

GEOMETRIA HIPERBOLICA I

MOVIMIENTOS RIGIDOS Y RECTAS HIPERBOLICAS

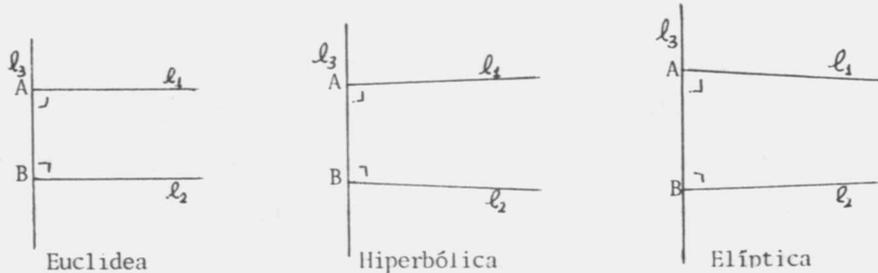
J.C. Boggino y R.J. Miatello

Uno de los logros notables de los antiguos griegos fue la construcción de un sistema deductivo de geometría, el cual comienza con principios o axiomas tomados como "evidentes", surgidos de la experiencia, y culmina en teoremas bastante profundos. La obra de Euclides y sus predecesores contenida en los Elementos, fue objeto de estudio y análisis, en particular el problema de la independencia del quinto postulado (o "axioma de las paralelas") de los restantes axiomas. El quinto afirma que si una recta corta a dos rectas dadas con ángulos a y b cuya suma es menor que dos rectos, las rectas deben encontrarse si se las prolonga indefinidamente.

Se ha dicho con alguna justicia que Euclides fue el primer geómetra no euclidiano, debido a su evidente esfuerzo para no invocar, en lo posible, el axioma quinto. Euclides organizó el material de manera que las primeras 28 proposiciones son probadas sin recurrir a este axioma. Tal colección de proposiciones, basadas en los restantes postulados solamente, es llamada actualmente "geometría absoluta" (estos teoremas son válidos tanto en la geometría euclidiana como en la no euclidiana). Hasta alrededor de 1800, sin embargo, los geómetras imaginaban que estaban en realidad operando dentro de la geometría euclidiana y que deducirían el quinto postulado como teorema. Muchos creyeron haber alcanzado este objetivo aunque en realidad habían sólo reemplazado el quinto postulado por otra suposición equivalente, tal como "dos rectas paralelas son equidistantes" o

"tres puntos no alineados están sobre una circunferencia". Entre los intentos no exitosos cabe destacar los de G. Sacheri (siglos XVII y XVIII) quien para demostrarlo realizó una elaborada cadena de deducciones, descubriendo muchos de los teoremas de lo que actualmente se conoce como la geometría hiperbólica. En 1763 G. Klügel publica una lista de 30 demostraciones del quinto postulado, todas ellas incorrectas. Recién en 1823 un joven geómetra húngaro, Janos Bolyai, comprendió que en cierto punto, la geometría absoluta se ramifica en dos direcciones, según que el quinto postulado sea o no válido, dando origen a dos geometrías distintas pero igualmente consistentes. Bolyai publicó sus resultados como apéndice en un libro de su padre. Resultados análogos fueron descubiertos por N. Lobachevsky, mas o menos al mismo tiempo, e indudablemente por C. Gauss, el gran matemático alemán, quien había llegado a conclusiones semejantes, que nunca llegó a publicar.

Los distintos tipos de geometría se diferencian claramente en la construcción que sigue. Sean l_1 y l_2 dos semirrectas, ambas a un mismo lado de una recta l_3 y perpendiculares a ésta en los puntos de intersección A y B. Si las semirrectas se mantienen equidistantes estamos en la geometría euclídea. Caso contrario, la geometría se dice hiperbólica si la distancia entre las rectas aumenta, es decir, éstas tienden a separarse y elíptica si la distancia disminuye y las rectas se intersectan. El modelo típico de geometría elíptica es el



de la esfera, donde los meridianos juegan el papel de rectas. En términos axiomáticos la geometría no euclidiana satisface todos los axiomas de Euclides excepto tal vez el 2° (elíptica) o el 5° (hiperbólica).

El objeto de estas notas es presentar y estudiar un modelo de geometría hiperbólica: el llamado plano hiperbólico o semiplano superior de Poincaré (ver Geometrías no Euclidianas, Revista de Educación Matemática, vol. 1, N° 3). Debemos destacar que la presentación no es la de la geometría "sintética" sino la de la geometría "métrica", es decir se define en el semiplano superior una forma de medir longitudes de curvas y ángulos, lo que lleva implícito una forma de medir áreas de regiones. Así las "rectas" en esta geometría son las curvas de longitud mínima entre dos cualesquiera de sus puntos; como se probará, éstas son las semirectas y semicircunferencias perpendiculares a una recta fija (ver la nota antes mencionada, R.E.M. vol 1, N° 3).

En esta primera parte nos ocupamos en primer lugar de los movimientos rígidos de esta geometría, para lo cual es necesario estudiar en algún detalle las transformaciones de Möbius. El objetivo principal de la primera parte es determinar todas las rectas hiperbólicas y probar que por un punto exterior a una recta dada se pueden trazar una infinidad de paralelas a dicha recta (ver teorema 2.2.). Las herramientas a utilizar serán, fundamentalmente, el cálculo diferencial e integral y las diversas identidades que satisfacen las funciones trigonométricas e hiperbólicas.

En la siguiente nota (segunda parte) nos ocuparemos de otros aspectos: área de polígonos, fórmulas trigonométricas y criterios de congruencia de triángulos.

1. Transformaciones de Möbius

Algunos resultados de esta sección y otros detalles sobre transformaciones de Möbius pueden encontrarse en cualquier texto de funciones de variable compleja, por ejemplo en los de Ahlfors, Churchill o Conway.

Denotamos con \mathbb{C} el conjunto de los números complejos y \mathbb{E} el de los números reales. Si $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, donde $x, y \in \mathbb{E}$, denotamos $x = \text{Re}(z)$ la parte real de z e $y = \text{Im}(z)$ la parte imaginaria de z . Usamos igualmente las conocidas expresiones para un número complejo,

$$z = r e^{i\theta}, \quad z = r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

donde $r \geq 0$ denota el módulo y θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, el argumento de z ; recordamos que estas expresiones de z se relacionan por

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

Si con \bar{z} denotamos el conjugado de z , se tiene $|z|^2 = z \bar{z}$.

Una transformación de Möbius es una función de la forma

$$A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con a, b, c , y d números complejos tales que $ad - bc \neq 0$. Notar que si $c \neq 0$, $A: \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} - \{\frac{a}{c}\}$. La función $B(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$ es del mismo tipo que $A(z)$ y tiene la propiedad de $B \circ A(z) = A \circ B(z) = z$. Así una transformación de Möbius es biyectiva y su inversa es una transformación de Möbius.

Resulta conveniente adicionar a \mathbb{C} un punto ideal, al que llamamos punto del infinito, ∞ . Esto permite extender las transformaciones de Möbius

$$A: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

definiendo $A(-\frac{d}{c}) = \infty$, $A(\infty) = \frac{a}{c}$, si $c \neq 0$ y $A(\infty) = \infty$, si $c = 0$.

Algunos ejemplos:

(i) Inversión, $A(z) = \frac{1}{z}$ ($z \neq 0, \infty$), $A(\infty) = 0$ y $A(0) = \infty$.

(ii) Traslación $A(z) = z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

(iii) Rotación $A(z) = kz$, $k = e^{i\theta}$.

(iv) Homotecia $A(z) = kz$, $k \in \mathbb{E}$, $k > 0$.

Proposición 1.1 a) La composición de transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius.

b) Toda transformación de Möbius es composición de traslaciones, inversiones, rotaciones y homotecias.

Demostración: a) Es un cálculo que dejamos como ejercicio

b) Si $c \neq 0$, $A(z) = \frac{az + b}{cz + d} =$

$$= \frac{a}{c} \cdot \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \left(\frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}} + \frac{z + \frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}} \right) = \frac{bc - ad}{c^2(z + \frac{d}{c})} + \frac{a}{c}$$

definimos $A_1(z) = z + \frac{d}{c}$, $A_2(z) = \frac{1}{z}$, $A_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot z$,

$A_4(z) = z + \frac{a}{c}$, luego $A = A_4 \circ A_3 \circ A_2 \circ A_1$.

Si $c = 0$, $A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, luego es composición de una rotación, una homotecia y una traslación.

Curvas en \mathbb{C}

Una curva en \mathbb{C} es una función $\sigma: J \rightarrow \mathbb{C}$ continuamente diferenciable, donde J es un intervalo abierto de \mathbb{E} (es decir $J = (a, b) = \{t \in \mathbb{E} / a < t < b\}$) y la expresión continuamente diferenciable significa que las partes real e imaginaria de σ , que son funciones de variable real y a valores reales, son continuamente diferenciables. Será conveniente asumir que a y b pueden llegar a ser $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente. A veces haremos abuso del lenguaje y también llamaremos curvas en \mathbb{C} a restricciones de curvas a intervalos cerrados $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{E}$. ($[a, b] = \{t \in \mathbb{E} / a \leq t \leq b\}$).

El vector tangente a una curva $\sigma(t) = x(t) + i y(t)$ en \mathbb{C} es el número complejo $\sigma'(t) = x'(t) + i y'(t)$, $x'(t)$ e $y'(t)$ son las derivadas reales usuales. Asumiremos que las curvas satisfacen $\sigma'(t) \neq 0$ para todo t . Si $\sigma_1(t)$ y $\sigma_2(t)$ son curvas en \mathbb{C} que se cortan en z_0 es decir $\sigma_1(t_1) = \sigma_2(t_2) = z_0$, llamamos ángulo formado por estas curvas en z_0 al ángulo formado por sus vectores tangentes $\sigma_1'(t_1)$ y $\sigma_2'(t_2)$ en z_0 . Así, si θ denota el ángulo entre las curvas σ_1 y σ_2 en z_0 ,

$$\theta = \text{argumento } \frac{\sigma_2'(t_2)}{\sigma_1'(t_1)}$$

Si σ es una curva con $\sigma(t_0) = \infty$, se dice que σ es diferenciable en t_0 , si $\frac{1}{\sigma(t)}$ lo es en t_0 . Dadas dos curvas σ_1, σ_2 , si para ciertos t_1, t_2 $\sigma_i(t_i) = \infty$ ($i = 1, 2$), el ángulo formado por estas curvas en ∞ es por definición el formado por las curvas $\frac{1}{\sigma_i(t)}$ en el 0 ($i = 1, 2$).

Lema 1.2. Sean $\sigma(t)$ una curva en $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$ y $A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ($c \neq 0$), entonces $\frac{d}{dt} A(\sigma(t)) = \frac{(ad-bc)\sigma'(t)}{(c\sigma(t)+d)^2}$. Esta fórmula sigue siendo válida cuando $c = 0$.

La demostración de este lema es una aplicación de las reglas usuales del cálculo diferencial real y la omitiremos.

Proposición 1.3. Las transformaciones de Möbius preservan ángulos entre curvas.

Demostración: Por la proposición 1.1. es suficiente verificar esta propiedad para las inversiones, traslaciones, rotaciones y homotecias.

Para las tres últimas, es claro que $\frac{(A \circ \sigma_2)'(t)}{(A \circ \sigma_1)'(t)} = \frac{\sigma_2'(t)}{\sigma_1'(t)}$ y los ángulos se conservan.

Sean $S(z) = \frac{1}{z}$ y $\sigma_1(t), \sigma_2(t)$ curvas en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $z_0 = \sigma_1(t_1) = \sigma_2(t_2)$. Si $z_0 = \infty$, el ángulo formado por σ_1 y σ_2 en ∞ es el formado por $\frac{1}{\sigma_1}$ y $\frac{1}{\sigma_2}$ en 0 , es decir el formado por $S \circ \sigma_1$ y $S \circ \sigma_2$ en 0 . Si $z_0 = 0$, las curvas $S \circ \sigma_1$ y $S \circ \sigma_2$ se cortan en ∞ y el ángulo formado por ellas en ∞ es el formado por $\frac{1}{S \circ \sigma_1}$ y $\frac{1}{S \circ \sigma_2}$ en 0 , es decir el

formado por σ_1 y σ_2 en 0. Si $z_0 \neq 0, \infty$, por el lema 1.2.

$$\frac{(S \circ \sigma_2)'(t_2)}{(S \circ \sigma_1)'(t_1)} = \frac{-\sigma_2'(t_2)/\sigma_2(t_2)^2}{-\sigma_1'(t_1)/\sigma_1(t_1)^2} = \frac{\sigma_2'(t_2)}{\sigma_1'(t_1)}$$

y el ángulo es conservado.

Lema 1.4. a) Las inversiones transforman rectas (y circunferencias) en rectas o circunferencias.

b) Las traslaciones, rotaciones y homotecias transforman rectas en rectas y circunferencias en circunferencias.

Demostración: Notemos que la ecuación de una recta o una circunferencia en \mathbb{C} puede escribirse

$$(A) \quad \alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0,$$

con $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{C}$; ya que si $z = x+iy$, $\beta = a+ib$, la ecuación (A) es $\alpha(x^2+y^2) + 2ax - 2by + \gamma = 0$, de donde es claro que representa una recta si y sólo si $\alpha = 0$. Además la recta (o circunferencia) pasa por el origen si y sólo si $\gamma = 0$. Probamos ahora el lema:

(a) Si aplicamos la inversión $S(z) = \frac{1}{z}$ a los puntos que satisfacen (A), las imágenes verificarán la ecuación

$$\alpha \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\bar{z}} + \beta \frac{1}{z} + \bar{\beta} \frac{1}{\bar{z}} + \gamma = 0,$$

o sea $\alpha + \beta \bar{z} + \bar{\beta} z + \gamma z \bar{z} = 0$, así podemos concluir:

- (i) Si Γ es una recta que pasa por el origen, $S(\Gamma)$ es una recta que pasa por el origen,
- (ii) Si Γ es una recta que no pasa por el origen, $S(\Gamma)$ es una circunferencia que pasa por el origen,
- (iii) Si Γ es una circunferencia que pasa por el origen, $S(\Gamma)$ es una recta que no pasa por el origen,

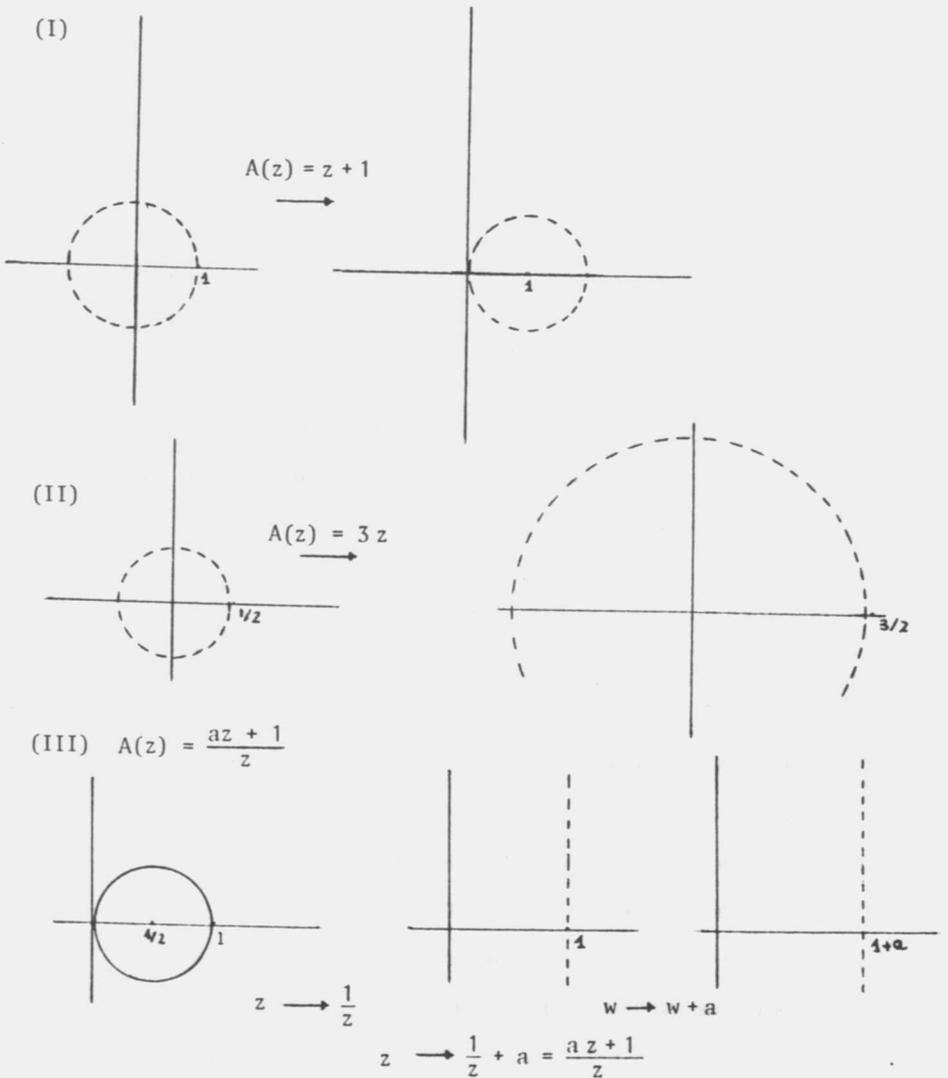
(iv) Si Γ es una circunferencia que no pasa por el origen, $S(\Gamma)$ es una circunferencia que no pasa por el origen.

La demostración de (b) es similar a la hecha para (a).

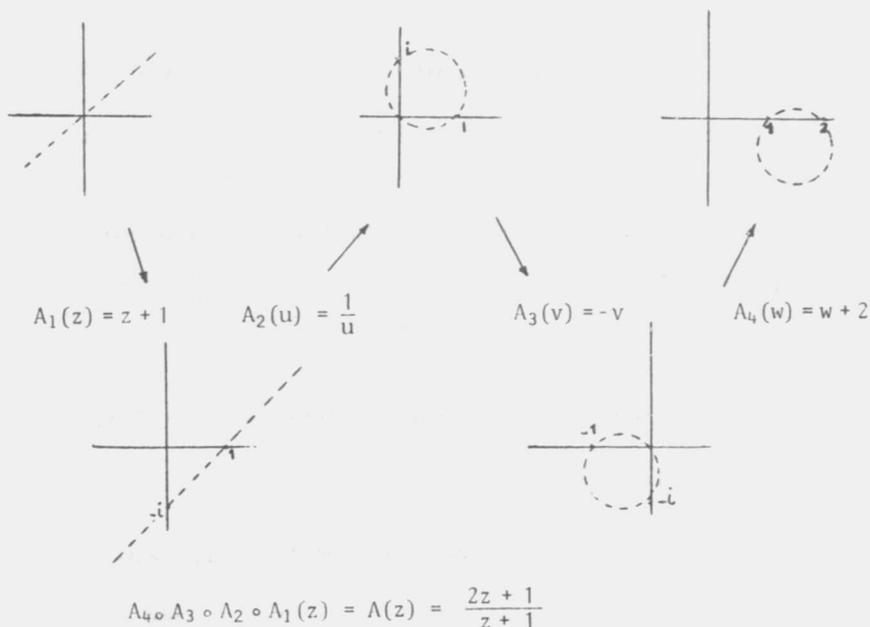
Proposición 1.5. Las transformaciones de Möbius transforman rectas (y circunferencias) en rectas o circunferencias.

La proposición resulta de aplicar el lema anterior y la proposición 1.1.

Ejemplos:



$$(IV) A(z) = \frac{2z + 1}{z + 1}$$



Ejercicio: Considere $B(z) = \frac{-z}{z-1}$. Elija algunas rectas y circunferencias y determine sus imágenes por B .

Denotemos con G el conjunto de transformaciones de Möbius $A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{E}$ y $ad-bc = 1$. El lector puede verificar que si $A, B \in G$, A^{-1} y $A \circ B$ también pertenecen a G .

Denotamos con H al semiplano superior, $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z > 0\}$.

Lema 1.6. Si $A \in G$ y $A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, entonces $\text{Im} A(z) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2}$.

Demostración: $A(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(\overline{cz+d})}{|cz+d|^2}$

$$= \frac{ac|z|^2 + bd + adz + bc\overline{z}}{|cz+d|^2}, \text{ así } \text{Im} A(z) = \frac{(ad-bc)\text{Im}(z)}{|cz+d|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

$$\operatorname{Re}(A(z)) = \frac{ac|z|^2 + bd + (ad + bc)\operatorname{Re}(z)}{|cz + d|^2}$$

Proposición 1.7. Si $A \in G$, entonces $A(\mathbb{E} \cup \{\infty\}) = \mathbb{E} \cup \{\infty\}$ y $A(H) = H$.

Demostración: Por el lema 1.6, $\operatorname{Im} A(z)$ tiene el mismo signo que $\operatorname{Im}(z)$ y si se anulan, lo hacen simultáneamente. Luego $A(H) \subset H$, $A(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$ y $A(H^-) \subset H^-$ ($H^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$). La demostración se completa teniendo presente la biyectividad de A y además que $A(-\frac{d}{c}) = \infty$, $A(\infty) = \frac{a}{c}$ ($c \neq 0$) o $A(\infty) = \infty$ ($c = 0$) si $A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$.

Lema 1.8. Sea $A \in G$, $A(i) = i$ si y sólo si existe θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tal que $A(z) = \frac{z \cos \theta + \operatorname{sen} \theta}{-z \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$.

Demostración: Sea $A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ y supongamos que $A(i) = i$, luego $i(ci + d) = ai + b$ o $ai + b = id - c$, de donde $a = d$ y $b = -c$; como $1 = ad - bc = a^2 + b^2$, existe θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tal que $a = \cos \theta$ y $b = \operatorname{sen} \theta$. Para la recíproca basta realizar el cálculo.

Denotaremos con A_θ la transformación

$$A_\theta(z) = \frac{z \cos \theta + \operatorname{sen} \theta}{-z \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

con un cálculo sencillo se verifica que $A_\theta \circ A_\beta = A_{\theta+\beta}$ y $A_\theta^{-1} = A_{-\theta}$

Lema 1.9. Si A es una transformación de Möbius y $A \neq$ identidad, A tiene a lo sumo dos puntos fijos.

Demostración: $A(z) = \frac{az + b}{cz + d} = z$ si y sólo si $cz^2 + (d-a)z - b = 0$; esta ecuación de segundo grado tiene a lo sumo dos soluciones.

Lema 1.10. a) Si $z_j, \mu_j \in \mathbb{E} \cup \{\infty\}$, $j = 0, 1, 2$, con $z_0 < z_1 < z_2$, $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2$, existe un único $A \in G$ tal que $A(z_j) = \mu_j$, $j = 0, 1, 2$ (convenimos que $z < \infty$, si $z \in \mathbb{E}$).

b) Si $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$, existe $A \in G$ tal que $A(z_0), A(z_1) \in I^+$, donde $I^+ = \{ti | t \in \mathbb{E}, t > 0\}$.

Demostración: a) Sean $v_0 < v_1 < v_2$ en \mathbb{E} , $c = \frac{v_1 - v_2}{v_1 - v_0}$, $d = \frac{1}{\sqrt{c(v_0 - v_2)}}$

Definimos $A(z) = c \frac{dz - dv_0}{dz - dv_2}$.

Puede verificarse que $A(v_0) = 0$, $A(v_1) = 1$, $A(v_2) = \infty$ y $A \in G$.

Por lo tanto, dados $z_0 < z_1 < z_2$, $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2$ en \mathbb{E} , existen $A, B \in G$ tales que $A(z_0) = B(\mu_0) = 0$, $A(z_1) = B(\mu_1) = 1$ y $A(z_2) = B(\mu_2) = \infty$.

Basta entonces tomar $B^{-1} \circ A$, que está en G y cumple (a).

En cuanto a la unicidad, si existieran A_1 y $A_2 \in G$ tal que $A_1(z_j) = A_2(z_j)$, $j = 0, 1, 2$, entonces $A_2^{-1} \circ A_1(z_j) = z_j$ y por el lema anterior $A_1 = A_2$. Dejamos como ejercicio el caso en que $z_2 = \infty$ o $\mu_2 = \infty$.

b) Sea $z_0 = x_0 + i y_0 \in \mathbb{H}$ y $A(z) = \frac{y_0^{-1/2} z - y_0^{-1/2} x_0}{y_0^{1/2}}$.

Se verifica $A(z_0) = i$ y $A \in G$. Sea ahora $A(z_1) = x_1 + i y_1$; elegimos θ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, tal que $\cotg 2\theta = \frac{x_1^2 + y_1^2 - 1}{2x_1}$. Definimos $B(z) = \frac{z \cos \theta + \operatorname{sen} \theta}{-z \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$; por el lema 1.8 $B(i) = i$ y además $B \in G$. De la demostración del lema 1.6 se sigue que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} B \circ A(z) &= \frac{-x_1 \cos \theta (x_1^2 + y_1^2) + \operatorname{sen} \theta \cos \theta + (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) x_1}{|-\operatorname{sen} \theta A(z_1) + \cos \theta|^2} \\ &= \frac{-1/2 \operatorname{sen} 2\theta (x_1^2 + y_1^2 - 1) + x_1 \cos 2\theta}{|-\operatorname{sen} \theta A(z_1) + \cos \theta|^2} \\ &= \frac{-x_1 \operatorname{sen} 2\theta \cotg 2\theta + x_1 \cos 2\theta}{|-\operatorname{sen} \theta A(z_1) + \cos \theta|^2} = 0 \end{aligned}$$

Luego $B \circ A(z_1) \in I^+$, $B \circ A \in G$ y satisface $B \circ A(z_0) = i$. Notar que si $x_1 = 0$, no es necesario definir B .

Nota: Como caso particular hemos probado en (b) que si $z_1 \in \mathbb{H}$, existe θ , $0 \leq \theta < \pi$, tal que $A_\theta(z) = \frac{z \cos \theta + \operatorname{sen} \theta}{-z \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$ verifica $A_\theta(z_1) \in I^+$.

2. Rectas Hiperbólicas.

Con la notación establecida, trabajamos en el semiplano superior H . Si $\sigma : J \rightarrow H$ es una curva, con $a < b$ extremos del intervalo J y $\sigma(t) = x(t) + iy(t)$ con vector tangente $\sigma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ en $\sigma(t)$, se llama *longitud* de σ a la magnitud

$$l(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt.$$

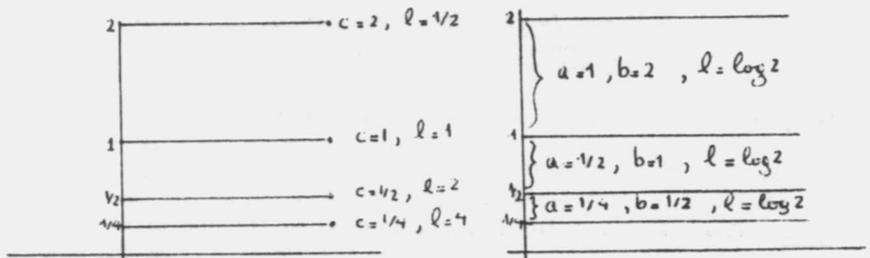
Distintas elecciones en la definición de $\|\sigma'(t)\|$ cambiarán las longitudes de las curvas y por consiguiente variará la geometría. Por ejemplo, si elegimos $\|\sigma'(t)\| = |\sigma'(t)| = (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}$ estamos con la conocida Geometría Euclídea. La Geometría Hiperbólica es la que resulta de definir

$$\|\sigma'(t)\| = \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}}{y(t)}$$

Con esta definición de $\|\sigma'(t)\|$, llamamos a $l(\sigma)$ la longitud hiperbólica de σ ; cuando no haya lugar a confusión sólo escribiremos longitud. Como ilustración, calculamos las longitudes de algunos segmentos horizontales y verticales. Sean $\alpha(t) = t + ic$, $0 \leq t \leq 1$, c real positivo fijo; $\beta(t) = ti$, $a \leq t \leq b$.

$$l(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{c} = \frac{1}{c}, \quad l(\beta) = \int_a^b \frac{dt}{t} = \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

Graficamente, si $l = l(\alpha)$ o $l(\beta)$ según el caso:



En estos ejemplos se pone de manifiesto que la longitud hiperbólica de segmentos horizontales aparentemente iguales, aumenta si están más próximos al eje real; segmentos verticales aparentemente cada vez más pequeños, tienen igual longitud hiperbólica. Es decir las longitudes aumentan cuando nos acercamos al eje real.

Es natural pensar que la distancia entre dos puntos debe ser la longitud del camino más corto que los une. Así por ejemplo, para la aeronavegación, la distancia entre el polo norte y el polo sur no se mide por la longitud del eje de la tierra, por no estar sobre la superficie de la tierra. En cambio, como es familiar, esta está dada por la longitud de un semimeridiano. En base a estas consideraciones, definimos la distancia hiperbólica entre z_1 y $z_2 \in H$ por:

$$d(z_1, z_2) = \inf \{ \ell(\sigma) \mid \sigma: [a, b] \rightarrow H \text{ curva con } \sigma(a) = z_1, \sigma(b) = z_2 \}.$$

La existencia de este ínfimo está asegurada, pues el conjunto es de números reales y está acotado inferiormente por 0. De cualquier modo en la definición de distancia hiperbólica el lector puede cambiar la palabra ínfimo por mínimo sin dificultad, como se verá más adelante. La distancia tiene las siguientes propiedades básicas

- (i) $d(z_1, z_2) \geq 0$ ($d(z_1, z_2) = 0$ si y sólo si $z_1 = z_2$)
- (ii) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$
- (iii) $d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \geq d(z_1, z_3)$

En la geometría euclídea del plano, las rectas son curvas que realizan la distancia entre sus puntos; definimos de manera análoga la noción de recta en H .

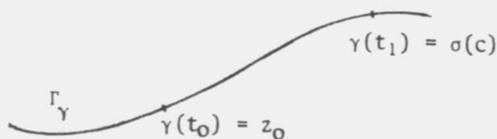
Llamamos *geodésica* en H a una curva que realiza la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos. A la imagen de una geodésica σ la llamamos *arco de recta hiperbólica* y la denotamos r_σ . Una *recta hiperbó-*

línea es un arco de recta hiperbólica no contenido propiamente en otro arco de recta hiperbólica. Probaremos luego que todo arco de recta hiperbólica está contenido en una recta hiperbólica.

El siguiente lema establece una condición suficiente para que una geodésica determine una recta hiperbólica.

Lema 2.1: Sea $\sigma: (a, b) \rightarrow H$ geodésica tal que para algún $c \in (a, b)$ las curvas $\sigma|_{(a, c)}: (a, c) \rightarrow H$ y $\sigma|_{(c, b)}: (c, b) \rightarrow H$ tienen longitud infinita, entonces Γ_σ es una recta hiperbólica.

Demostración: Debemos verificar que Γ_σ no está contenida propiamente en otro arco de recta hiperbólica. Por el absurdo, sea $\gamma: (a', b') \rightarrow H$ una geodésica tal que $\Gamma_\sigma \subset \Gamma_\gamma$, supongamos que existe $z_0 = \gamma(t_0) \notin \Gamma_\sigma$ ($t_0 \in (a', b')$). $\sigma(c) \in \Gamma_\gamma$, luego existe $t_1 \in (a', b')$ tal que $\gamma(t_1) = \sigma(c)$



Supongamos $t_0 < t_1$, (el caso $t_0 > t_1$ es análogo). Como σ es una curva (continua), $\Gamma_\sigma \subset \{\gamma(t) / t \geq t_0\}$; por otro lado $d(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) < \infty$, de allí que $\ell(\sigma|_{(a, c)}) < \infty$ o $\ell(\sigma|_{(c, b)}) < \infty$, contradiciendo la hipótesis. Esto concluye la demostración.

El próximo paso será mostrar una recta hiperbólica sencilla. Sean $I^+ = \{ti / t \in \mathbb{E}, t > 0\}$, $\sigma: [c, d] \rightarrow H$ curva tal que $\sigma(c) = ai$, $\sigma(d) = bi$ con $a < b$, $\sigma(t) = x(t) + iy(t)$. Resulta,

$$\ell(\sigma) = \int_c^d \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}}{y(t)} dt \geq \int_c^d \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_c^d \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \log \frac{y(d)}{y(c)} = \log \left(\frac{b}{a} \right),$$

así $\ell(\sigma) \geq \log \left(\frac{b}{a} \right)$, con igualdad si y sólo si $x'(t) \equiv 0$, $y'(t) > 0$, es decir $x(t)$ es constante e $y(t)$ creciente.

Por otra parte, vimos que la longitud de $\beta(t) = ti$, $a \leq t \leq b$, es

$\log\left(\frac{b}{a}\right)$. Concluimos que $d(ai, bi) = \log\left(\frac{b}{a}\right)$ y luego β realiza la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos; así β es una geodésica y su imagen es un arco de recta hiperbólica.

Finalmente, si $\beta(t) = ti$, $t > 0$ y $\beta_1 = \beta: (0, 1) \rightarrow H$, $\beta_2 = \beta: (1, \infty) \rightarrow H$, es $\ell(\beta_1) = \lim_{t \rightarrow 0} \log\left(\frac{1}{t}\right) = \infty$, $\ell(\beta_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \log(t) = \infty$, y por el lema 2.1 Γ_β es una recta hiperbólica.

Notar que si σ es una geodésica uniendo dos puntos de I^+ , $\sigma(t) = x(t) + iy(t)$, por dar la distancia entre esos dos puntos deberá ser $x(t) \equiv 0$, es decir $\Gamma_\sigma \subset I^+$. Otro hecho importante que resulta de los cálculos anteriores es que si $ai \in I^+$, hay sólo dos puntos en I^+ a distancia d de ai ($d > 0$ arbitrario). En efecto, si $d(ti, ai) = d$, entonces $t = ae^d$ o $t = ae^{-d}$.

Para determinar todas las geodésicas utilizaremos el ejemplo anterior y las transformaciones de Möbius $A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ con coeficientes $a, b, c, d \in \mathbf{E}$, $ad - bc = 1$, y sus propiedades.

Sea $\sigma(t)$ una curva en H , entonces $A \circ \sigma(t)$ es una curva en H y por los lemas 1.2 y 1.6, $(A \circ \sigma)' = \frac{\sigma'}{(c\sigma + d)^2}$, $\text{Im}(A \circ \sigma) = \frac{\text{Im } \sigma}{|c\sigma + d|^2}$. Si $\sigma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ y $(A \circ \sigma)'(t) = z_1'(t) + iz_2'(t)$ resulta $\sigma' \cdot \overline{\sigma'} = x'^2 + y'^2$ y $(A \circ \sigma)' \cdot \overline{(A \circ \sigma)'} = z_1'^2 + z_2'^2$. Luego

$$\begin{aligned} \|(A \circ \sigma)'\|^2 &= \frac{(A \circ \sigma)' \cdot \overline{(A \circ \sigma)'}}{(\text{Im } A \circ \sigma)^2} = \frac{\frac{\sigma'}{(c\sigma + d)^2} \cdot \frac{\overline{\sigma'}}{\overline{(c\sigma + d)^2}}}{\frac{(\text{Im } \sigma)^2}{|c\sigma + d|^4}} \\ &= \frac{\sigma' \cdot \overline{\sigma'}}{(\text{Im } \sigma)^2} = \|\sigma'\|^2. \end{aligned}$$

$$\text{Así } \ell(A \circ \sigma) = \int_a^b \|(A \circ \sigma)'\| = \int_a^b \|\sigma'\| = \ell(\sigma).$$

Como los elementos de G preservan longitud de curvas, ellos pre-

servan la distancia, es decir los elementos de G son *movimientos rígidos* de H .

Del comentario anterior es claro que si $A \in G$ y σ es una curva en H , entonces σ es geodésica si y sólo si $A \circ \sigma$ es geodésica. Además $A(\mathbf{E}) = \mathbf{E}$ y A conserva ángulos entre curvas. Si $I = \{t_i \mid t \in \mathbf{E}\}$, $A(I)$ debe ser una circunferencia o una recta cortando perpendicularmente a \mathbf{E} , es decir $A(I)$ es una recta vertical o una circunferencia con centro en el eje \mathbf{E} . Luego $A(I^+)$ es una semirrecta vertical en H o una semicircunferencia en H con centro en \mathbf{E} .

Recíprocamente, si L es una recta vertical cortando a \mathbf{E} en b , sea $A(z) = z + b$; $A \in G$ y $A(I) = L$ y toda semirrecta vertical es imagen de I^+ por un elemento de G . Además si C es una circunferencia con centro en \mathbf{E} que corta a \mathbf{E} en puntos $x_0 < x_1$, sea $A(z) = \frac{dx_1 z - dx_0}{-dz + d}$, $d = (x_1 - x_0)^{-1/2}$, se tiene $A(0) = x_0$, $A(\infty) = x_1$ y $A \in G$. Sabemos que $A(I)$ debe ser una recta o una circunferencia; si fuese una recta, sería el eje \mathbf{E} , sin embargo $A(I^+) \subset H$, luego $A(I)$ es una circunferencia que corta a \mathbf{E} perpendicularmente, de allí que debe ser C . Así toda semicircunferencia en H con centro en \mathbf{E} es imagen de I^+ por un elemento de G . Con esto completamos la demostración de que toda semirrecta vertical en H o semicircunferencia en H con centro en \mathbf{E} es una recta hiperbólica.

Inversamente, sea $\sigma: J \rightarrow H$ geodésica, $a, b \in J$, $a < b$, si $z_0 = \sigma(a)$, $z_1 = \sigma(b)$, por el lema 1.10 existe $A \in G$ tal que $A(z_j) \in I^+$ ($j = 0, 1$). Como $A \circ \sigma|_{[a, b]}$ es una geodésica que une puntos de I^+ , su imagen está contenida en I^+ . Luego la imagen de $\sigma(t) = A^{-1} \circ A \circ \sigma(t)$, $a \leq t \leq b$, es un arco de circunferencia con centro en \mathbf{E} o un segmento de recta vertical. Al ser a, b arbitrarios en J , Γ_σ es un arco de circunferencia con centro en \mathbf{E} o un segmento de recta vertical. Notar que hemos probado que si σ es una geodésica, existe $A \in G$ tal que $A \circ \sigma$ tiene imagen contenida en I^+ . Resumiendo:

Teorema 2.2. (i) Los arcos de recta hiperbólica en H son los segmentos de rectas verticales y los arcos de circunferencias con centro en E . Las rectas hiperbólicas son las semirrectas verticales y las semicircunferencias abiertas con centro en E .

(ii) Si Γ es una recta hiperbólica, $z \in \Gamma$ y $d > 0$, existen en Γ dos únicos puntos z_1 y z_2 tales que $d(z, z_1) = d(z, z_2) = d$.

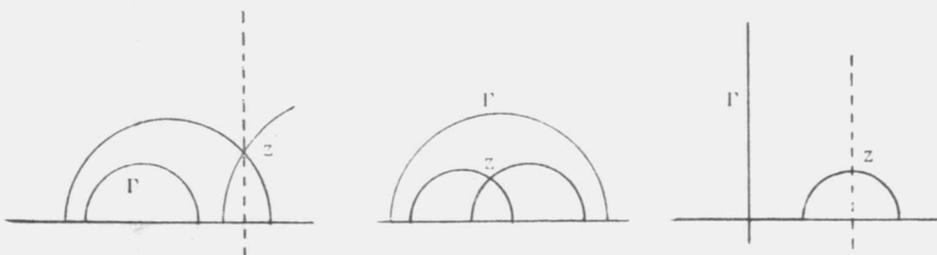
(iii) Por dos puntos de H pasa una única recta hiperbólica.

(iv) Si Γ es una recta hiperbólica y $z \notin \Gamma$, pasan por z una infinidad de rectas hiperbólicas paralelas a Γ .

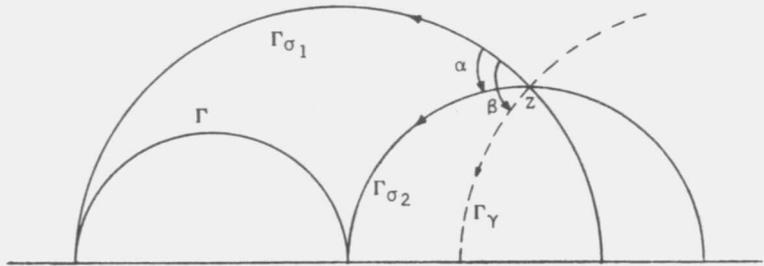
Demostración: (i) y (ii) ya han sido probados. Veamos (iii). Sean $z_0, z_1 \in H$, por el lema 1.10 existe $A \in G$ tal que $A(z_0), A(z_1) \in I^+$, luego $A^{-1}(I^+)$ es una recta hiperbólica pasando por z_0 y z_1 . Supongamos que σ_1 y σ_2 son dos geodésicas tales que Γ_{σ_1} y Γ_{σ_2} son rectas hiperbólicas y $z_0 = \sigma_1(t_0) = \sigma_2(s_0)$, $z_1 = \sigma_1(t_1) = \sigma_2(s_1)$. Como anteriormente, podemos elegir $A \in G$ tal que $\Gamma_{A \circ \sigma_1} \subset I^+$; como $\Gamma_{A \circ \sigma_1}$ es una recta hiperbólica, $\Gamma_{A \circ \sigma_1} = I^+$.

Por otro lado $A \circ \sigma_2$ es una geodésica con $A \circ \sigma_2(s_0), A \circ \sigma_2(s_1) \in I^+$, luego $A \circ \sigma_2(s) \in I^+$, $s_0 \leq s \leq s_1$. Como σ_2 es un arco de circunferencia o una recta vertical, $A \circ \sigma_2$ es un arco de circunferencia o una recta vertical, así $A \circ \sigma_2(s) \in I^+$ para todo s , es decir $\Gamma_{A \circ \sigma_2} \subset \Gamma_{A \circ \sigma_1}$, o sea $\Gamma_{\sigma_2} \subset \Gamma_{\sigma_1}$. Al ser Γ_{σ_2} una recta hiperbólica resulta $\Gamma_{\sigma_2} = \Gamma_{\sigma_1}$.

La afirmación (iv) es clara. Ilustramos con algunos ejemplos gráficos.



En la figura siguiente, el ángulo α formado por las paralelas límites Γ_{σ_1} y Γ_{σ_2} es llamado *ángulo de paralelismo* de Γ . Notar que si Γ_γ es otra recta hiperbólica que pasa por z y forma un ángulo β con Γ_{σ_1} , entonces Γ_γ es paralela a Γ si y sólo si $\alpha \leq \beta \leq \pi$ ó $\pi + \alpha \leq \beta \leq 2\pi$



Referencias: Bonola R. "Geometrías no Euclidianas" (Espasa Calpe 1945) y en inglés. "Non euclidean geometries" (Dover).

Santaló L.A. "Geometrías no Euclidianas" (Cuadernos, Eudeba N° 45). Capítulos V, VI, VII (ver la extensa lista de referencias)

Marrning. "Non euclidean geometry" (Dover)

Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba.

GEORGE POLYA
(1887-1985)

Profesor Emérito de la Universidad de Stanford, falleció el 7 de setiembre de 1985, a la edad de 97 años. Había nacido el 13 de diciembre de 1887 en la ciudad de Budapest. Es bien conocido, además de sus contribuciones matemáticas en diferentes áreas, por su intenso interés en problemas de educación matemática y entrenamiento de docentes en Matemática. Sus libros más notables en este aspecto son: *How to solve it* (1945), *Mathematics and Plausible Reasoning* (1954) y *Mathematical Discovery*.

(Referencias: Notices of the American Mathematical Society, Octubre 1985, N° 243, Vol. 32 pág. 599).

FAUSTO ISMAEL TORANZOS
(1908-1986)

El distinguido matemático y educador doctor Fausto I. Toranzos falleció en Buenos Aires el día 6 de noviembre de 1986. Había nacido en Fuerte Quemado (provincia de Catamarca) el 17 de junio de 1908, recibiendo de Profesor Especial de Matemáticas y Física en 1928 y de doctor en Ciencias Físicomatemáticas (Sección Matemáticas) en 1931, en ambos casos en la Universidad Nacional de La Plata.

Fue director fundador del Instituto del Profesorado de la Universidad Nacional de Cuyo, más tarde convertido en Facultad de Ciencias de la Educación, con sede en San Luis (1940-1942). De 1947 a 1956 fue profesor de Estadística en la misma Universidad, y desde 1957 hasta su fallecimiento actuó en la Universidad de Buenos Aires, primero en la Facultad de Ingeniería y luego en la Facultad de Ciencias Económicas, como profesor titular de Estadística Metodológica y Director del Instituto de Estadística. Desde 1969 fue profesor con dedicación exclusiva y también profesor emérito. Fue miembro de número de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires.

El doctor Toranzos se preocupó siempre por la enseñanza de la matemática y de la estadística en todos los niveles. Aparte de su actuación como profesor universitario, publicó en colaboración con Julio Rey Pastor unos Textos de Matemática para la enseñanza secundaria y un libro titulado *"Enseñanza de la Matemática"* (Editorial Kapelusz, 1959). También publicó *"Introducción a la Epistemología y Fundamentación de la Matemática"* (Editorial Espasa-Calpe Argentina, 1943). En el campo de la Estadística publicó numerosos trabajos en revistas especializadas y presentó comunicaciones en distintos congresos internacionales. Publicó también los libros *"Estadística"* (Editorial Kapelusz, 1962), *"Formación matemática del Economista"* (Editorial Fondo de Cultura Económica, 1964), *"Teoría Estadística y Aplicaciones"* (Editorial Kapelusz, 1971). Fue miembro Fundador de la Unión Matemática Argentina.

Dr. Luis A. Santaló