Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio....

Las soluciones se encuentran en la página siguiente.

Problema 1. MATCH POINT. Nuestro querido Juan Martín Del Potro se encuentra en un momento crucial: ¡tiene un *match point* a favor en la final de Wimbledon! ¡Y tiene su saque! Pero lamentablemente en el punto anterior se lesionó seriamente, así que este será el último punto del partido. Si lo gana, se consagrará campeón, si lo pierde, abandonará el partido. Solo él lo sabe. Federer, al frente, ni lo sospecha. La lesión no le afecta para sacar. Delpo piensa qué saque le conviene hacer. Repasa mentalmente las estadísticas que estudió con su entrenador (¡ayudados por un profesor de matemática!) y recuerda que su saque "fulminante" siempre gana, su rival jamás logra responderlo, pero solo consigue hacerlo bien una quinta parte de las veces que lo intenta. Su saque "tremendo" es ganador la mitad de las veces, y logra hacerlo bien en la mitad de sus intentos. Por último, su saque "normal" entra el 99 por ciento de las veces pero solo gana de saque menos del 20 % de las veces que entra. ¿Qué le conviene hacer a Delpo con sus dos saques? ¿Cuál es la probabilidad de que gane, usando la mejor estrategia?

Nota: ya es interesante pensar el problema en el caso que a Delpo le quedara solo un saque. ¿Cuál es la respuesta en tal caso?

Problema 2. PILETAS. ¡Llegó el calor y la pileta del club está lista para ser llenada! El pronóstico indica más de 33 grados para el día de la primavera. ¡Los estudiantes esperan ansiosamente poder celebrarlo con la pileta llena! Falta muy poquito. Al abrir la canilla de la pileta, alguien se acuerda que con ese caudal de agua tardará 6 días en llenarse. ¡Tremendo! Pero recuerdan que años anteriores pidieron ayuda a los dos predios colindantes al club, que por suerte se muestran bien dispuestos a ayudar y tienen mejor caudal: si en lugar de la canilla se usara solo la manguera de uno de los vecinos se tardarían 2 días y si se usara solo la manguera del otro vecino serían tres días. Consiguen poner las tres entradas de agua simultáneamente, sin perder caudal. La pregunta es ¿cuánto tardará en llenarse la pileta?

Vale la pena pensar el problema en general: Si tuviéramos tres fuentes de agua, las cuales tardan cada una a, b y c días (o puede ser cualquier unidad de tiempo) respectivamente en llenar cierta pileta en forma individual, entonces ¿cuánto tardará en llenarse la pileta si utilizamos las tres al mismo tiempo?

Problema 3. Reconstrucción de figuras. Se dibuja un triángulo, luego se marcan m_1, m_2 y m_3, los tres puntos medios de sus lados. Ahora se borra el triángulo dejando solo los tres puntos medios. ¿Se puede reconstruir el triángulo a partir de m_1, m_2 y m_3? Mostrar cómo.

Ahora hacemos lo mismo con un cuadrilátero, marcando los cuatro puntos medios de sus lados, m_1, m_2, m_3 y m_4. Mostrar con ejemplos que hay muchos cuadriláteros con estos cuatro puntos medios de sus lados.

¿Qué sucede en el caso de un pentágono?

¿Y en general? ¿Para qué valores de n natural, $n \geq 3$, los puntos medios de los lados de un polígono de n lados determinan completamente el polígono?

Otro problema donde se puede lograr la reconstrucción, es el siguiente: dado un triángulo escaleno, se traza la circunferencia que pasa por sus vértices, se elige uno de ellos, llamémoslo v, y se trazan: la altura desde v, la mediatriz del lado opuesto a v y la mediana desde v, se las prolonga de modo que corten a la circunferencia en los puntos p, q y r respectivamente. Ahora borramos todo menos los tres puntos p, q y r. Dar la forma de reconstruir el triángulo original.

Problema 4. Pensemos en un reloj de agujas, una que marca las horas y la otra los minutos. A lo largo de todo un día, ¿cuántas veces se cruzan estas agujas?

¿Y cuántas veces en un día forman un ángulo recto?

SOLUCIONES

✓ *Solución 1.* El caso de un solo saque es más sencillo: si hace el saque tremendo (T), entonces tiene $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ de probabilidades de ganar, mientras que con el saque fulminante (F), tiene solo $\frac{1}{5}$, y con el normal aun menos. Así que le convendría el tremendo (T).

Veamos el caso general, con dos saques. Notemos que lo importante será decidir qué hacer en el primer saque, puesto que si este no entra, se pasará al segundo saque, entonces queda un solo saque por hacer, caso ya analizado, donde conviene hacer el tremendo (T).

Si el primer saque es (T), tiene $\frac{1}{4}$ de probabilidad de ganar en esa instancia. Si esto no ocurre, con el segundo saque (T) la probabilidad sería $(1 - \frac{1}{2}) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Sumando ambas tenemos $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0,375$, es decir hay $37,5$ por ciento de ganar con (T)+(T).

Si en cambio en el primero hace el fulminante (F), tiene $\frac{1}{5}$ de chances de ganar ahí mismo. Si no entra, pasa a su 2do saque, esto ocurre con probabilidad $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Con el segundo saque (T), tendrá una probabilidad de $\frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$ de ganar. Sumando ambas, se obtiene $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ con la estrategia (F)+(T), es decir, el 40 por ciento.

El saque ”normal” arroja números menos convenientes en esta instancia crucial. Así que comparando, le conviene hacer su primer saque ”fulminante”, y si no entra, hacer en el segundo saque ”tremendo”.

✓ *Solución 2.* Rta: en un día. Justificación: Se puede pensar que usando las tres fuentes de agua, en 6 días, llenaríamos: 1 pileta con la canilla propia, 3 piletas con la manguera de un vecino y 2 piletas con la manguera del otro vecino. O sea que en 6 días llenaríamos 6 piletas. Por lo tanto, en un día llenamos una pileta.

Para el caso general, al sumar las tres fuentes, llenan $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ piletas por día. Luego, para llenar una pileta, se tardará $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^{-1}$ días (o la unidad de tiempo elegida).

✓ *Solución 3.* Los segmentos que unen dos puntos medios de los lados de un triángulo son bases medias, por lo que cada uno de ellos es paralelo a un lado del triángulo y de la mitad de su largo. Así, es claro cómo se puede trazar el triángulo original.

En general, dado un polígono de n lados, se marcan los n puntos medios en forma ordenada $m_1, m_2, \ldots, m_n$, se borran los n lados del polígono dejando solo en la hoja (o pizarrón) los puntos medios. Ahora consideramos las simetrías centrales S_{m_i}, con centros en m_i, y notamos que la composición $S_{m_1} \circ S_{m_2} \circ \cdots \circ S_{m_n}$ es una transformación rígida del plano que deja fijo un vértice del polígono, v_n. Si n es impar, esta transformación rígida es nuevamente una simetría central, determinada por los puntos m_i, de modo que al conocerla, sabemos donde marcar el vértice que queda fijo, y por lo tanto recuperamos en forma unívoca el polígono original, cuyos vértices son v_n, $v_{n-1} = S_{m_n}(v_n)$, $v_{n-2} = \left(S_{m_{n-1}} \circ S_{m_n}\right)(v_n)$ y así sucesivamente hasta $v_1 = (S_{m_2} \circ \cdots \circ S_{m_n})(v_n)$ y se cierra en $v_n = (S_{m_1} \circ S_{m_2} \circ \cdots \circ S_{m_n})(v_n)$.

En cambio, si n es par, la composición de simetrías centrales es una traslación, que al tener un punto fijo, es necesariamente la identidad. De modo que hacer esta composición, muestra que con cualquier punto p en el plano que comencemos como candidato para vértice de nuestro polígono, obtendremos al ir aplicando las composiciones de nuestras simetrías centrales los n vértices de un polígono (solo que si se comienza en ciertas regiones, será un polígono no simpleo).

✓ *Solución 4.* Se cruzan 22 veces . Hay que contar notando que cada superposición de agujas se produce no cada hora, sino cada 1 hora y 5 minutos aproximadamente. De modo que cada doce horas se producen 11 superposiciones (a las 12 en punto, a la 1 y 5 (y 27 segundos) a las 2 y 10 (casi 2 y 11) a las 3 y 16, a las 4:21, 5:27, 6:32, 7:38, 8:43, 9:49, 10:54 y luego se juntan de nuevo a las 12 en punto.

Forman ángulo recto 44 veces. Se puede contar como recién, o se puede pensar simplemente que el ángulo recto se produce aproximadamente unos 15 minutos antes y unos 15 minutos despues de cada vez que se superponen las agujas, por lo tanto, dos veces por cada superposición. Entonces $2 \times 22 = 44$.

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

$$\{a_n\}: \quad 1, 10, 27, 52, 85, 126, \ldots$$

$$\{b_n\}: \quad 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, \ldots$$

$$\{c_n\}: \quad 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, 7, 9, 3, 2, 3, \ldots$$

$$\{d_n\}: \quad 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 17, 18, 20, 23, 24, 27, 29, 30, 33, \ldots$$

Ayuda para la última: pensar en otro sistema de numeración distinto del decimal.

Podés encontrar las soluciones en la página 60.