Pero hasta que llegue ese día, continuaré siguiendo a mi llamado. Tú, sin embargo, dirígete a Teodoro.

SOLUCIONES

Problema (Vol. 3 No. 2).

Determine todas las horas del día en que coinciden las agujas del reloj (por ejemplo a las 12 horas).

Solución: (M.I. Viggiani Rocha, Inst. de Matemática, F.C.E.T. Univ. Nac. Tucumán).

Observamos que las agujas coincidirán a intervalos de tiempo iguales. Denotemos

ω_h (resp. ω_m) = velocidad angular de la aguja horaria, (resp. minutero).

α_h (resp. α_m) = ángulo recorrido por la aguja horaria (resp. minutero).

Se tiene que $\omega_h = \dfrac{2\pi}{720}$ rad/min, $\omega_m = \dfrac{2\pi}{60}$ rad/min y en cada instante t, $\alpha_h = \omega_h.t$, $\alpha_m = \omega_m.t$. La próxima coincidencia después de las 12 de la noche (0 hs.) ocurrirá en

$\alpha_h = x$, $\alpha_m = (2\pi+x)$. Luego $t = (2\pi+x)\dfrac{30}{\pi} = x\,.\dfrac{360}{\pi}$

o sea, $x = \dfrac{2\pi}{11}$.

Luego $t = \dfrac{720}{11}$ min = 1 h 5 min 27.27 seg.

Es decir el lapso entre una coincidencia y otra es 1 hora 5 min 27,27 seg. Entre las 0 y las 12 hs, las horas en que hay coincidencia de las agujas son:

1 h	5 min	27,27 seg.	2 hs	10 min	54,54 seg
3 hs	16 min	21,81 seg.	4 hs	21 min	49,09 seg
5 hs	27 min	16,36 seg	6 hs	32 min	43,63 seg
7 hs	38 min	20,90 seg	8 hs	43 min	58,18 seg
9 hs	49 min	25,45 seg	10 hs	54 min	52,72 seg
12 hs.					

------o------

Problema (vol. 3 No. 2).

Un hombre cobra un cheque en un banco. En la calle el hombre nota que el cajero ha intercambiado el valor de los pesos con el de los centavos. Luego de gastar 5 centavos el hombre observa que tiene exactamente el doble del valor original del cheque. Cuál era éste?

Solución (M.J. Viggiani Rocha, F.C.E.T., U.N.Tucumán)

Cheque = x pesos + y centavos. Se tiene que

$$y + \frac{x}{100} - \frac{5}{100} = 2\left(x + \frac{y}{100}\right) \quad \text{Luego } 98\,y - 199\,x = 5$$

El máximo común divisor de 98 y 199 es 1, de donde lo expresaré como combinación lineal entera de estos números: $(-67).98 + 33.199 = 1$, por lo tanto

$- 335.98 - 199.(-165) = 5$, de donde

$$y = -335 + k(-199)$$

$$x = -165 - k.98, \ k \in \mathbb{Z}.$$ Recordando que x e y $\in [0,99]$, determinaré los posibles valores de "k" y en consecuencia de "x" y de "y".

$$0 \leq x \leq 99$$

$$0 \leq -165 - 98\,k \leq 99$$

$$165 \leq -98\,k \leq 264$$

$$-\frac{264}{98} \leq k \leq \frac{165}{98}$$ de donde $-2,69 \leq k \leq -1,68$ y el único valor entero en este intervalo es -2 $k = -2 \Rightarrow y = 63$, $x = 31$. Luego el valor del cheque es \$ 31.63.

-----o-----

Problema (Vol. 2 No. 1).

Pruebe que si $a + b + c = 1$ entonces $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Solución: (M.J. Viggiani Rocha, F.C.E.T. U.N. Tucumán)

Se tiene: $(a+b+c)^2 = 1 = (a+b+c)^2 =$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

(pues $2\,ab \leq a^2 + b^2$ y análogamente para 2ac y 2bc).

SOLUCIONES

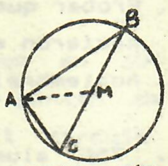
<u>Problema</u> (Vol. 2 No. 3).

Pruebe que en un triángulo rectángulo, la mediana trazada de un vértice a la hipotenusa mide la mitad de lo que la hipotenusa. Dé una demostración usando un conocido teorema sobre el circulo.

<u>Solución</u>: (M.J. Viggiani Rocha, F.C.E.T. U.N.Tucumán)

$\overline{BC}$= hip = 2r   2r = diámetro. $\overline{AM}$ = long mediana

$\overline{AM}$ = r de donde hip = 2 $\overline{AM}$



• Teorema: Todo ángulo inscripto en un arco de circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abarca.

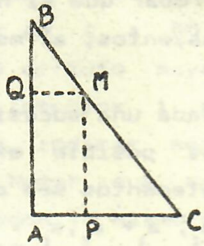
• Corolario: Todo ángulo inscripto en una semicircunferencia es recto.

Una solución alternativa: en la figura,

(1) Los triángulos QMB y PCM son iguales (son semejantes y BM = MC).

(2) Por (1), BQ = MQ = QA.

(3) Por (2) los triángulos BQM y AQM son iguales. Luego AM = BM.



ANUNCIO

En Agosto de 1990, organizado por la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba, se llevará a cabo el X Seminario Nacional de Matemática. El Seminario está principalmente dirigido a jóvenes licenciados y a estudiantes avanzados de la licenciatura en Matemática. Se dictarán 5 ó 6 minicursos a distintos niveles y varias conferencias especializadas. Información precisa se dará en futuros anuncios.

SOLUCIONES

PROBLEMA: Construir con regla y compás un triángulo isósceles del que se conoce la altura y la suma de su base y de uno de los lados restantes.

Este problema fue mencionado por el Dr. Alberto P. Calderón en su conferencia Rey Pastor ofrecida durante la XXXVI Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. La siguiente solución fue enviada por la Profesora Dolores de Saravia de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta.

Usaremos letras minúsculas para designar puntos, ya que es lo que habitualmente se hace hoy en día en los cursos secundarios. En su conferencia, el Dr. Calderón muestra que si el triángulo buscado el el $a\hat{b}c$ de base $\overline{ab}$, es útil construir primero el triángulo isósceles $a'b'c'$ de base $\overline{a'b'}$ igual a la suma dada de base y lado, y con igual altura que la dada; y deja planteado que sólo hace falta luego, determinar el punto a del segmento $\overline{a'b'}$ tal que su distancia a c es el doble de su distancia a a' (escribiremos $2\overline{aa'} \equiv \overline{ac}$); es de este último problema del que nos ocuparemos ahora.

Veamos algunas consecuencias de $2\overline{aa'} \equiv \overline{ac}$ que nos permitirán obtener la construcción pedida. Sea B la bisectriz de los ángulos adyacentes al $a'\hat{a}c$; y σ la simetría axial de eje B. Sean $p = \sigma(a')$ y $q = \sigma(c)$; naturalmente $a = \sigma(a)$. Por ser B bisectriz de $c\hat{a}b'$, tendremos que $q \in ab'$, es decir que a', a y q están alineados; e igualmente, p, a y c están alineados. Además $a'p \perp B$ y $cq \perp B$; de donde $a'p \parallel cq$. por lo tanto, los triángulos $a'\hat{a}p$ y $q\hat{a}c$ son semejantes, y como $2\overline{a'a} \equiv \overline{ac} \equiv \overline{aq} \equiv \overline{qa}$ tenemos que $2\overline{a'p} \equiv \overline{qc}$. Entonces $\overline{a'c}$ y $\overline{pq}$, correspondientes en la simetría no pueden ser paralelas; deberán concurrir en un punto del eje de la simetría, llamémoslo f; se cumplirá $\overline{fc} \equiv \overline{fq}$. Ahora, los triángulos $a'\hat{f}p$ y $c\hat{f}q$ son semejantes y como $2\overline{a'p} \equiv \overline{cq}$ también será $2\overline{fa'} \equiv \overline{fc}$

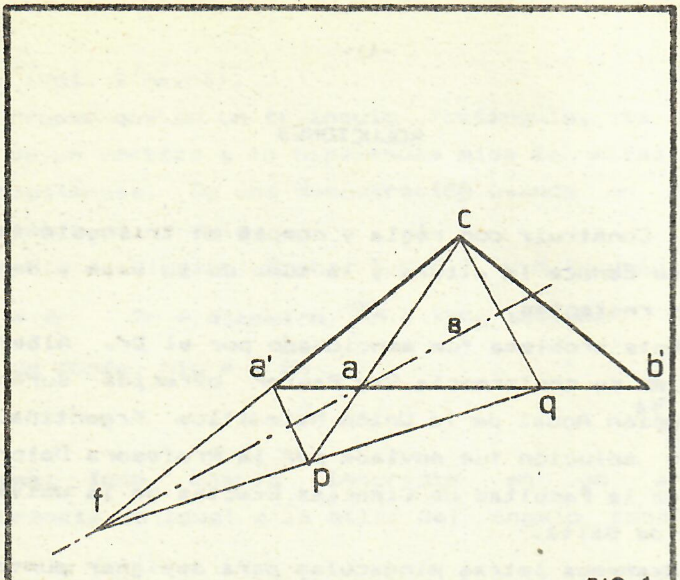


FIG 1

Todo lo anterior nos permite utilizar regla y compás para obtener, dados a',b',c el único punto posible para a.

1) Determinamos f alineado con a' y c, tal que a' sea punto medio de $\overline{fc}$.

2) Determinamos q en la semirrecta de origen a' que contiene ab' y tal que $\overline{fq} \equiv \overline{fc}$.

3) Determinamos p punto medio de $\overline{fq}$.

4) Cortamos la recta $\overline{pc}$ con la recta $\overline{a'b'}$ para obtener a.

Para que realmente a sea solución del problema original deberá ocurrir que el ángulo $c\hat{a}b'$ sea agudo; esto sucederá (puede demostrarse) si y solo si la base $\overline{a'b'}$ es mayor que la altura del triángulo $a'\hat{b}'c'$ desde c; lo cual es natural ya que $\overline{a'b'}$ es la suma de la base ab del triángulo abc más uno de sus lados $\overline{ca}$; y $\overline{ca}$ debe ser mayor que la altura desde c del triángulo $a\hat{b}c$.

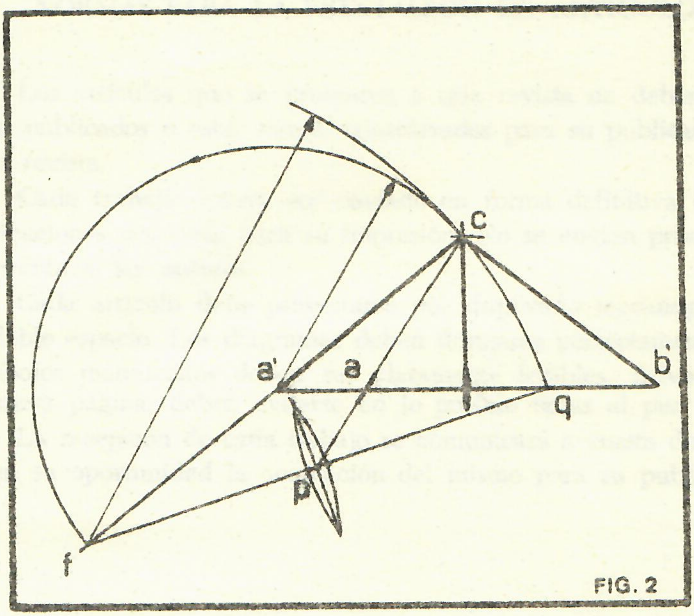


FIG. 2