completar una flor, en cuyo caso, la multiplica por 8. Si la cadena se corta, todos los que se encuentran participando pierden. Por lo tanto, el ganar depende solamente de la participación de nuevos miembros.

Así, a medida que se van creando nuevas flores se necesita más gente para completarlas, aumentando las posibilidades de que el proceso se detenga. Pero, ¿qué tan rápido es este aumento? Veamos qué cantidad de personas son necesarias para sostener el sistema.

- **Fase 0:** Pensemos primero que existe una sola flor, la inicial. Se forma con un total de 15 personas, donde 8 invierten y 1 gana.
- **Fase 1:** La flor se divide en 2 nuevas flores, y cada una de ellas necesita 8 inversionistas. Luego, en esta fase, $2 \cdot 8 = 16$ personas invierten y 2 ganan.
- **Fase 2:** Cada una de las flores anteriores se divide en 2 nuevas flores, por lo que son un total de 4. Cada una necesita 8 inversionistas. Luego, ahora $4 \cdot 8 = 32$ personas invierten y 4 ganan.
- **Fase 3:** Cada flor de la fase anterior se divide en 2 nuevas flores, formando un total de 8. Cada una necesita 8 inversionistas, es decir, $8 \cdot 8 = 64$ invierten y 8 ganan (que corresponden a los inversores de la Fase 0).

Continuando de la misma forma, a medida que las flores se subdividen para formar 2 nuevas, la cantidad de personas necesarias para que el sistema siga se va duplicando. En otras palabras, dicha cantidad aumenta de manera exponencial (ver Cuadro 3). Como vimos, este tipo de crecimiento es asombroso y difícil de asimilar. Por ejemplo, en la fase 25 se encuentran activas 2^{25} flores, por lo que el total de participantes es

$$15 \cdot 2^{25} = 503\,316\,480.$$

Este número representa más de 10 veces la población de Argentina.

	Flores creadas	Inversores
Fase 0	1	$8 = 8 \cdot 2^0$
Fase 1	2	$16 = 8 \cdot 2^1$
Fase 2	4	$32 = 8 \cdot 2^2$
Fase 3	8	$64 = 8 \cdot 2^3$
Fase 4	16	$128 = 8 \cdot 2^4$
Fase 5	32	$256 = 8 \cdot 2^5$
Fase 6	64	$512 = 8 \cdot 2^6$

CUADRO 3. Cantidad de inversores en cada fase.

En forma general, en la fase n hay 2^n flores (cada una formada por 15 personas). Como consecuencia, a medida que el juego avanza se hace más difícil conseguir gente dispuesta a ingresar. Debido a la velocidad del aumento exponencial ya analizada, esto ocurre rápidamente, por más esfuerzo y voluntad que uno le dedique. Así, la cadena se interrumpe haciendo que todos los que se encuentran participando pierdan su dinero.

Es verdad que las personas podrían participar más de una vez, y así el que "se termine la gente" no sería un problema (aunque tampoco pueden participar infinitas veces, que sería la única forma de que nadie pierda), pero lo cierto es que cada persona no forma parte de muchas flores a la vez, ni todo el mundo accede.

Aunque el crecimiento exponencial en la cantidad de participantes necesarios es lo que hace que la cadena tarde o temprano se corte, debemos observar que este no es el motivo por el que este tipo de mecanismo es inviable, como explicamos a continuación.

Es matemáticamente imposible que todos ganen. El hecho de involucrar dinero junto con una dinámica de funcionamiento que parece organizada y compleja produce la sensación de que puede funcionar. Sin embargo, el dinero que hay en juego no produce intereses, solamente circula de mano en mano. Para comprender por qué no puede funcionar reemplacemos el dinero por un objeto: supongamos que nos invitan a participar de un juego en el que cada persona dona un libro. Sin importar quién ni cómo se ganan los libros, si hay 100 personas participando, hay 100 libros en juego. Si hay 800 personas, hay 800 libros. Siempre habrá tantos libros en juego como personas participando, ya que cada una "donó" un libro para ingresar, y los libros no se reproducen (al igual que el dinero en este tipo de sistemas).

Entonces, ¿cómo sería posible que todos los participantes tengan más de un libro? La promesa en este tipo de juegos es multiplicar la inversión, por ejemplo, por 8. ¿Cómo pueden estar jugando mil personas y que cada una reciba 8 libros, si hay mil libros en juego? Si alguna tiene 8 libros, entonces hay 7 personas que se quedaron sin el suyo. No existe otra forma, pues en el camino no se generaron libros, solamente pasaron de mano en mano.

Para solucionar esto, hay que agregar más gente al juego para que done un libro cada una. Pero no importa cuántas veces hagamos esto, porque siempre habrá la misma cantidad de libros que de personas. El problema es que el sistema tarde o temprano se cae y, cuando esto ocurre, por cada persona que gana hay 7 que pierden. Esto significa que las probabilidades de perder son altas, ya que el 87.5 % de los participantes pierden. Por otra parte, en caso de ganar, nos estaríamos quedando con los libros de otros. Resumiendo: o somos estafados, o somos estafadores.

Todo lo anterior no es advertido cuando se intenta atraer a alguien a participar en uno de estos sistemas. Quizás la persona que invita a ingresar tampoco lo sabe pero, en algún nivel superior, se sabe. El discurso habla de “empoderamiento”, “solidaridad” y beneficios económicos muy tentadores. Pero nunca se advierte sobre el alto riesgo de perder lo invertido (tampoco se utiliza la palabra “inversión” sino “regalo”, ya que el lenguaje es la clave de este engaño). A diferencia de otros juegos de apuestas, en los que también solemos tener pocas chances de ganar, tampoco se menciona que pertenecer al grupo de quienes no pierden en este sistema equivale a quedarnos con plata ajena.

Si cada persona que ingresa a un sistema de este tipo estuviera al tanto de todo lo anterior, así como del orden de llegada al juego (mientras más flores haya en funcionamiento más difícil es conseguir gente), entonces no se hablaría de estafa.

Sistemas piramidales.

El telar de la abundancia es una adaptación de lo que se conoce en Economía como *sistema o estafa piramidal*: la gente que se encuentra en la parte inferior de la pirámide pone dinero, para que lo gane la que se encuentra en la cima. Muchas empresas funcionan bajo este mecanismo utilizando lemas del estilo “sé tu propio jefe”. En este tipo de trabajos el producto que se ofrece es solamente un pretexto. Cuando se habla de fraude se cuestiona el sistema de fondo, y no la eficiencia del producto. En esta metodología de trabajo el ingreso principal no proviene de la venta del producto en cuestión, sino de la gente que se capta para ingresar al sistema. De hecho, en muchos casos, la persona que invita a participar no puede explicar en detalle de qué se trata el trabajo al cual está invitando a ingresar, por lo que organiza una reunión para contar en persona a todo un grupo de gente.

Para ingresar es necesario realizar una inversión de dinero en productos y, luego, captar a un determinado número de personas para que también se incorporen. Digamos, 6 personas. ¿Cuántas veces puede hacerse eso? Supongamos que todo se inicia en la “generación 0” con una persona que invita a otras 6. Cada una de estas 6 debe ingresar a 6 personas más al sistema, es decir, 36 miembros conforman la segunda generación de incorporaciones. Luego, cada uno de estos 36 miembros debe ingresar a 6, dando un total de $36 \cdot 6 = 216$ nuevos integrantes en la generación número 3. Y así, siguiendo de esta forma, la generación n se compone por 6^n integrantes. Luego de 13 generaciones, la cantidad total de miembros del sistema será igual a

$$1 + 6 + 6^2 + 6^3 + \cdots + 6^{13}.$$

Lo anterior es una suma geométrica como las presentadas anteriormente, con $a = 5$ y $n = 13$, por lo que su resultado es

$$\frac{6^{14} - 1}{6 - 1} = \frac{78\,364\,164\,095}{5} = 15\,672\,832\,819,$$

que es más del doble de la población mundial. Es decir, el ciclo no llegará a cumplirse 13 veces si ninguna persona reingresa. Los productos tampoco podrán venderse, porque cada uno dispone de la compra inicial para sí mismo. Por este motivo, los artículos de estas empresas se conocen como "productos de garage", ya que muchos de los participantes terminarán con los productos guardados, habiendo perdido dinero. Lo anterior explica por qué estos sistemas son llamados *estafas piramidales*.

§5. Problemas de dinero: interés compuesto

Supongamos que alguien nos pide prestado dinero, digamos 1 000 pesos, y nos dice que nos los devolverá luego de un mes, con un 50 % de interés. Es decir, luego de un mes nos devuelve 1 500 pesos. Pero en ese momento, en lugar de devolvernos el dinero, nos pide que le prestemos ese nuevo monto por un mes más, y nos dice que lo devolverá aplicando el mismo interés. Entonces, ahora debemos sumarle a los 1 500 pesos el 50 % correspondiente al interés. ¿Cuánto nos devolverá luego de 2 meses según este mecanismo de intereses? ¿Y si pasan 8 meses bajo el mismo proceso?

Como siempre, para visualizar mejor el proceso, organizaremos los datos en una tabla.

Antes de eso, es importante comprender lo siguiente: el símbolo % equivale a multiplicar por el factor 0.01 (que es lo mismo que dividir por 100). Así, "cincuenta por ciento" se representa como 50 % y significa multiplicar por 0.5, ya que $50 \cdot 0.01 = 0.5$. Entonces, para obtener el 50 % de 1 000 se multiplica

$$0.5 \cdot 1\,000 = 500.$$

Luego, para *agregarle* el interés al monto inicial hacemos:

$$\underbrace{1\,000}_{\text{monto inicial}} + \underbrace{0.5 \cdot 1\,000}_{\text{interés}} = 1.5 \cdot 1\,000.$$

En término generales, *agregarle* a una cantidad cualquiera el 50 % equivale a **multiplicar por 1.5** dicha cantidad. Entonces, para elaborar la tabla, cada mes deberemos multiplicar por 1.5 el monto obtenido en el mes anterior. El resultado se muestra a continuación.

Mes	Dinero a recibir al final de cada mes
1	$1.5 \cdot 1\,000$
2	$1.5\,(1.5 \cdot 1\,000) = (1.5)^2 \cdot 1\,000$
3	$1.5\,((1.5)^2 \cdot 1\,000) = (1.5)^3 \cdot 1\,000$
4	$1.5\,((1.5)^3 \cdot 1\,000) = (1.5)^4 \cdot 1\,000$

Así, de modo general, vemos que al final del mes número n el dinero a recibir será

$$\boxed{(1.5)^n \cdot 1\,000.}$$

Mediante esta fórmula podemos responder las preguntas iniciales, reemplazando n por 2 y por 8, respectivamente. Así, luego de 2 meses de repetir este procedimiento nos deberá devolver

$$(1.5)^2 \cdot 1\,000 = \boxed{2\,250}$$

pesos, mientras que después de 8 meses serán

$$(1.5)^8 \cdot 1\,000 \approx \boxed{25\,629,}$$

donde el símbolo $\approx$ significa que se ha realizado una aproximación.

En el ejemplo anterior 1.5 es lo que se conoce como “base” de la potencia. En este caso no es un número entero, como cuando algo se duplica o triplica mes a mes, pero es un número mayor que 1, lo que hace que el monto aumente exponencialmente de todas formas.

El tipo de interés trabajado previamente es lo que se llama *interés compuesto*, y representa la acumulación de intereses que se generan en un determinado tiempo, por un capital inicial según la tasa de interés y la cantidad de períodos. A diferencia del interés simple, en el que la ganancia no se acumula hasta terminar el proceso, en el compuesto los intereses que se obtienen al final de cada período de inversión se añaden al capital inicial, es decir, se capitalizan, generando interés en el siguiente período de tiempo.

El interés compuesto se aplica en un plazo fijo que se renueva, por ejemplo, mes a mes. Por supuesto la tasa no será del 50 %, sino que suele ser bastante menor. Supongamos que un banco paga un interés del 3 % por cada mes que se deje depositado una cantidad de dinero. Estamos suponiendo un interés compuesto que se capitaliza mensualmente, como en el ejemplo previo. Entonces, con un monto inicial de \$20 000, luego de 4 meses el capital (en pesos) obtenido al aplicar interés compuesto será igual a

$$(1.03)^4 \cdot 20\,000 \approx 22\,510.$$

Agradecimientos. Se agradece a Estefanía Dalmasso y al editor por las observaciones realizadas. Un especial agradecimiento para el revisor/revisora de este artículo, por su minuciosa lectura y sus detalladas sugerencias y comentarios que, sin dudas, mejoraron la calidad del trabajo.

Bibliografía

Amster, P. (2020). La matemática de las epidemias. *Rev. Educ. Mat*, *35*(2), 5–20.

Pinasco, J. P. (2020). Las simulaciones: otras herramientas para entender una epidemia. *Rev. Educ. Mat*, *35*(2), 35–50.

Marilina Carena
CONICET - Facultad de Ingeniería Química (UNL)
(✉) *marilcarena@gmail.com*

Recibido: *13 de julio de 2020.*
Aceptado: *2 de noviembre de 2020.*
Publicado en línea: *7 de diciemrbe de 2020.*