Problemas y soluciones

Competencia Matemática Ernesto Paenza - 1994

Cada problema fue calificado con un puntaje de cero a diez.

Las soluciones que se encuentran a continuación fueron elegidas por el Comité Organizador entre las respuestas de los participantes. Son aquellas que más le gustaron, además de ser correctas. En caso de haber varias (esencialmente) iguales entre ellas, eligieron una cualquiera.

Al comienzo del enunciado de cada problema, figura un vector construído en base a los puntajes obtenidos por los 60 participantes. La primera coordenada de estos vectores indica cuántos participantes obtuvieron 8, 9 ó 10 puntos (problema esencialmente bien resuelto). La segunda indica cuántos obtuvieron 5, 6 ó 7 puntos (esencialmente "la mitad o un poco más" del problema). La tercera, cuántos obtuvieron 1, 2, 3 ó 4 puntos (casos particulares o algo conducente a una posible solución). Finalmente, la cuarta coordenada corresponde al número de participantes que no hicieron nada en ese problema.

Problema 1 (22, 6, 4, 28)

Para cada $r > 0$ sea $B_r(m,n)$ la bola cerrada de radio r con centro en el punto del plano de coordenadas enteras (m,n), y llamemos $A_r = \bigcup_{(m,n)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}} B_r(m,n)$ a su unión.

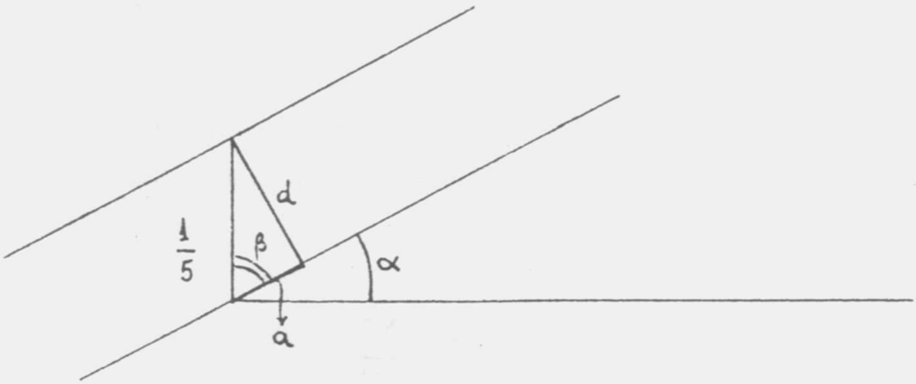
Se pide encontrar el mínimo r tal que cualquier recta con pendiente 2/5 corte a A_r.

Solución de Hugo A. Antolini y Esteban D. Volentini de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán.

Si una recta de pendiente 2/5 pasa por un punto de coordenadas enteras, entonces su ordenada al origen es $k/5$ con $k \in Z$. En efecto: si $(m,n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$

satisface $n = \frac{2}{5}m + b$, entonces $5b \in \mathbf{Z}$. Queda determinada entonces una familia de rectas paralelas $\{y = \frac{2}{5}\ x + \frac{k}{5},\ k \in \mathbf{Z}\}$, que están a una cierta distancia d. Si tomamos $r \geq \frac{d}{2}$, es claro que toda recta del plano de pendiente $2/5$ corta a A_r. Por otro lado, si $r < \frac{d}{2}$, las rectas $y = \frac{2}{5}\ x + \frac{a}{10}$ con a entero impar, no intersecan a A_r. Entonces el radio r buscado es $\frac{d}{2}$.

Calculemos d :



$$tg\alpha = \tfrac{2}{5}; \quad tg\beta = ctg\alpha \text{ ya que } \beta = \pi/2 - \alpha$$

$$tg\beta = \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = \frac{d}{a} \Rightarrow \frac{d}{a} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{5}d;$$

$$\left(\tfrac{1}{5}\right)^2 = a^2 + d^2 \text{ por Pitágoras}$$

Luego $\dfrac{1}{25} = \left(\dfrac{2}{5}\ d\right)^2 + d^2 = \dfrac{29}{25}\ d^2 \Rightarrow d = \dfrac{1}{\sqrt{29}}$.

Por lo tanto, $r = \dfrac{1}{2\sqrt{29}}$.

Problema 2 (11, 3, 23, 23)

Para cada $n \in \mathbf{N}$ y $x \in \mathbf{R}$, definamos

$$f_n(x) = \frac{cos^2(x) + cos^2(2x) + cos^2(3x) + ... + cos^2(nx)}{n}$$

Investigar la existencia de $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para cada $x \in \mathbf{R}$ fijo y, cuando el límite exista, calcularlo.

Solución de Pablo Parrilo y Juan M. Heguiabehere, de la Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires.

Como $cos^2(x) = 1 - sen^2\, x$ y $sen^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}$, se tiene que:

$$f_n(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n} cos^2(kx)}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(1 - sen^2(kx))}{n} = \frac{n - \sum_{k=1}^{n} sen^2(kx)}{n} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-cos(2kx)}{2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} cos(2kx) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} Re(e^{i2kx}) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} Re\Big(\sum_{k=1}^{n} e^{i2kx}\Big) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} Re\Big(\sum_{k=1}^{n} (e^{i2x})^k\Big).$$

Se verifica que $e^{i2x} = 1 \iff 2x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \iff x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$. En este caso, $\sum_{k=1}^{n}(e^{i2x})^k = n$ y $f_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Si $x \neq k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}, e^{i2x} \neq 1$, y en este caso $\sum_{k=1}^{n}(e^{i2x})^k = \dfrac{(e^{i2x})^{n+1} - e^{i2x}}{e^{i2x} - 1}$.

Como

$$\left|\frac{(e^{i2x})^{n+1} - e^{i2x}}{e^{i2x} - 1}\right| \leq \frac{2}{|e^{i2x} - 1|} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{1}{2n}\ Re\Big(\frac{(e^{i2x})^{n+1} - e^{i2x}}{e^{i2x} - 1}\Big)$$

tiende a 0 cuando n tiende a infinito, y entonces $f_n(x)$ tiende a $1/2$ cuando n tiende a infinito.

En conclusión, para todo $x \in \mathbf{R}$ existe el límite, y vale:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \\ 1/2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Problema 3 (0, 0, 2, 58)

Sea $X \subseteq \mathbf{R}^2$ un conjunto infinito. Si la distancia entre cualquier par de elementos de X es un número entero, probar que todos los puntos de X están alineados.

Solución del Comité Organizador.

Sea X tal que la distancia entre cualquier par de elementos es un número entero. Supongamos además que X tiene tres puntos, A, B, C, no alineados. Veremos que X es finito.

En efecto, sea d la distancia entre A y B. Si P es un punto de X, debe ser entonces $|PA - PB| = i \leq d$, y por lo tanto $i = 0, 1, ..., d$. Si $i = 0$ ó $i = d, P$ se encuentra en el conjunto H_0 formado por: la recta determinada por A y B, y su perpendicular que pasa por el punto medio entre A y B (un par de ejes perpendiculares). Si $0 < i < d, P$ se encuentra en la hipérbola H_i de ecuación $|PA - PB| = i$. Haciendo el mismo análisis con los puntos A, C, se sigue que P debe estar también en alguno de los respectivos conjuntos, que denotamos $K_j, j = 0, 1, ..., s-1$ (donde s es la distancia entre A y C). Por lo tanto, P debe estar en alguna de las $d.s$ intersecciones $H_i \cap K_j, 0 \leq i < d-1, 0 \leq j < s-1$. Como hay a lo sumo 4 puntos en cada una de éstas (cada H_i, K_j, está definido por una ecuación de grado 2, y ningún H_i coincide con ningún K_j), el conjunto X puede tener a lo sumo $4d.s$ puntos.

Problema 4 (8, 3, 20, 29)

A partir de la sucesión $A_1 = (1, 2, 3, ..., n, ...)$ formada con todos los números naturales, construimos otra sucesión A_2 que consiste en eliminar todos los múltiplos de 4, e ir considerando las sumas parciales resultantes; es decir, $A_2 = (1, 3, 6, 11, 17, 24, 33, ...)$. Formamos ahora una nueva sucesión A_3 como resultado de eliminar todos los términos con índice múltiplo de 3 de A_2, y luego tomar la sucesión de sumas parciales resultantes; es decir, $A_3 = (1, 4, 15, ...)$. Finalmente, sea A_4 la sucesión resultante de eliminar todos los términos con índice par de A_3 y calcular luego la sucesión de sumas parciales. Encontrar una fórmula para el término general de A_4, y probarla.

Solución de Carlos Antonio D'Andrea de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura, Universidad Nacional del Nordeste.

Sea $A_2 = (A_n)_{n \in N}$. Para "armar" esta sucesión puede pensarse que se sumaron todos los naturales hasta un cierto m y se restaron de allí todos los múltiplos de 4 menores o iguales que m; para cada $n \in N$ si escribimos $n = 3k + r$, con $1 \leq r \leq 3$, tenemos que

$$a_n = a_{3k+r} = \sum_{j=0}^{4k+r} j - \sum_{j=0}^{k} 4.j =$$

$$= \frac{(4k+r)(4k+r+1)}{2} - \frac{4k(k+1)}{2} = 6k^2 + 4kr + \frac{r(r+1)}{2}, \quad k \in \mathbf{N}_0, \ 1 \leq r \leq 3.$$

Sea ahora $A_3 = (b_n)_{n \in \mathbf{N}}$; para obtener cada término, hay que tachar en A_2 los términos de la forma a_{3k+3} y sumar. Obtenemos entonces

$$\begin{aligned}
b_{2k+1} &= \sum_{j=0}^{k-1} (a_{3j+1} + a_{3j+2}) + a_{3k+1} = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} (6j^2 + 4j + 1) + (6j^2 + 8j + 3) + 6k^2 + 4k + 1 = \\
&= 12\sum_{j=0}^{k-1} j^2 + 12\sum_{j=0}^{k-1} j + 6k^2 + 8k + 1 = \\
&= 12\tfrac{(k-1)k(2k-1)}{6} + 12\ \tfrac{k(k-1)}{2} + 6k^2 + 8k + 1 = \\
&= 4k^3 - 6k^2 + 4k + 1.
\end{aligned}$$

Por último, la sucesión $A_4 := (c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se obtiene sumando los términos b_{2k+1} anteriores, o sea

$$\begin{aligned} c_k &= b_1 + b_3 + ... + b_{2(k-1)+1} = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (4k^3 - 6k^2 + 4k + 1) = \\ &= 4\big[\tfrac{k(k-1)}{2}\big]^2 - 6\tfrac{(k-1)k(2k-1)}{6} + 4\ \tfrac{k(k-1)}{2} + k = k^4. \end{aligned}$$

O sea que hemos demostrado que la sucesión A_4 es $(n^4)_{n\geq 1}$.

Problema 5 (7, 3, 4, 46)

A partir del intervalo $[0,1]$ se define $C_1 \subseteq [0,1]$, como $C_1 = [0,1/4]\cup[3/4,1]$, es decir, se divide el intervalo en cuatro partes iguales y se "guardan" la primera y la cuarta. (Esta construcción aplicada a un intervalo $[a,b]$ produce el conjunto: $[a, a+\frac{b-a}{4}] \cup [b-\ \frac{b-a}{4}, b]$). Luego se aplica esta construcción a cada uno de los intervalos de C_1 para obtener $C_2 \subseteq C_1$, $C_2 = [0,1/16] \cup [3/16,\ 4/16] \cup [12/16,\ 13/16] \cup [15/16, 1]$.

Así sucesivamente, se define $C_i \subseteq C_{i-1}$, C_i = conjunto formado por los intervalos resultantes de aplicarle la construcción a cada uno de los intervalos de C_{i-1}.

Sea $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$. Demostrar que todo número real en el intervalo $[0,3]$ puede obtenerse como suma de 3 elementos de C. Es decir:

$$[0,3] = \{x/x = x_1 + x_2 + x_3,\ \text{con } x_i \in C,\ i = 1,2 \text{ y } 3\}.$$

Solución de Ariel Lombardi y Virginia Naibo de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario.

Sabemos que si $x \in [0,1]$, entonces existen $x_n \in \{0,1,2,3\}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ tales que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{4^n}$, o sea, $0, x_1 x_2 ... x_n ...$ es la representación en base 4 de x.

Podemos ver que

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{4^n} \Big/ x_n = 0 \text{ ó } x_n = 3 \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \right\}$$

ya que $C_j = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{4^n} \Big/ x_n = 0 \text{ ó } x_n = 3 \quad \forall\, n \leq j \right\}$ (notemos que un número de la forma $0,\ x_1 ... x_n\ 10...0...$ también puede escribirse como $0, x_1 ... x_n\ 033...3...$).

Sean $x_1, x_2, x_3 \in C$, $x_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^i}{4^n}$ $i = 1,2,3$. Entonces, sumando término a término las series convergentes que los representan,

$$x_1 + x_2 + x_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^1}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^3}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^1 + x_n^2 + x_n^3}{4^n}.$$

como $x_n^i = 0$ ó $x_n^i = 3, i = 1,2,3,$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$, se tiene que $\sum_{i=1}^{3} x_n^i = 0, 3, 6$ ó 9.

Luego

$\sum_{i=1}^{3} x_n^i = 3.k_n$, con $k_n \in \{0,1,2,3\}$, y entonces $x_1 + x_2 + x_3 = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{4^n}$.

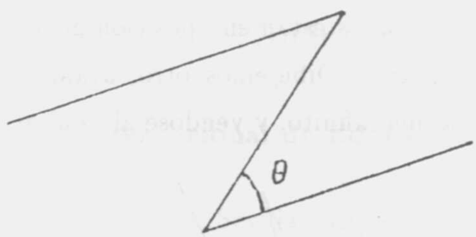
Sea $y \in [0,3], y = 3x$ con $x \in [0,1]$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{4^n}$.

Si $y_n = 0$, definimos $x_n^i = 0$, $i = 1,2,3$.
Si $y_n = 1$, definimos $x_n^1 = 3$, $x_n^2 = x_n^3 = 0$.
Si $y_n = 2$, definimos $x_n^1 = x_n^2 = 3$, $x_n^3 = 0$.
Si $y_n = 3$, definimos $x_n^i = x_n^2 = x_n^3 = 3$.

En todos los casos $\sum_{i=1}^{3} x_n^i = 3 \,.\, y_n$. Obviamente, si $x_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^i}{4^n}$, $i = 1, 2, 3$, se tiene que $x_i \in C$, $i = 1, 2, 3$ y $x_1 + x_2 + x_3 = y$. En efecto, $x_1 + x_2 + x_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^1 + x_n^2 + x_n^3}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \,.\, y_n}{4^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{4^n} = 3 \,.\, x = y$.

Problema 6 (2, 2, 3, 53)

Un zigzag en $\mathbf{R}^2$ está compuesto por 2 semirrectas paralelas con direcciones opuestas, y un segmento que une sus orígenes, de manera tal que el ángulo θ determinado sea agudo. Probar que es posible encontrar 100 zigzags que dividan al plano en por lo menos 44.651 regiones conexas.



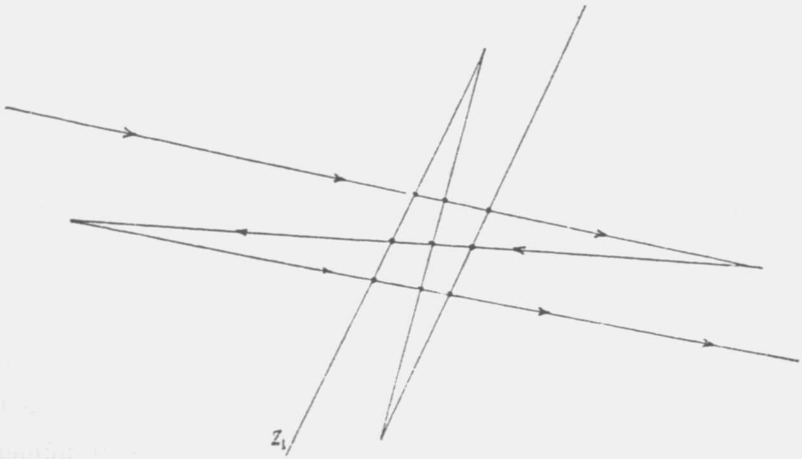
Solución combinada de las propuestas por Roberto M. Cautelier y Carlos D. Morán de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán y de Gustavo Massaccesi y Pablo Milrud de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA.

Veamos primero que se puede ubicar un número arbitrario de zigzags de forma tal que dos cualesquiera de entre ellos siempre se corten en 9 puntos, y que todos estos puntos sean distintos. En efecto, tomemos el correspondiente número de rectas en forma tal que dos cualesquiera de entre ellas se corten, y que todos los puntos así determinados sean distintos. Desdoblando cada una de estas rectas en tres paralelas suficientemente cercanas, se obtienen 9 intersecciones por cada punto.

Está claro que se puede inclinar la recta del medio, para formar el zig y el zag lo suficientemente lejos, de manera de obtener los zigzags en las condiciones buscadas.

Diremos que los zigzags así ubicados están en "posición general".

Sea $\mathbf{Z}_1$ un zigzag ya en el plano. Dibujemos otro, avanzando en el sentido indicado por las $\rightarrow$, viniendo del infinito, y yéndose al final al infinito.



Cada vez que se cruza Z_1 se agrega una región (al dividirse en dos una región que ya estaba). Como hay 9 intersecciones, a las 2 regiones originales se le agregan 9, y una más al llegar al infinito. Se tienen entonces $2 + 9 + 1$ regiones para 2 zigzags.

Sea $f(n)$ el número de regiones determinadas por n zigzags $Z_1, Z_2, ..., Z_n$

en posición general. Pensemos que se tienen $Z_1, Z_2, ..., Z_{n-1}$ ya en el plano. Cuando se dibuje Z_n, el análisis anterior sigue válido para Z_n con cada uno de los Z_i anteriores. Se tiene entonces

$$f(1) = 2, \quad f(n) = f(n-1) + 9(n-1) + 1.$$

Resolviendo esta recurrencia, resulta $f(n) = 9n(n-1)/2 + n + 1$, y $f(100) = 44.651$.

Noticias

8vo. Congreso Internacional de Educación Matemática

El ICME-8 tendrá lugar en Sevilla , España, del 14 al 21 de julio de 1996. Sus actividades se desarrollarán en la Universidad de Sevilla, y la organización estará a cargo de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".

El ICME-8 pretende continuar el objetivo de los ICME's anteriores: impulsar el desarrollo de la educación matemática, tanto en la investigación como en el mejoramiento de su aprendizaje y de su enseñanza. Se propone también extender solidariamente sus actividades para que participen profesores del mayor número posible de países, contribuyendo así a la realización de una de las metas señaladas para la celebración del Año Matemático Mundial en el 2000, bajo los auspicios de la Unión Matemática Internacional.

Programa Científico: El congreso contará con:

- Cuatro Conferencias Plenarias. Mesa redonda internacional.
- Sesenta Conferencias Regulares (10 conferencias en paralelo).
- Veintiseis Grupos de Trabajo (donde se discutirán temas claves de edu-