EL PRINCIPIO DE LOS CASILLEROS

Enzo R. Gentile

Este principio, llamado también: "Pigeonhole Principle". "Dirichlet Schubfachar", "Métode des Tiroirs", establece que, <u>si n objetos han de ser colocados en m casillas y si n es mayor que m, entonces al menos dos objetos iran a una misma casilla</u>. Este principio se usa, inadvertidamente, en muchos razonamientos matemáticos. Quien lo usó explicitamente parece haber sido Dirichlet en la demostración de resultados de finitud en teoría algebraica de números

Veamos algunos ejemplos para ilustrar su aplicación.

1.- Sean $A_1,\dots, A_8$ números enteros. Afirmamos que hay dos, al menos, que tienen el mismo resto en la división por 7. En efecto, tomamos 7 casilleros correspondientes a los distintos restos en la división por 7. Coloquemos cada número en la casilla que corresponda a su resto en la división por 7. Claramente habrá dos, al menos, que caen en la misma casilla. Esto significa que tienen el mismo resto en la división por 7.

2.- Si se requiere de 11 personas exhibir su documento de identidad habrá dos, al menos, cuyo número de documento tiene la misma terminación. Si en cambio queremos que en un cierto grupo de personas y respecto del número de documento, haya dos con las dos últimas cifras coincidentes, el mínimo número para que esto ocurra con plena certeza, es 101.

3.- En una clase de 30 alumnos hay, por el mismo Principio, al menos dos que nacieron el mismo día de la semana Podemos mejorar este 2? Si, hay con certeza 5 personas que nacieron el mismo día de la semana. En efecto si no hubiera 5 personas, el número máximo sería 4, pero 4 x 7 es menor que 30. El máximo no puede ser 4, lo cual significa que 5, al menos, nacieron el mismo día. <u>Pregunta</u>: Cuántos, al menos, nacieron el mismo mes del año?.

4.- La cantidad de cabellos que puede tener una persona es $\leq$ 300.000. Si la población de una ciudad es 9.000.000 de habitantes, hay por lo menos 30 personas que poseen la misma cantidad de cabellos!.

5.- Sea el conjunto de números 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10. Nos preguntamos cuál es el mínimo número que se debe extraer, de manera tal que contenga al menos un par cuya suma sea 11. Escribamos los pares que suman 11:

|1,10| |2,9| |3,8| |4,7| |5,6|

Si tomamos 6 elementos y colocamos cada uno en el par en que figura, es claro que dos elementos caerán en el mismo par y esos sumarán 11. Entonces 6 es el número mínimo. Por ejemplo si elegimos los números 1,2,3,4,5, ningún par suma 11. Dejamos a cargo del lector probar que si se tiene la progresión aritmética 1,4,7,10,..., 100 entonces todo subconjunto que tenga al menos 20 elementos contiene dos números cuya suma es 104.

6. A una reunión asisten 30 personas. Cada persona estrecha manos con sus conocidos. Eventualmente estrecha mano con ninguno, si no conoce a nadie (algo así como un colado). Se afirma que hay dos personas, al menos, que estrechan el mismo numero de manos.

En otros términos, hay dos personas al menos, que tienen el mismo número de personas conocidas. Para demostrar la afirmación asignaremos a cada persona el número de conocidos presentes.

Los valores posibles son:

$$0,1,2,\ldots, 29$$

Observemos que si una persona A no conoce a nadie, o sea, el valor asignado es el 0, entonces ninguna persona B puede conocer a 29 personas!. Por lo tanto el rango de valores es 1,2,..., 29 ó 0,1,..., 28, es decir 29 valores en total. Como se trata de 30 personas, por el Principio de los Casilleros., hay dos personas al menos, que tienen el mismo número de conocidos.

7. Consideremos 5 números naturales compuestos menores de 120. Afirmamos que dos al menos, no son coprimos. Es decir, existe un número primo que divide a ambos.

En efecto, es bien sabido de la Criba de Eratóstenes, que todo número compuesto menor que n es divisible por un primo $\leq \sqrt{n}$. Esto lo suponemos conocido. En nuestro problema, todo número compuesto es divisible por un primo $\leq \sqrt{120} \simeq 10{,}95$.

Por lo tanto es divisible por algunos de los primos 2,3,5,7. Tratándose de 5 números, dos de ellos son múltiplos del mismo primo!.

Es claro que las mismas ideas muestran que de

7 números compuestos < 200,

8 números compuestos < 360,

..., etc.

hay dos, al menos, que no son coprimos.

8. Sea C un conjunto de diez números naturales menores que 100. Probemos que existen dos subconjuntos disjuntos en C tales que la suma de sus elementos da el mismo valor. En simbolos, existen subconjuntos

$$X,\ Y \subset C,\ X \cap Y = \phi \qquad \sum_{x \in X} x = \sum_{y \in Y} y$$

Sea, en efecto, para cada subconjunto no vacío $X \subset C$, $v(X)$ el número natural

$$v(X) = \sum_{x \in X} x$$

suma de los elementos de x.

Es claro que, cualquiera sea $X \subset C$,

$$v(X) \leq 90 + 91 + \ldots + 99 = 945.$$

Excluyendo $X = \phi$ y $X = C$ hay en C, $2^{10} - 2 = 1022 > 945$ se sigue que existen dos subconjuntos distintos $X, Y \subset C$ tales que $v(X) = v(Y)$.

Los conjuntos X, Y no tienen porqué ser disjuntos, pero si cancelamos en las sumas $v(X)$, $v(Y)$ los sumandos comunes, obtenemos subconjuntos disjuntos X', Y' tales que $v(X') = v(Y')$.

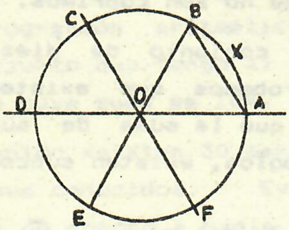
<u>Pregunta</u>: Es cierta la afirmación si C tiene 9 elementos?

9. Veamos una aplicación geométrica, una pequeña

digresión viene a cuenta. El Principio de los Casilleros es un enunciado obvio, esto está claro. Sin embargo lo que no es obvio y es el hecho fundamental vinculado a este principio es, <u>como derivar un problema dado a un problema de casilleros</u>!. La siguiente aplicación es elocuente en este sentido.

Se tiene un círculo de radio 1. Señalaremos en el mismo 7 puntos con la propiedad que la distancia entre dos cualesquiera es mayor o igual a 1. Cuáles son las posibles distribuciones?

Dividamos la circunferencia en seis partes iguales. Esto lo hacemos construyendo el exágono regular A B C D E F



Entonces si 7 puntos distintos yacen en el círculo, 2 al menos caen en el mismo sector. Las posibilidades son:

a. Vértices A y B ó

b. Centro O y punto X en la circunferencia.

En el caso a. los vértices restantes deben yacer en el semicírculo opuesto (al que contiene A y B). No puede haber puntos en el interior de los triángulos OCD, ODE, DEF, OFA. Repitiendo las consideraciones precedentes nos permite concluir que la distribución posible es en los vértices C,D,E,F y <u>el centro O.</u>

La conclusión final es la siguiente: <u>Dados 7 puntos en un círculo de radio 1 con la propiedad que la distancia entre dos puntos no es menor que 1, entonces un punto de los dados es el centro del círculo</u>!.

Estamos de acuerdo que este resultado no era evidente "a priori", pero lo es apenas dividimos al círculo en <u>6</u> partes iguales.

Dejamos a cargo del lector analizar otro ejemplo geométrico a saber: si en un cuadrado de lado 1, fijamos 5 puntos cualesquiera entonces 2 al menos yacen a distancia menor o igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10. Sean $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_r \leq M$

$0 < q_1 < q_2 < \ldots < q_s \leq M$, sucesiones de números enteros.

Supongamos que $r+s>M$ entonces para algunos índices i, j ocurre que $p_i - g_j$. En efecto, es como poner r+s palomas en M casillas. Habrá 2, al menos, que van a la misma casilla, pero como los p son distintos entre sí, al igual que los q_j, deberá ocurrir que $p_i = q_j$ para índices i, j convenientes.

Una aplicación interesante es la siguiente:

Supongamos que un médico receta a una persona la ingestión de un cierto medicamento consistente en 48 píldoras iguales; las mismas deben ser tomadas según las siguientes reglas:

I. Deben tomarse durante 30 días seguidos,

II. Cada día debe tomarse al menos 1,

III. Respetando I y II no se fija el número máximo de píldoras a tomar en cada día.

Por ejemplo: 1, 1, ..., 1, 19 (29 unos) es posible. Se afirma que si $1 \leq k \leq 11$ entonces hay intervalos de días consecutivos en que se ingieren exactamente k píldoras. En el ejemplo precedente esto es claro, en el primero y segundo se ingieren exactamente 2, en el primero, segundo y tercero se ingieren 3; entre el 15 y el 30 se ingieren 35 píldoras. En este ejemplo cualquier $1 \leq k \leq 48$ es posible.

No se afirma que la cota 11 sea la mejor, y no lo es, pero a los fines de la demostración que sigue, utilizando el principio de los casilleros, es una restricción obvia.

Sea p, i = 1,2, ..., 30 la cantidad total de píldoras que se ingirieron hasta el día i, inclusive. Se tiene

$$0 < p_1 < p_2 < \ldots . < p_{30} = 48.$$

Por lo tanto, si k satisface $0 < k \leq 11$, es $0 < p_1 + k \leq 11$, es $0 < p_1 + k < p_2 + k < \ldots < p_{30} + k \leq 59$.

Por las consideraciones hechas más arriba (con $M = 59$) se sigue que

$$p_i = p_j + k$$

o sea

$p_i - p_j = k$, luego $j < i$, lo cual dice precisamente que entre el día $j + 1$-ésimo y el i-ésimo se consumieron exactamente k píldoras.

11. Consideremos el conjunto de números naturales de 1 a 100. Sea A un subconjunto que contiene no menos de 51 elementos. <u>Se afirma que A contiene dos números distintos tales que uno es múltiplo del otro.</u>

Notar que si A contiene exactamente 50 elementos el resultado no es válido en general, por ejemplo en

$$A = \{50, 51, \ldots, 99\}$$

ningún número es múltiplo de otro distinto a él. Para demostrar la afirmación consideremos los 50 subconjuntos siguientes, obtenidos a partir de cada k, $51 \leq k \leq 100$ y tomando los sucesivos divisores con mínimo cociente 1.

Por ejemplo:

$A_1 = 100, 50, 25, 5, 1$

$A_2 = 99, 33, 11, 1$

$A_3 = 98, 49, 7, 1$

$A_4 = 97, 1$

$A_{50} = 51, 17, 1$

Afirmemos que todo entero m, $1 \leq m \leq 100$ pertenece a algún A_i. Si $m \geq 51$, está claro. Si $m < 51$, entonces m pertenece a $A_{2^i.m}$, si $2^i m \leq 100$, $2^{i+1}.m > 100$.

Por ejemplo, 34 pertenece a A_{68},

8 pertenece a A_{64}, ...

Entonces cada elemento de A pertenece a (al menos) uno de los conjuntos A_i. Como A tiene 51 elementos, dos elementos distintos pertenecen al mismo conjunto y entonces están en la relación de divisibilidad.

12. <u>Aproximación de números reales por números racionales</u>.

Se trata de resolver el siguiente problema: dado un número real r, encontrar un número racional $\frac{h}{k}$ que constituye una "buena" aproximación de r pero tal que k no sea muy grande!

Más precisamente podríamos decir: dado $n_o \varepsilon N$, encontrar una fracción $\frac{h}{k}$ irreducible con $1 \leq k < n_o$, $|r - \frac{h}{k}| < \frac{1}{n_o}$.

Podemos mejorar la desigualdad escribiendo

$$|r - \frac{h}{k}| < \frac{1}{n_o^2} < \frac{1}{n_o}.$$

y entonces el problema es hallar enteros positivos h, k tales que $1 \leq k < n_o$ y $|kr - h| < \frac{1}{n_o}$

Veamos como esto puede lograrse vía el Principio de los Casilleros. Consideremos entonces para cada $r \varepsilon R$,

$$[r] \varepsilon Z$$

la <u>parte entera de r</u>, definida por el único entero $[r]$ que satisface

$$[r] \leq r < [r] + 1$$

Entonces $r = [r] + (r)$ con $0 \leq (r) < 1$. El número (r) se denomina la <u>parte decimal</u> de r.

Consideremos los números

$$(r), (2r), \ldots, ((n_o + 1).r)$$

pertenecientes al intervalo $[0,1]$. Si dividimos $[0,1]$ en n_o partes, es claro que hay 2 índices

$$i, j, 1 \leq i < j \leq n_o + 1 \text{ tales que}$$

$|(ir) - (kr)| < \frac{1}{n_o}$, o también $|ir - [ir] - jr + [jr]| < \frac{1}{n_o}$

y llamando $j-i=k$, $[jr] - [ir]=h$

$$|h-kr| < \frac{1}{n_o}$$

y claramente $1 \leq k \leq n_o$. Queda por saber si hay una elección de h, k tal que $(h,j) = 1$. Sea $d = (h,k)$, entonces $1 = (\frac{h}{d}, \frac{k}{d})$, $|\frac{h}{d}, \frac{k}{d}| < \frac{1}{n_o . d} \leq \frac{1}{2}$ y entonces $\frac{h}{d}$, $\frac{k}{d}$

resuelven el problema.

Notar que se satisface además

$$|h-kr| < \frac{1}{n_o} < \frac{1}{k}$$

o sea

$$\left|\frac{h}{k} - r\right| < \frac{1}{k^2}.$$

Acabamos de ver que $S(r)$ es no vacío.
Se demuestra en los cursos de teoría de números las siguientes propiedades:

1. Si r es irracional entonces $S(r)$ es un conjunto infinito;
2. Si r es racional, $S(r)$ es un conjunto finito.

Es decir, $S(r)$ es un conjunto finito si y sólo si r es un número racional.

Dejamos a cargo del lector determinar $S(\frac{3}{7})$.

13. Sucesiones.

Sean $a_1, \ldots, a_n$ una sucesión de números reales distintos dos a dos. Sea $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ una subsucesión de la dada.

Al número r lo llamaremos la longitud de la subsucesión. Una sucesión $b_1, \ldots, b_n'$ se dice creciente (resp. decreciente) si para todo

$$1 \leq i < j \leq h \quad \text{es } b_i \leq b_j \text{ (resp. } b_i \geq b_j\text{)}.$$

El problema que se plantea es el siguiente: dada una sucesión $a_1, \ldots, a_n$ de números reales distintos dos a dos, determinar las posibles longitudes de subsucesiones crecientes o decrecientes máximas.

Por ejemplo si se tiene la sucesión

10,4,1,7,3,13,8,4,11,30,5,17, detectamos la sucesión creciente máxima 1,7,8,11,30, y la sucesión decreciente máxima 9,4,3. Observamos que cualquier subsucesión creciente tiene longitud a lo sumo igual a cinco y toda subsucesión decreciente tiene lóngitud maximal a lo sumo igual a tres.

El resultado a probar es el siguiente.

Si $n = h.k+1$ entonces toda sucesiòn de nùmeros reales distintos de longitud n tiene una subsucesiòn creciente de longitud $h+1$ o una subsucesión decreciente de longitud $k+1$. Veamos una demostración:

Definimos para cada a_i, $1 \leq i \leq h.k + 1$ dos números positivos.,

m_i:= Longitud de la sucesión decreciente más larga que comienza en a_i

M_i: = Longitud de la sucesión creciente más larga que comienza en a_i

Por ejemplo en la situación particular anterior, con $a_1 = 9$, $a_2 = 10$, etc.

$$m_1 = 3,\ M_1 = 4$$

$$m_{11} = 2,\ M_{11} = 1$$

Se tienen las relaciones siguientes de verificación inmediata:

$$i < j,\ a_i < a_j \quad M_i > M_j$$

$$i < j,\ a_i > a_j \quad m_i > m_j$$

La conclusión a probar queda satisfecha toda vez que algún $M_i > h$ ó $m_i > k$.

Supongamos, razonando por el absurdo, que $M_i \leq h$ y $m_i \leq k$ cualquiera sea $1 \leq i \leq n$. A cada a_i le asignamos el par (m_i, M_i). Notar que $a_i \neq a_j \Rightarrow (m_i, M_i) \neq (m_j, M_j)$ por las relaciones anteriores. Hay pues a lo sumo $h.k$ pares distintos (m_i, M_i).

Como la sucesión tiene h.k+1 términos, habrá dos elementos $a_i = a_j$, $i \neq j$ que tienen asignado el mismo par $(m_i, M_i) = (m_j, M_j)$, una contradicción!. Por lo tanto la suposición $m_i \leq k$, $M_i \leq h$, cualquiera sea i, es contradictoria y el resultado queda probado..

Se sigue en particular que toda sucesión de $n^2 + 1$ números reales distintos contiene una subsucesión creciente ó una subsucesión decreciente de n + 1 términos.

14. Dos círculos concéntricos se dividen en 100 sectores iguales. 50 sectores de cada círculo se pintan de negro y a los otros se los deja blancos. El círculo interior puede girar. Se afirma que <u>hay una posición</u> (rotando el círculo interior) <u>en la cual, al menos 50 sectores se aparean en el mismo color</u> (o sea, hay al menos, 50 coincidencias en color).

Para demostrar esta afirmación numeremos los sectores de color negro del círculo interior de 1 a 50 y hagamos lo mismo con los sectores negros del círculo mayor. Por una rotación podemos aparear el sector interior 1 con los 50 sectores exteriores negros. Podemos indicar estas rotaciones con: $\vec{1,1}$, $\vec{1,2}$, ..., $\vec{1,50}$. Notar que como rotaciones son todas distintas entre sí. Hacemos lo mismo con el sector 2 para obtener $\vec{2,1}$, $\vec{2,2}$, ..., $\vec{2,50}$ etc.. El número total es 50.50 = 2500.

Hagamos lo mismo con los sectores blancos. Habría otro total de 2500 apareamientos. El total es 5000. Pero estos 5000 apareamientos no son distintos dado que el número total de rotaciones es igual a 100. Habrá pues que colocar 5000 objetos en 100 casillas. Se sigue por el P. de los C. que hay, al menos 50 apareamientos que coinciden con una misma rotación del círculo interior. Esta rotación da lugar a una posición del círculo interior que tiene al menos, 50 coincidencias de color en los sectores de uno y otro círculo.

EJERCICIOS

1. Sea T un triángulo equilátero de lado 1.

a) 5 puntos yacen en T. Probar que por lo menos 2 puntos de los dados yacen a distancia $\leq \frac{1}{2}$.

b) 17 puntos yacen en T. Probar que por lo menos 2 puntos de los dados yacen a distancia $\leq \frac{1}{4}$.

2. Probar que si n objetos han de ser colocados en $m < n$ casilleros entonces $\left[\frac{n}{m}\right]+1$ objetos irán a parar al mismo casillero. $\left[\frac{n}{m}\right]$ denota la parte entera de $\frac{n}{m}$.

3. Probar que en un grupo de 367 personas hay al menos 2 que nacieron el mismo día y mes del año (por ejemplo 30 de noviembre). Y si el grupo es de 366 personas?

4. 750 alumnos de primer año se deben inscribir en exactamente 5 materias de un total de 10. Probar que en cualquier tipo de combinación de cursos, hay un grupo que no tiene más de 2 alumnos inscriptos.

5. Probar que si n+1 personas se sientan en una fila de 2n asientos, al menos, dos personas ocupan asientos contiguos.

6. Dada una sucesión $a_1, \ldots, a_n$ de enteros probar que siempre es posible extraer una subsucesión, la suma de cuyos elementos sea divisible por n (Sug. Considere los números $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \ldots$).

7. Probar que dados 10 enteros consecutivos hay 2 al menos que son coprimos. Y si se trata de 11 enteros consecutivos ó de 9 enteros consecutivos?

8. Probar que, en la división entera por 7, <u>entre</u>
   i. 5 cuadrados enteros, dos al menos tienen el mismo resto;
   ii. 4 cubos enteros, dos al menos tienen el mismo resto;
   iii. 3 sextas potencias enteras, dos al menos tienen el mismo resto.

<u>BIBLIOGRAFIA</u>

Rebman, Kenneth R., The Pigeonhole Principle. Two-Year College Mathematics Jornal, Vol. 10, No. 1, (1979).