Análisis y categorización de errores en matemática

Cristina Esteley (*) - Mónica Villareal (**)

Introducción.

El objetivo global de este proyecto es categorizar los errores cometidos por los alumnos de primer año de Ciencias Agropecuarias de la Universidad Nacional de Córdoba al resolver problemas o ejercicios sobre función, límite y continuidad de funciones reales de una variable ($f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$).

Para lograr la categorización se parte de las categorías empíricas ya construídas en un trabajo anterior (Esteley y Villarreal, 1990). Decimos que esta categorización es empírica pues no partimos de ninguna teoría del aprendizaje. Tomamos como base una extensión de los principios de Ginsburg (1977) que se enuncian a continuación:

1) "Los errores resultan de aplicar estrategias y reglas organizadas" Exite generalmente una razón para estos errores y la razón es la aplicación de una regla sistemática".

2) "Las reglas erróneas en las que se basan tienen un origen sensible. Generalmente las derivan de lo que se les ha enseñado; objetivamente las derivaciones son ilógicas e incorrectas, pero psicológicamente tienen sentido para quien lo aplica.

3) "A menudo los niños ven la matemática como aislada de sus preocupaciones ordinarias. Ven la matemática como un especie de juego con sus propias reglas no relacionadas con otras actividades".

4) " Los niños muestran tener un abismo entre el conocimiento formal y el informal. Para ellos la matemática escrita es un juego y no la relacionan al conocimiento informal, ya existente, que tienen de la matemática".

Y asumimos la siguiente afirmación de Brousseau (1983).

"Un error no es solo consecuencia de la ignorancia, de la inseguridad o de un accidente. Un error puede ser consecuencia de un conocimiento previo que tuvo su propio interés, su éxito, pero que aparece como falso bajo nuevas circunstancias, o más simplemente no adaptado. Así, en un análisis didáctico, los errores no son entendidos como meras fallas de los alumnos sino más bien como síntomas de la naturaleza de las concepciones que subyacen en sus actividades matemáticas".

Davis (1986) también asume la idea de que los errores no son al azar y además toma como base de sus estudios sobre errores la Teoría del Procesamiento de la Información. A partir de ello, clasifica errores presentes en el manejo de los conceptos de límite y continuidad, como errores de representación y errores de reconocimiento.

Williams (1991), realiza un trabajo en el que asume que los errores no son al azar y además que las preconcepciones de los alumnos juegan un importante rol en la formación de conceptos. Con estas ideas logra identificar en un grupo de alumnos seis tipos de concepciones erróneas en el concepto de límite de una función y una gran resistencia para modificarlas.

METODO

Fuente de Datos

La categorización de errores en el concepto de función se realiza a partir de la resolución escrita de ejercicios, correspondiente al segundo parcial del Ciclo de Nivelación, completados por 399 alumnos ingresantes a la carrera de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agropecuarias de la Universidad Nacional de Córdoba. Mientras que la categorización de errores en los conceptos de límite y continuidad se realiza a partir de la resolución escrita de ejercicios, correspondiente al segundo parcial del curso regular, completados por 247 alumnos que cursan el primer año de Ingeniería Agronómica en la facultad antes mencionada.

Procedimiento

Del total de respuestas a los ejercicios se toman sólo aquellas que presentaron algun error.

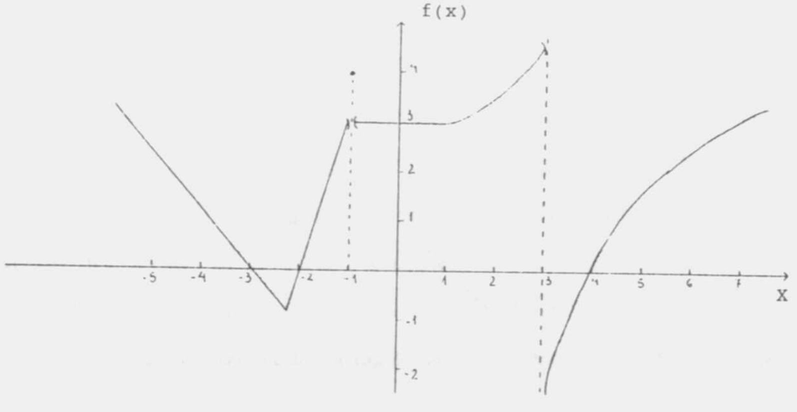
Para la categorización se tiene en cuenta sólo lo que el alumno realiza sin considerar qué no entiende.

Una vez identificados los errores por ejercicio y por item, se determina la frecuencia de cada uno de ellos y se comparan con las categorías ya creadas (Esteley y Villarreal 1990), con el fin de estudiar si éstas contienen todos los errores encontrados o si es necesario crear nuevas categorías. No se determina la frecuencia por categoría ya que este dato no aporta elementos respecto de los errores propios de los temas estudiados en este trabajo.

Se tipifican y analizan los errores característicos de los conceptos de función, límite y continuidad sin perder de vista que estos errores son dependientes de los ejercicios seleccionados y del modo en que son desarrollados en las clases teóricos-prácticas (ver ANEXO 1).

Finalmente se comparan los errores presentes en las resoluciones de los ejercicios 1 y 2.

Instrumentos



Los ejercicios completados en forma escrita por los alumnos son los siguientes:

<u>Ejercicio 1</u>: Dado el gráfico anterior responda a las preguntas correspondientes

a) Cuál es el dominio de esta función?

b) Cuál es la imagen del cero?

c) Cuánto vale $f(-1)$?

d) Pasa por el punto $(0,3)$?

e) En que puntos corta al eje x?

f) Es la función constante en algún intervalo? En cuál?

<u>Ejercicio 2</u>: Grafique una función que cumpla **simultáneamente** las siguientes condiciones:

a) $Dom\ f = R - \{3\}$

b) La imagen de 0 es 3

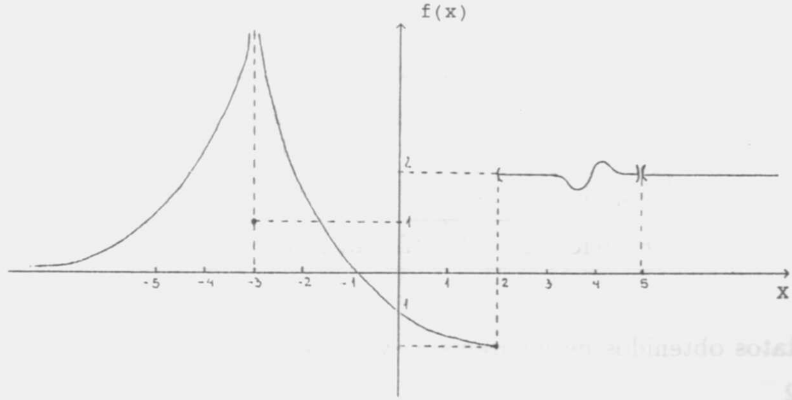
c) $f(-1) = 1$

d) Corta al eje x en -3

e) Pasa por $(4,0)$

f) Para valores grandes de x, $f(x)$ se hace constante

La categorización de errores en los conceptos de límite y continuidad se realizó a partir de los errores presentes en la resolución del siguiente ejercicio:



Ejercicio 3: Dado el gráfico anterior

a) Encuentre el Dominio de f.

b) Calcule

$$A)\ \lim_{x\to -3^+} f(x) = \qquad B)\ \lim_{x\to -3^-} f(x) =$$
$$C)\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \qquad D)\ \lim_{x\to 2^-} f(x) =$$
$$E)\ \lim_{x\to -1} f(x) = \qquad F)\ \lim_{x\to -\infty} f(x) =$$

c) Indique los puntos en los cuales la función **no** es continua y explique cuál es la condición de continuidad que **no** se verifica en cada caso.

RESULTADOS

Del total de parciales que incluyen el tema de funciones, resueltos en el Ciclo de Nivelación, 235 (59 %) presentan algún error en el ejercicio 1 y 166 (42 %) en el ejercicio 2. Del total de parciales que incluyen los temas de límite y continuidad, resueltos en el curso regular, 175 (71 %) presentan algún error en el ejercicio 3.

Los datos obtenidos en los ejercicios 1 y 2 se presentan en la tabla $n^o 1$.

Tabla $n^o 1$

Porcentajes de errores

	Items					
	a	b	c	d	e	f
Ejercicio 1	82	27	42	19	26	59
Ejercicio 2	72	27	43	10	33	33

Los datos obtenidos de los items a) y b) del ejercicio 3 se presentan en la tabla $n^o 2$

Tabla $n^o 2$

Porcentajes de errores

	Item						
		b					
	a	A	B	C	D	E	F
Ejercicio 3	52	13	14	13	15	35	38

Ya que en el item c) se pide determinar puntos de discontinuidad y justificar, puede ocurrir que un alumno identifique o no un punto de discontinuidad y, entre los que identifican los puntos de discontinuidad pueden presentarse tres casos:

-no realizar justificación alguna,

-justificar bien o

-justificar mal

Esta información respecto del item c) se presenta a continuación en las tablas $n^o 3$ y $n^o 4$.

Nota: en el item c) del ejercicio 3 los puntos de discontinuidad son $x = -3$, $x = 2$ y $x = 5$. A fin de poder realizar el análisis estadístico hemos denominado I, II y III a las respuestas dadas en cada uno de estos puntos respectivamente.

Tabla $n^o 3$

Porcentajes de identificación

	Item		
	c		
	I	II	III
Ejercicio 3	84	82	91

Tabla $n^o 4$

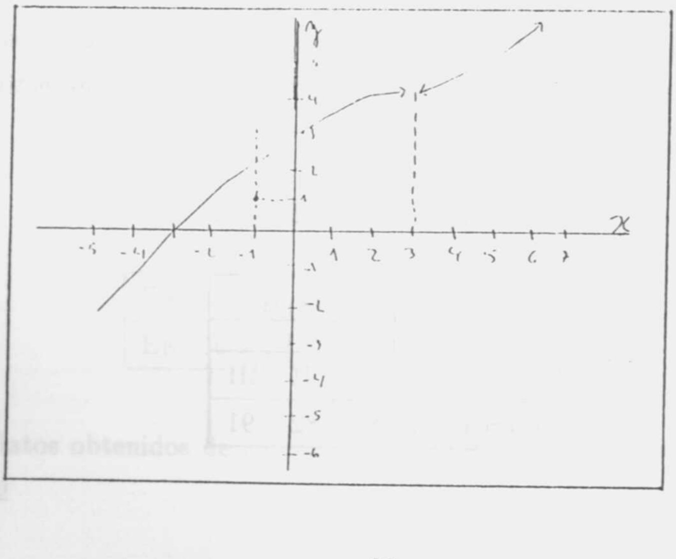
Porcentajes de Justificación

	Item c		
	I	II	III
No justifica	19	22	23
Justifica bien	26,5	42	39
Justifica mal	54,5	36	38

Al analizar el conjunto total de errores se observa que pueden incluirse en la categorías denominadas B, C, y E construídas en el trabajo: "Categorización de errores en Matemática" (Esteley y Villarreal 1990). Estas categorías se definen del siguiente modo:

CATEGORIA B

No empleo o empleo parcial de la información proporcionada en un problema.

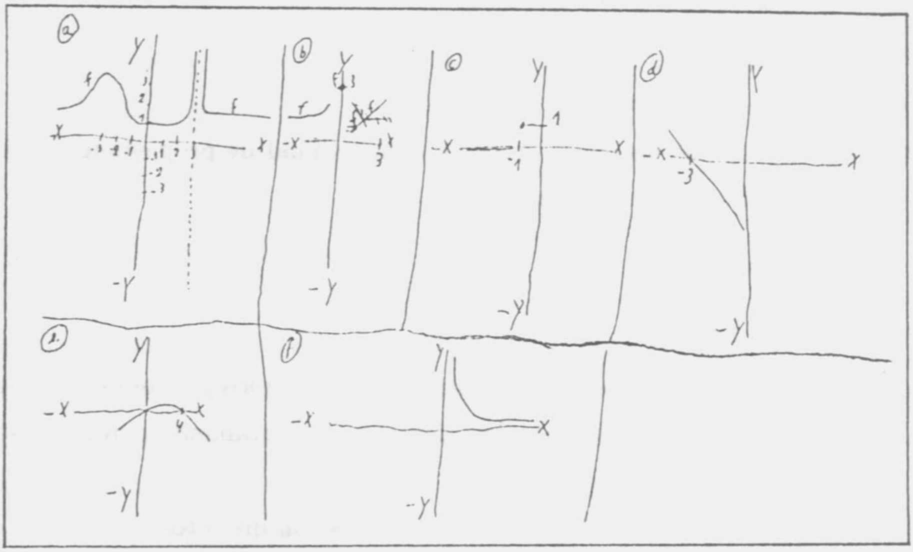


Ejemplos:

-En el ejercicio 2 un alumno realiza el gráfico:

Como se puede observar además de no representar el gráfico de una función ($x = -1$ tiene dos imágenes) no respeta las condiciones e) y f) del ejercicio.

-También en el ejercicio 2, otro alumno, no respeta la condición **simultáneamente**, realizando un gráfico para cada condición dada.



CATEGORIA C

No verificación de resultados parciales o totales

Ejemplos

- En el ejercicio 1 -b), en el que se pregunta cuál es la imagen del cero, un alumno escribe:

$$Rta = (0,1)$$

Sin embargo al responder la pregunta del item d) (pasa por el punto (0 , 1)?)

escribe:

$$Rta = no$$

- En el ejercicio 1-a) un alumno responde:

$$Df = R - \{4, -2\}$$

No obstante al responder a la pregunta del item c), escribe:

$$f(-2) = -1$$

CATEGORIA E

No verificación de las condiciones de aplicabilidad de propiedades, definiciones o teoremas a un caso particular.

Ejemplos

-En el ejercicio 3-c), en el que se solicita determinar los puntos de discontinuidad de la función dada, un alumno los identifica correctamente pero, al justificar la discontinuidad en $x = 5$ expresa:

"En 5 los límites laterales son distintos"

-Mientras que otro alumno, en el mismo ejercicio, al justificar la discontinuidad en $x = -3$, expresa:

"No es continua en $x = -3$ porque $f(-3)$ no está definida"

Análisis y tipificación de errores por ejercicio

Ejercicio 1.

Del 83 % de alumnos que cometen errores en la determinación del dominio (item a) 35 % de ellos identifican el dominio de la función con el dominio de continuidad, siendo éste el error mas destacable en este item.

Otros errores son:

-Asociar el dominio de la función con el conjunto de puntos de corte con el eje X.

- Identificar el dominio con el conjunto de puntos que no tienen imagen.

- Considerar como dominio subconjuntos de $\mathbf{Z}$.

Si bien el porcentaje de errores al dar la imagen del 0 (item b) no es alto, es importante destacar algunas de las respuestas dadas. Por ejemplo:

- Asociar al 0 mas de una imagen, en particular dar como imágenes los puntos de cortes con el eje X, como si respondieran a la pregunta: "De qué x es imagen el 0?".

- Asignar como imagen del 0 el 0.

Al pedir la imagen de -1 (item c) donde la función presenta una discontinuidad, pero esta definida, es notable el porcentaje de alumnos (65 %) que, habiendo eliminado este punto del dominio, determinan su imagen, mostrando una desconexión con el item a).

Otro error que se repite aqui es asociar a un elemento del dominio de una función, mas de una imagen.

Si bien el porcentaje de errores para determinar si el punto (0,3) pertenece al gráfico de la función (item d) es pequeño, llama la atención la incoherencia en las respuestas de algunos alumnos con respecto al item b) en el que indican como imagen de 0 un valor distinto de 3.

Al pedir el intervalo del dominio en el que la función es constante (item f) se obtiene el segundo porcentaje en respuestas erróneas. Entre dichas respuestas se encuentra dificultad para determinar si los intervalos son abiertos, semiabiertos o cerrados. Algunas respuestas, en lugar de considerar el intervalo en el dominio, dan los puntos del plano entre los cuales el gráfico es un segmento de recta paralelo al eje X.

Ejercicio 2.

En este ejercicio el alumno debe construir el gráfico de una función que cumpla seis condiciones.

La primera condición: $Dom\ f = \mathbf{R} - \{3\}$ no es respetada por el 72 % de los alumnos. Los dominios que consideran son:

	Porcentajes (%)
I - R	57
II - Un subconjunto propio de $\mathbf{R} - \{3\}$	28
III- Un subconjunto propio de $\mathbf{R}(\neq \mathbf{R} - \{3\})$ que contiene a $\{3\}$	15

En los items b), c), d) y e) la condición que se da es del tipo "para x ... el valor correspondiente de y es ..." expresada en diferentes lenguajes de uso común en matemática:

-En el item b) se utiliza un lenguaje coloquial, empleando el término **imagen** caracterizado al definir una relación.

-En el item c) se utiliza un lenguaje simbólico cuya notación presumimos como menos diferenciada en las estructuras cognitivas de los alumnos (Se presume como menos diferenciada por la menor experiencia previa con esta notación).

-En el item d) se emplea un lenguaje coloquial, con una terminología más común que el utilizado en el item b).

-En el item e) se emplea un lenguaje simbólico cuya notación presumimos como más diferenciada en las estructuras cognitivas que en el item c).

Las respuestas que no respetan las condiciones dadas en dichos items pueden distribuirse de la siguiente manera:

	Porcentajes (%)
I - Dar a x una imagen distina de y	70
II - Asociar a x más de una imagen	11
III - Asociar a y la imagen x	19

A pesar de poder caracterizar los errores presentes en los items b), c), d) y e) del mismo modo, es importante notar la diferencia de frecuencia de errores en cada item.

1) El mayor porcentaje de errores se presenta en los items en los cuales se emplea un lenguaje simbólico.

2) Entre los dos items que emplean lenguaje simbólico la mayor frecuencia se alcanza en el item c) donde se presume una menor diferenciación cognitiva con respecto a la notación utilizada.

3) entre los dos item que emplean lenguaje coloquial la mayor frecuencia se da en el item b) donde se utiliza terminología específica del tema.

Entre las respuesta que no respetan la condición de que a valores grandes de $x f(x)$ se hace constante, es importante destacar que algunos alumnos, a partir de un x arbitrario, grafican una recta paralela al eje Y.

A pesar de que se pide realizar el gráfico de una función y si bien se respetan algunas de las condiciones dadas, el 40 % de los alumnos no realiza el gráfico de una función.

Ejercicio 3.

Del 52 % de alumnos que cometen errores en la determinación del dominio (item a) 52 % de ellos identifican el dominio de la la función como el conjunto

$\mathbf{R} - \{-3, 5\}$, siendo este el error más destacable en este item. En $x = -3$ la función presenta una discontinuidad pero está definida en ese punto; en $x = 2$ hay otra discontinuidad y f también está definida en este punto, sin embargo no es eliminado del dominio (sólo el 8 % lo hace).

En cuanto a la identificación de los puntos de discontinuidad (item c) podemos decir que no se presentan mayores dificultades, como lo muestra la tabla n^o3. No obstante, entre los alumnos que identifican los puntos de discontinuidad se observa un porcentaje significativo que da justificaciones erróneas.
Las justificaciones erróneas se tipifican y se distribuyen de la siguiente manera:

En $x = -3$

	Porcentajes (%)
No existe $f(-3)$	31
No existe $\lim_{x \to -3} f(x)$	23
No es derivable en $x = -3$	16
El gráfico "se corta en $x = -3$"	12
Otras	18

En $x = 2$

	Porcentajes (%)
No existe $f(2)$	13
$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$	13
No es derivable	9
El gráfico "se corta en $x = 2$"	30
Otras	35

En $x = 5$

	Porcentajes (%)
No existe el $\lim_{x \to 5} f(x)$	19
$\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$	17
No es derivable	16
El gráfico "se corta en $x = 5$"	27
Otras	21

Comparación entre los ejercicios 1 y 2

Los ejercicios 1 y 2 son similares pues se realizan preguntas semejantes respecto de los mismos conceptos pero se diferencian en lo siguiente: para responder las preguntas del ejercicio 1 es necesario partir de la información proporcionada por el gráfico de una función, mientras que en el ejercicio 2 se debe construir el gráfico de una función que cumpla con las condiciones dadas.

Ejercicio 1

$$\boxed{\text{GRAFICO}} \underset{\text{lleva a construir}}{\overset{\text{lleva a encontrar}}{\rightleftarrows}} \boxed{\text{INFORMACION}}$$

Ejercicio 2

A pesar de la diferencia descripta entre estos ejercicios es posible comparar los items a), b) y c) del ejercicio 1 con los correspondientes items del ejercicio 2 (por la información solicitada o presentada). Al realizar la comparación se observa que en ambos, la mayor ocurrencia de errores se manifiesta en la aplicación del concepto de dominio de una función. Tambien se advierte una notable similitud en los porcentajes de errores en los items 1b-2b y 1c-2c (Ver tabla $n^o 1$).

DISCUSION

Como se marca en la introducción el objetivo de este trabajo es categorizar errores en la resolución de ejercicios en los que se aplican los conceptos de función, límite y continuidad. Este conjunto de errrores depende, entre otros aspectos, del nivel de formalización que se logra en las clases teóricos-prácticas donde se desarrollan dichos conceptos y de los ejercicios seleccionados. Por lo tanto los resultados y conclusiones de este trabajo deben ser leídos dentro de ese contexto.

En los ejercicios 1-a, 2-a y 3-a es necesario aplicar el concepto de Dominio de una función para resolverlos. Curiosamente en cada uno de estos items se presenta el mayor porcentaje de errores comparado con los items restantes de cada ejercicio. Mostrando quizás una mayor dificultad en el manejo del concepto que la esperada para este tipo de ejercicios.

Con respecto a los ejercicios 1-b y c, y 2-b y c en los que se debe aplicar el concepto de imagen de un punto por una función los errores dependen de la notación empleada para solicitar o presentar la información.

Como se muestra en la sección de resultados los alumnos no tienen dificultad en identificar los puntos de discontinuidad de la función dada en el ejercicio 3, pero sí manifiestan errores al justificar la discontinuidad en los puntos correspondientes. Entre las razones dadas las mas llamativas son:

-Considerar que la función no es contínua en el punto porque no es derivable en dicho punto.

Por ejemplo algunos de los alumnos afirman:

> "Una de las condiciones generales de discontinuidad de fuciones es que para que la función sea contínua debe ser derivable en el punto indicado. Pero si una función es contínua en un punto la función puede o no ser derivable."
>
> No debe cortarse en ningún punto y luego seguir. Además, para que

sea contínua f debe ser derivable en ese punto"

- Considerar que la función no es contínua en el punto por presentar un corte o un salto.

Por ejemplo algunos alumnos afirman:

> "La condición de continuidad es que en el trazado de la función no se levanta el lápiz."
>
> "Para que una función sea contínua debe poder dibujarse sin levantar el lápiz."
>
> "La condición es que no debe haber saltos para que sea contínua, o sea no debe haber huecos."
>
> "Las funciones $f(x)$ son diferentes..."

El primer tipo de error llama la atención pues en las clases teórico-prácticas se presenta el teorema que afirma que "Si $y = f(x)$ es derivable en $x = a$ entonces f es contínua en $x = a$" y se dan ejemplos que muestran que la recíproca es falsa. No obstante ello utilizan la recíproca para justificar la discontinuidad en un punto.
Con respecto al segundo tipo de error es necesario destacar que si bien en las clases teórico-prácticas se menciona la idea intuitiva de discontinuidad como un "salto en el gráfico" o un "hueco en el gráfico" se pone énfasis en la necesidad de recurrir a las condiciones dadas en la definición formal de continuidad para el estudio de discontinuidad en un punto. A pesar de esto, a algunos alumnos les basta recurrir a estas ideas intuitivas para justificar la discontinuidad en un punto.
Sin embargo cabe preguntarse hasta que punto estos errores no son inducidos por las estrategias didácticas utilizadas para presentar estos temas.
Finalmente cabe destacar que se presentan errores en la utilización de notación

funcional ($y = f(x)$), de intervalos, y de pares ordenados. Tanto estos errores en el empleo de notaciones matemáticas como algunas de las dificultades mostradas en la sección de Resultados en los ejercicios 1 y 2 en cuanto al trabajo con lenguaje simbólico nos lleva a preguntarnos respecto de la incidencia del lenguaje matemático y su simbología sobre la comprensión de los conceptos analizados en este trabajo.

Si bien en los trabajos de Davis (1986) y Williams (1991) se parte de las ideas que alumnos universitarios poseen en los conceptos de límite o continuidad y de que los errores no son al azar, los resultados por ellos reportados no se pueden comparar totalmente con los de este trabajo ya que ellos exploran las concepciones de los alumnos luego que estos desarrollaron en clases teóricas la definición formal de límite, mientras que los alumnos de Ciencias Agropecuarias no.

Pero sí es importante destacar que en el caso de continuidad los trabajos son coincidentes en el sentido de que, a pesar de haberse dado las condiciones de continuidad en un punto, los alumnos utilizan sus ideas más en el momento de aplicar el concepto a un ejercicio particular.

BIBLIOGRAFIA

Brousseau, G., (1983). Les obstacles épistémologiques et les problémes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Maathématiques*, Vol. 4, N^2, pp. 165-198.

Davis,R.B., 1986. Learning Mathematics. The cognitive science aproach to Mathematics Education. (Ablex Publishing Corporation: New Jersey).

Esteley, C.B. y Villarreal, M.E., 1990 Categorización de errores en Matemática. Trabajo presentado en la XIII Reunión de Educación Matemática. (San Luis).

Ginsburg, H., 1977. Children's Arithmetic. How they learn it and how you teach it. (Litton Educational Publishing, Inc.).

Williams, S.R., 1991. Models of limit held by college calculus students, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 22, n. 3, pp. 219-236.

ANEXO 1

Previo a la evaluación escrita de los conceptos de función, límite y continuidad, los alumnos son introducidos a dichos conceptos a través de clases teórico-prácticas.

El concepto de función es desarrollado en el Curso de Nivelación. Primeramente, se define *relación* como una asociación que asigna a elementos de un primer conjunto llamado *conjunto de partida*, elementos de un segundo conjunto llamado *conjunto de llegada*. Designándose con el nombre de *dominio (Dom)* al subconjunto del conjunto de partida cuyos elementos están relacionados con alguno en el conjuunto de llegada y llamándose *imagen (Im)* al subconjunto del conjunto de llegada cuyos elementos están relacionados con alguno en el conjunto de partida. Se trabaja con diagramas sagitales y se analiza una gran variedad de ejemplos.

A partir de estos elementos se define una *función* como una relación que asocia a **todo** elemento del conjunto de partida **uno y solo uno** en el conjunto de llegada, llamado imagen. Remarcándose que para que una relación sea función deben cumplirse dos condiciones:

Que el Dominio coincida con el conjunto de partida.

Que cada elemento del dominio tenga solo una imagen.

Posteriormente se comienza a trabajar con funciones numéricas, se introduce la notación de par ordenado, la notación funcional convencional ($y = f(x)$), gráfico de funciones, la idea de función constante y cortes con los ejes coordenados. Se hace hincapié en la interpretación de la información presente en el gráfico de una función en coordenadas cartesianas como así también en el modo de obtener el gráfico de una función a partir de información proporcionada. Se estudia el modo de distinguir gráficos que representan funciones de aquellos que no lo son.

En la unidad anterior se definen intervalos abiertos, cerrados y semiabiertos empleando la notación de conjunto y trabajando en la recta numérica para su representación gráfica.

El concepto de límite se estudia sólo intuitivamente, es decir no se trabaja la definición formal con ϵ y δ.

Primeramente se visualiza la idea de límite finito para $x \to a$ (con $a \neq \infty$) a través de distintos gráficos de funciones continuas y discontinuas, remarcando que para calcular el límite en un punto no interesa lo que ocurre en el punto sino en un entorno del mismo.

Se introduce la notación de límite.

Posteriormente se comienza a estudiar límites infinitos para $x \to a$, límites finitos para $x \to \infty$ y límites infinitos para $x \to \infty$, siempre trabajando sobre gráficos.

Después de esta introducción de tipo gráfico-intuitiva se hace la observación de que si bien, hasta el momento, se han calculado límites a partir de la información presentada en un gráfico, una de las aplicaciones mas importantes de límite es brindar información para completar el gráfico de una función dada por una expresión matemática.

Se calculan algunos límites trabajando con las funciones estudiadas hasta el momento (lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas), se estudian las propiedades del límite que permiten calcular límites de suma, resta, producto y cociente de funciones y se grafican funciones a partir de condiciones dadas por algunos límites.

El concepto de continuidad en un punto se define del siguiente modo:

La función $y = f(x)$ es contínua en $x = a$ si y sólo si se verifican tres condiciones

1) Existe $f(a)$ (f este definida en $x = a$)

2) Existe $\lim_{x \to a} f(x)$

3) $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

El concepto de continuidad también es trabajado con la ayuda de gráficos.

(*) Universidad Tecnológica Nacional - Regional Mendoza.

(**) Facultad de Ciencias Agropecuarias - Universidad Nacional de Córdoba.