http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2022.v11i2p072-091

Operar com números positivos no GeoGebra: implicações didáticas

Operating with positive numbers in GeoGebra: didactic implications

JOSÉ ANTÓNIO FERNANDES[1]
https://orcid.org/0000-0003-2015-160X

RESUMO

Este artigo tem por objetivo estudar operações numéricas a partir da Geometria e extrair consequências para o ensino. Para tal, recorrendo a uma vertente teórica, neste artigo estuda-se e discute-se a exploração de várias operações numéricas com o GeoGebra, bem como a aplicação de algumas delas para criar representações gráficas de funções. Especificamente, recorrendo ao ambiente geométrico dinâmico GeoGebra, exploram-se, no conjunto dos números positivos, as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e raiz quadrada, e aplicam-se as operações de multiplicação, divisão e raiz quadrada à definição de representações gráficas. Uma vez exploradas as operações numéricas, adotando uma perspetiva de aprendizagem de conceitos, realiza-se uma análise dos objetos matemáticos intervenientes nessas operações, destacando-se as três seguintes dimensões: 1) enumeração dos objetos matemáticos intervenientes em cada operação; 2) as relações entre as operações e os objetos matemáticos; 3) e aplicação dessas relações para estabelecer a complexidade das operações.

Palavras-chave: *operações numéricas; objetos matemáticos; GeoGebra.*

ABSTRACT

This paper aims to study numerical operations from Geometry and extract consequences for teaching. To this end, using a theoretical approach, this article studies and discusses the exploration of various numerical operations with GeoGebra., as well as the application of some of them to create graphical representations of functions. Specifically, using the GeoGebra dynamic geometric environment, the operations of addition, subtraction, multiplication, division, and square root are explored in the set of positive numbers, and the operations of multiplication, division and square root are applied to the definition of graphical representations. Once the numerical operations have been explored, adopting a concept learning perspective, an analysis of the mathematical objects involved in these operations is carried out, highlighting the following three dimensions: 1) enumeration of the mathematical objects involved in each operation; 2) the relationships between operations and mathematical objects; 3) and application of these relationships to establish the complexity of operations.

Keywords: *numerical operations; mathematical objects; GeoGebra.*

[1] Universidade do Minho – jfernandes@ie.uminho.pt

Introdução

A utilização das tecnologias da informação e comunicação não tem deixado de aumentar nas sociedades atuais, atravessando a vida das pessoas, as empresas, as instituições sociais e os próprios governos. Ora, esse movimento tecnológico tem-se também refletido nas escolas. Atualmente, por todo o mundo, advoga-se o uso das novas tecnologias no ensino e aprendizagem escolar, desde os níveis escolares iniciais até ao ensino superior.

A defesa da utilização das novas tenologias no ensino e aprendizagem é bem patente nas reuniões de docentes e académicos e na documentação publicada em revistas, livros e atas de congressos, incluindo nos próprios documentos curriculares oficiais. Tal como na generalidade das disciplinas curriculares, também na disciplina de matemática se preconiza o uso das novas tecnologias, talvez até com maior veemência do que em outras disciplinas.

Nos documentos curriculares, de diversos países, preconiza-se o uso das novas tecnologias no ensino e aprendizagem da matemática. No caso do documento *Principles and Standards for School Mathematics*, do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000), associação de professores de matemática do Estados Unidos da América e do Canadá, um dos seis Princípios intitula-se exatamente o Princípio da Tecnologia. Também em Portugal os próprios programas escolares de matemática vêm recomendando o uso das novas tecnologias (Fernandes, Alves, Viseu & Lacaz, 2006). Já no Brasil, na *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC) (MEC, 2018) advoga-se o uso das mídias digitais ao longo de todo o ensino fundamental e médio, salientando-se ao nível das competências específicas do ensino fundamental, das competências especificas de matemática e suas tecnologias do ensino médio e das habilidades a desenvolver nas várias unidades temáticas.

A utilização das novas tecnologias nas aulas de matemática justifica-se porque elas têm potencial para promover uma aprendizagem mais profunda e significativa, favorecer uma abordagem indutiva ou experimental da matemática e desenvolver as suas aplicações e conexões (Fernandes & Vaz, 1998). Particularmente no GeoGebra, destacam-se as suas potencialidades dinâmicas e aplicações em diferentes áreas, como seja o Cálculo, a Álgebra, a Geometria e a Estatística, incluindo mesmo aspetos da prova matemática (Fernandes, 2022).

No caso das conexões, elas são também referidas e valorizadas na literatura educacional, incluindo os documentos curriculares. Dos documentos citados antes, nos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) as conexões são um tema de cada um dos níveis escolares e no BNCC (MEC, 2018) as aplicações e conexões ocupam também um lugar de destaque. Já os programas atualmente em vigor em Portugal (Ministério da Educação e Ciência, 2013, 2014) praticamente omitem a questão das conexões, a que não será estranho o facto de nesses programas se elencarem detalhadamente os conteúdos e objetivos e não serem apresentadas sugestões metodológicas específicas para explorar os diferentes temas/conteúdos (Henriques & Fernandes, 2015).

No contexto antes referido, o presente estudo tem por objetivo estudar operações numéricas a partir da Geometria e extrair consequências para o ensino. Para tal, recorrendo ao software de geometria dinâmica GeoGebra, exploram-se operações com números positivos, especificamente a adição, subtração, multiplicação, divisão e raiz quadrada, bem como a aplicação das operações de multiplicação, divisão e raiz quadrada à definição de representações gráficas de funções. Seguidamente, numa perspetiva de aprendizagem de conceitos, analisam-se os objetos matemáticos intervenientes nas operações e estudam-se as conexões matemáticas estabelecidas entre as operações. Trata-se, portanto, de conexões intra-matemáticas que relacionam duas ou mais ideias, conceitos, definições, teoremas, procedimentos, representações e significados (García-García & Dolores-Flores, 2018).

Concluída a secção de introdução, onde enunciámos a problemática e a justificação da importância do estudo, segue-se a secção do referencial teórico, onde revemos e discutimos a problemática das conexões matemáticas. Na próxima secção exploram-se, com o GeoGebra, as diferentes operações com números positivos, seguindo-se, na secção seguinte, a discussão das conexões evidenciadas nas operações efetuadas. Por fim, sintetizam-se as principais conclusões e implicações do estudo.

1. Referencial teórico

São muito diversos os contextos em que se podem estabelecer conexões matemáticas, nomeadamente podem ser ligadas a situações do quotidiano, a conhecimentos prévios, a contextos familiares escolares e não escolares, a diferentes tópicos matemáticos, a outras disciplinas e a situações do passado e do futuro. Assim, em resumo, as conexões podem envolver tópicos matemáticos, tratando-se de conexões intra-matemáticas, ou relacionar tópicos matemáticos e outras disciplinas ou situações da vida real, tratando-se de conexões extra-matemáticas.

No caso dos conhecimentos prévios, Ausubel, Novak e Hanesian (1980) defendem que a aquisição de novo conhecimento deverá alicerçar-se nesses conhecimentos prévios, sendo mesmo um requisito para uma aprendizagem significativa, portanto mais profunda e que promove uma melhor retenção. No mesmo sentido, os construtivistas advogam que as atividades de ensino devem ser organizadas tendo em conta os conhecimentos e experiências prévias dos alunos, as quais se referem ao conjunto de ideias que o aluno possui, adquiridas na escola ou fora da escola, e que se assumem como ideias particularmente problemáticas quando elas entram em conflito com o saber normativo que as escolas devem desenvolver nos alunos (Fernandes, 1990).

Soares (2009), no âmbito da sua dissertação de mestrado, definiu uma intervenção de ensino seguindo os princípios da aprendizagem significativa preconizados por Ausubel et al. (1980) e integrando também novas tecnologias. A intervenção de ensino incidiu sobre o tema de Geometria Analítica e foi aplicada a duas turmas de alunos da terceira série do ensino médio. Da avaliação realizada, o autor verificou uma considerável melhoria dos resultados obtidos pelos alunos do pré-teste para o pós-teste, levando-o a concluir que a estratégia seguida na intervenção de ensino é adequada para ensinar a Geometria Analítica aos alunos em questão.

No caso das conexões intra-matemáticas, que são aquelas que são objeto do presente estudo, as relações entre os conceitos materializam uma visão dinâmica e realista da matemática porque, por um lado, na resolução de qualquer problema são vários os conceitos que intervêm e, por outro, a própria matemática organiza-se a partir de estruturas. A importância destas ligações, que com os próprios conceitos formam uma rede, destaca a importância da noção de esquema (Skemp, 1993).

Na aprendizagem baseada em esquemas, a nova informação interage com os conceitos existentes na estrutura cognitiva do aprendiz e torna-se significativa quando essa informação se relaciona com conceitos relevantes preexistentes na mente do aprendiz (Novak & Gowin, 1996). Nesta perspetiva, os conceitos organizam-se segundo uma hierarquia concetual em que conceitos mais específicos se ligam a conceitos mais gerais, mais inclusivos, sendo mais fácil aos alunos captar aspetos distintos de um todo mais inclusivo, mais geral, do que chegar ao todo a partir das suas partes diferenciadas.

Partindo da aprendizagem significativa e da hierarquia concetual, Novak e Gowin (1996) desenvolveram os chamados mapas de conceitos que são redes diagramáticas usadas para organizar e representar o conhecimento de conceitos, em que a generalidade e inclusão dos conceitos vão diminuindo à medida que se vai descendo na rede, ficando, portanto, os conceitos mais gerais e inclusivos na parte superior da rede e os mais específicos e restritivos na parte inferior. Deste modo, os alunos têm a oportunidade de desenvolver o significado dos temas, de representar o conhecimento adquirido e de relacionar esse mesmo conhecimento.

Num estudo sobre a unidade didática de Estatística, conduzido por Viseu, Fernandes, Fernandes, Faria e Duarte (2009), verificou-se que quase todos os alunos de uma turma do 10.º ano, do ensino profissional, apreciaram usar o programa *CmapTools*[2] para construir os seus mapas de conceitos, tendo apresentado trabalhos interessantes e revelado possuir conhecimentos sobre os conceitos estatísticos tratados.

Voltando às conexões matemáticas, García-García e Dolores-Flores (2018) entendem essas conexões como um processo cognitivo através do qual uma pessoa relaciona duas ou mais ideias, conceitos, definições, teoremas, procedimentos, representações e significados entre si, com outras disciplinas ou com a vida real.

Nas conexões matemáticas, segundo a perspetiva de García-García e Dolores-Flores (2018), salientam-se as dimensões concetual e procedimental que se assumem como as duas principais vertentes do conhecimento matemático na visão de Hiebert e Lefevre (1986). Contudo, os primeiros autores incluem nas conexões matemáticas não só os conceitos e os procedimentos, mas também outros objetos matemáticos.

Segundo Godino, Batanero e Font (2007), nas práticas de resolução de problemas intervém uma diversidade de objetos matemáticos primários, como sejam: as situações-problema, que são ações que induzem uma atividade matemática (aplicações intra-matemáticos e extra-matemáticas, exercícios, problemas); linguagens, que se usam para representar os dados, operações, objetos matemáticos e a solução encontrada em seus diversos registos (termos, expressões, notações, gráficos); conceitos/definições, que são formulações relativas a definições e descrições, que o aluno tem de lembrar e aplicar; propriedades/proposições, que são enunciados sobre relações ou propriedades dos conceitos; procedimentos, que se referem a algoritmos, operações e técnicas de cálculo que os alunos aplicam; e argumentos, que são enunciados usados para validar ou explicar propriedades ou resultados, que podem ser dedutivos, indutivos, formais ou informais.

Portanto, diferentemente da visão de Hiebert e Lefevre, a perspetiva Godino et al. (2007) acerca dos objetos que intervêm na atividade matemática, sendo mais abrangente, é mais coincidente com a perspetiva de García-García e Dolores-Flores (2018) relativa às conexões matemáticas, pois tais relações podem incidir sobre a generalidade dos objetos matemáticos primários, e não apenas sobre os conceitos e procedimentos.

[2] Este programa é de acesso livre e pode ser descarregado em http://cmap.ihmc.us.

No caso das representações (ou linguagens), Wild e Pfannkuch (1999) consideram que se trata de um componente fundamental do pensamento estatístico, e também matemático, acrescentamos nós, pois ao criar e alterar representações pode desenvolver-se uma melhor compreensão do objeto de estudo. Estas transformações de representações, que os autores designam de transnumeração, permite, através da observação das várias representações, encontrar aquelas que são realmente informativas. Ou seja, cada representação enfatiza certos aspetos do objeto de estudo, donde devemos explorar aquelas que mais se relacionam com esse objeto de estudo.

Com base numa revisão de literatura, García-García e Dolores-Flores (2018, p. 230) reconheceram as seguintes características das conexões matemáticas:

> • As conexões matemáticas são relações verdadeiras e devem ser úteis na melhoria da compreensão matemática.
> • Uma resposta correta não implica que o aluno estabeleça uma conexão matemática, mas o uso de conexões matemáticas leva a respostas consistentes do ponto de vista matemático.
> • O uso de diferentes representações é uma parte importante de estabelecer conexões.
> • Relações lógicas, como inclusão e generalização, fazem parte do processo de estabelecer conexões matemáticas. A modelação de problemas não matemáticos também é um tipo de conexão matemática.
> • As conexões são um produto do sistema de crenças atribuído ao aluno. Portanto, cada aluno estabelecerá conexões matemáticas num nível diferente.

Na próxima secção exploram-se as operações com números positivos usando o GeoGebra, aplicando algumas delas à representação gráfica de funções.

2. Operar com números positivos no GeoGebra

Nesta secção exploramos várias operações envolvendo números positivos no GeoGebra, designadamente as operações binárias de adição, subtração, multiplicação e divisão de dois números positivos e a operação unária de raiz quadrada de um número positivo. Além disso, aplicam-se as operações de multiplicação, divisão e raiz quadrada à definição de representações gráficas de funções. Para tal, definem-se segmentos de reta, determinam-se os seus comprimentos e faz-se corresponder-lhes as suas respetivas medidas, constituindo estas últimas os números positivos.

2.1. Adição de números positivos

Nesta atividade vamos definir a adição de dois números positivos no GeoGebra. Para tal, são dados dois segmentos de reta, de medidas de comprimento a e b, e pretende-se determinar a sua soma. Na Figura 1 mostra-se a construção geométrica que define o segmento de reta correspondente à soma $a + b$.

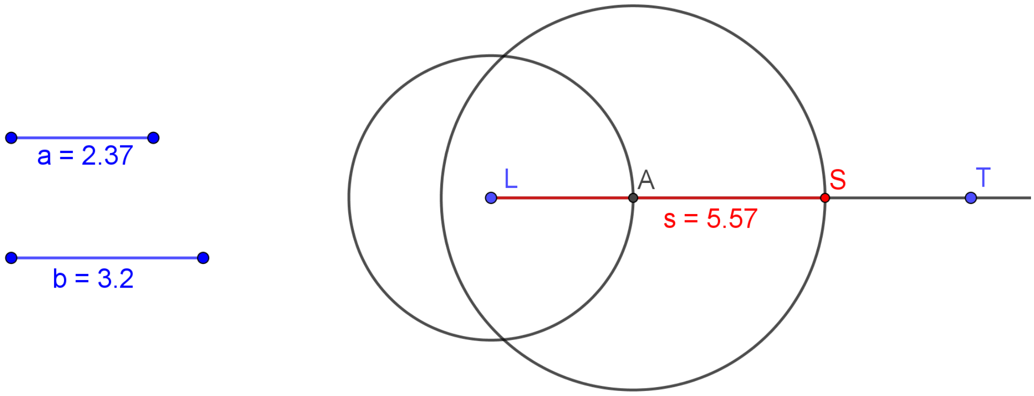

FIGURA 1: Construção geométrica que define a soma dos números positivos a e b
FONTE: Elaboração do autor

Conhecidos os números positivos a e b, construímos a semirreta com origem em L e passando por T, ou seja, $\dot{L}T$. De seguida, com a ferramenta compasso, transportamos o segmento de reta de medida a para a semirreta $\dot{L}T$, definindo-se, assim, o segmento de reta $[LA]$. Analogamente, a partir do ponto A, extremidade do segmento de reta $[LA]$, transportamos o segmento de reta de medida b, obtendo-se o segmento de reta $[AS]$. Deste modo, conclui-se que a medida do segmento de reta $[LS]$ corresponde à soma pretendida ($s = a + b$), que neste caso concreto toma o valor $s = 5{,}57$. Por arrastamento de qualquer dos segmentos de reta, dados inicialmente, podemos verificar que a medida de $[LS]$ é sempre a soma de a com b.

2.2. Subtração de números positivos

Nesta atividade vamos definir a subtração de dois números positivos no GeoGebra. Para tal, são dados dois segmentos de reta, de medidas de comprimento a e b, e pretende-se determinar a sua diferença. Na Figura 2 mostra-se a construção geométrica que define o segmento de reta correspondente à diferença $b - a$.

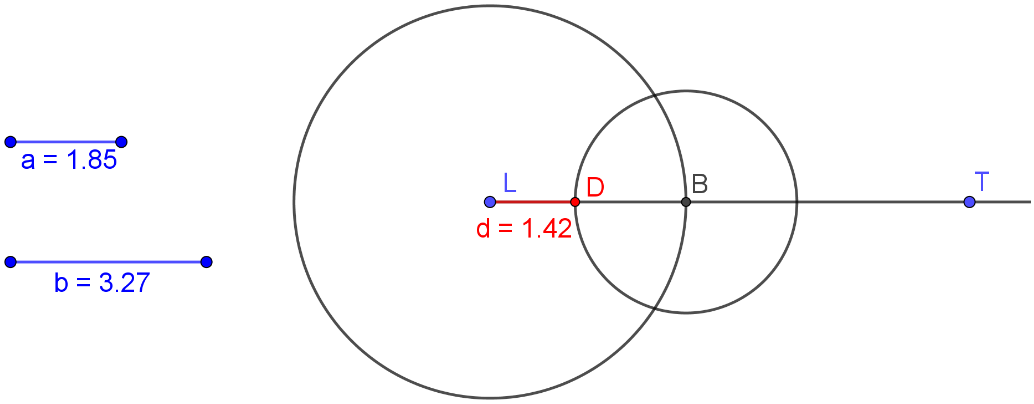

FIGURA 2: Construção geométrica que define a diferença dos números positivos a e b
FONTE: Elaboração do autor

Tal como no caso da adição, são dados os números positivos a e b e construímos a semirreta com origem em L e passando por T, ou seja, $\dot{L}T$. Seguidamente, com a ferramenta compasso, transportamos o segmento de reta de maior medida, que neste caso é o b, para a semirreta $\dot{L}T$, definindo-se, assim, o segmento de reta $[LB]$. Procedendo de modo análogo, transportamos o segmento de reta de medida a de modo que o ponto B seja a sua extremidade superior, portanto correspondente ao segmento de reta $[DB]$. Assim, conclui-se que a medida do segmento de reta $[LD]$ corresponde à diferença pretendida ($d = b - a$), que neste caso concreto toma o valor $d = 1{,}42$. Por arrastamento de qualquer dos segmentos de reta, dados inicialmente, podemos verificar que a medida de $[LD]$ é sempre a diferença entre b e a[3].

2.3. Multiplicação de números positivos

Nesta atividade vamos definir a multiplicação de dois números positivos no GeoGebra. Para tal, são dados dois segmentos de reta, de medidas de comprimento a e b, e pretende-se determinar o seu produto. Na Figura 3 mostra-se a construção geométrica que define o segmento de reta correspondente ao produto $a \times b$.

[3] Como estamos a considerar apenas números positivos, deve ter-se em atenção que na subtração o aditivo deve ser maior do que o subtrativo, ou seja, $b > a$.

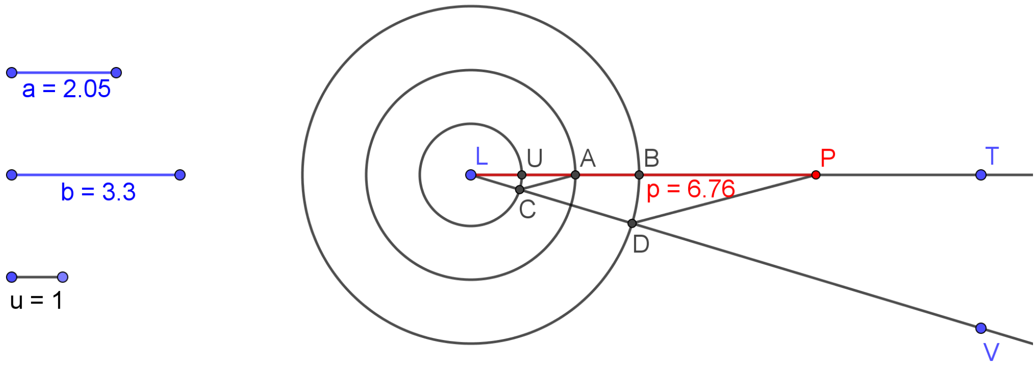

FIGURA 3: Construção geométrica que define o produto dos números positivos a e b
FONTE: Elaboração do autor

No caso da multiplicação são dados os números positivos a, b e u e construímos duas semirretas com origem em L, uma que passa por T, a semirreta $\dot{L}T$, e outra que passa por V, a semirreta $\dot{L}V$. Nesta operação, a consideração do número positivo u, que tem por medida do comprimento a unidade, constitui-se como um elemento auxiliar que intervém na construção geométrica que define o produto, como se constata a seguir.

Na continuação, com a ferramenta compasso, transportamos os segmentos de reta de medidas a, b e u para a semirreta $\dot{L}T$, todos com início no ponto L, em que $[LU]$ corresponde a u, $[LA]$ corresponde a a e $[LB]$ corresponde a b. De seguida, definimos o segmento de reta $[AC]$ e conduzimos por D uma reta paralela a $[AC]$. Deste modo, definiram-se os triângulos $[LAC]$ e $[LPD]$, que são semelhantes porque têm os ângulos congruentes.

Sendo os triângulos $[LAC]$ e $[LPD]$ semelhantes, conclui-se que os comprimentos dos seus lados homólogos são proporcionais, donde tem-se:

$$\frac{\overline{LA}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{LP}}{\overline{LD}}.$$

Substituindo na proporção os comprimentos dos segmentos de reta dados, a, b e u, tem-se: $a/1 = \overline{LP}/b \Leftrightarrow \overline{LP} = a \times b$. Portanto, a medida do segmento de reta $[LP]$ corresponde ao produto pretendido ($p = a \times b$), que neste caso concreto toma o valor $p = 6{,}76$. Por arrastamento de qualquer dos segmentos de reta, dados inicialmente, podemos verificar que a medida de $[LP]$ é sempre o produto de a por b.

No caso particular em que $a = b$, podemos, através da variação de a, definir a representação gráfica da função $f(a) = a^2$, sendo a um número não negativo, como se mostra na Figura 4.

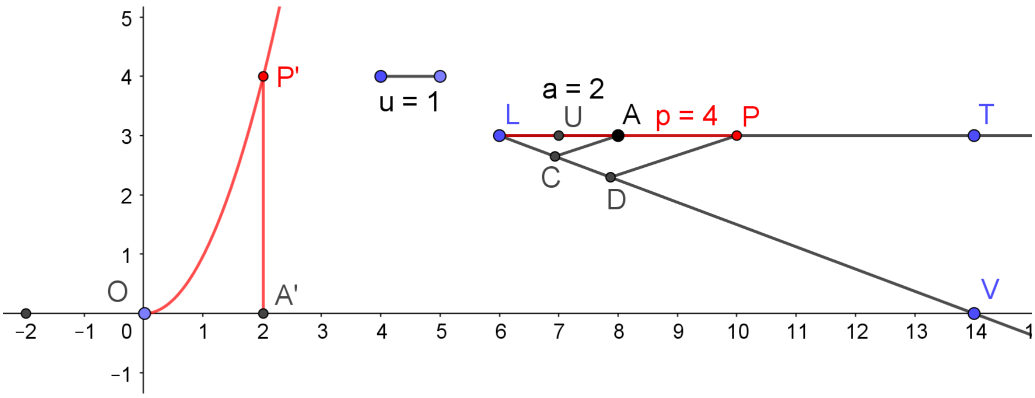

FIGURA 4: Construção geométrica que define graficamente a função a^2, com $a \geq 0$
FONTE: Elaboração do autor

Para esse propósito, definimos o segmento de reta de medida a sobre a semirreta $\dot{L}T$, que na figura corresponde ao segmento $[LA]$, de modo que o ponto A se possa mover livremente sobre a semirreta. Em seguida, recorrendo à operação de multiplicação, definimos o quadrado de a, que na figura corresponde à medida do segmento de reta $[LP]$, ou seja, p. Depois, com a ferramenta compasso, transportamos os segmentos de reta $[LA]$ e $[LP]$ para o sistema de eixos cartesianos, sendo que a distância da origem do sistema de eixos ao ponto A' é a medida a, a distância entre os pontos A' e P' é a medida $p = a^2$ e o segmento de reta $[A'P']$ deve ser desenhado na vertical, ou seja, perpendicularmente ao segmento de reta $[OA']$.

Uma vez concluída a construção, ativamos a ferramenta Lugar Geométrico do GeoGebra e selecionamos os pontos P' e A, por esta ordem, obtendo-se, assim, a representação gráfica da função $f(a) = a^2$, sendo a um número não negativo. Note-se que, na construção da representação gráfica, para cada valor de a, definido pela distância entre o ponto L e o ponto A, é registado graficamente o seu quadrado através do ponto P'.

Observando a representação gráfica reconhece-se que se trata do ramo direito da parábola de equação $y = x^2$, precisamente aquele que corresponde ao caso de x ser não negativo.

2.4. Divisão de números positivos

Nesta atividade vamos definir a divisão de dois números positivos no GeoGebra. Para tal, são dados dois segmentos de reta, de medidas de comprimento a e b, e pretende-se determinar o seu quociente. Na Figura 5 mostra-se a construção geométrica que define o segmento de reta correspondente ao quociente b/a.

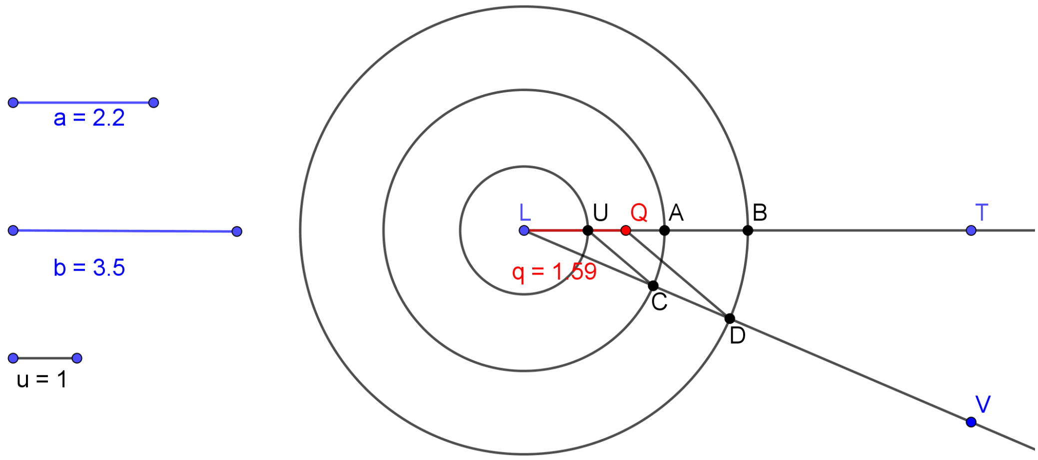

FIGURA 5: Construção geométrica que define o quociente dos números positivos a e b
FONTE: Elaboração do autor

Tal como na multiplicação, são dados os números positivos a, b e u e construímos duas semirretas com origem em L, uma que passa por T, a semirreta $\dot{L}T$, e outra que passa por V, a semirreta $\dot{L}V$. Também neste caso, u corresponde a um segmento de reta que tem por medida do comprimento a unidade.

Seguidamente, com a ferramenta compasso, transportamos os segmentos de reta de medidas a, b e u para a semirreta $\dot{L}T$, todos com início no ponto L, em que $[LU]$ corresponde a u, $[LA]$ corresponde a a e $[LB]$ corresponde a b. De seguida, definimos o segmento de reta $[UC]$ e conduzimos por D uma reta paralela a $[UC]$. Deste modo, definiram-se os triângulos $[LUC]$ e $[LQD]$, que são semelhantes porque têm os ângulos congruentes.

Sendo os triângulos $[LUC]$ e $[LQD]$ semelhantes, conclui-se que os comprimentos dos seus lados homólogos são proporcionais, donde tem-se:

$$\frac{\overline{LU}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{LQ}}{\overline{LD}}\,.$$

Substituindo na proporção os comprimentos dos segmentos de reta dados, a, b e u , tem-se: $1/a = \overline{LQ}/b \Leftrightarrow \overline{LQ} = b/a$. Portanto, a medida do segmento de reta $[LQ]$ corresponde ao quociente pretendido ($q = b/a$), que neste caso concreto toma o valor $q = 1{,}59$. Por arrastamento de qualquer dos segmentos de reta, dados inicialmente, podemos verificar que a medida de $[LQ]$ é sempre o quociente de b por a.

Tal como aplicamos a operação de multiplicação para representar um ramo de parábola, vamos agora aplicar a operação de divisão para obter a representação gráfica de um ramo de hipérbole. Especificamente, vamos definir a representação gráfica da função $f(a) = 1/a$, sendo a um número positivo, como se mostra na Figura 6.

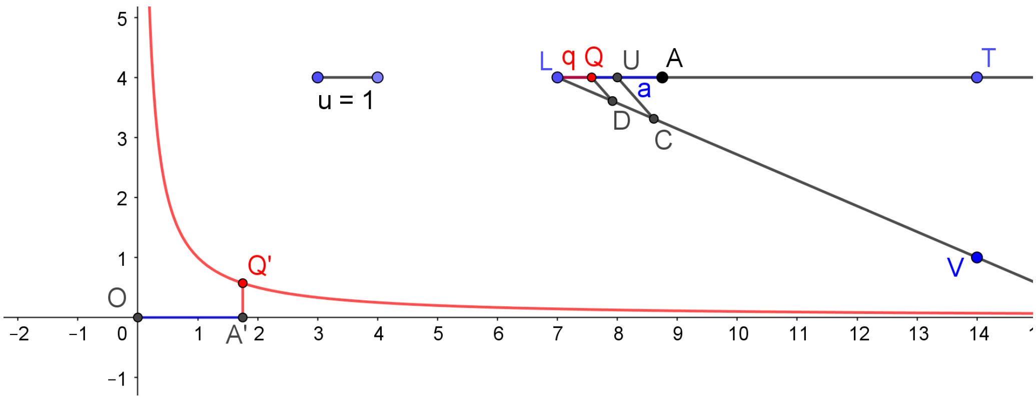

FIGURA 6: Construção geométrica que define graficamente a função $1/a$, com $a > 0$
FONTE: Elaboração do autor

Para construir a figura, começamos por definir o segmento de reta de medida a sobre a semirreta $\dot{L}T$, que na figura corresponde ao segmento $[LA]$, de modo que o ponto A se possa mover livremente sobre a semirreta. Em seguida, recorrendo à operação de divisão, definimos o quociente $1/a$, que na figura corresponde à medida do segmento de reta $[LQ]$, ou seja, q. Depois, com a ferramenta compasso, transportamos os segmentos de reta $[LA]$ e $[LQ]$ para o sistema de eixos cartesianos, sendo que a distância da origem do sistema de eixos ao ponto A' é a medida a, a distância entre os pontos A' e Q' é a medida $q = 1/a$ e o segmento de reta $[A'Q']$ deve ser desenhado na vertical, ou seja, perpendicularmente ao segmento de reta $[OA']$.

Uma vez concluída a construção, ativamos a ferramenta Lugar Geométrico do GeoGebra e selecionamos os pontos Q' e A, por esta ordem, obtendo-se, assim, a representação gráfica da função $f(a) = 1/a$, quando a é um número positivo. Note-se que, na construção da representação gráfica, para cada valor de a, definido pela distância entre o ponto L e o ponto A, é registado graficamente o seu inverso através do ponto Q'.

Observando a representação gráfica reconhece-se que se trata do ramo direito da hipérbole de equação $y = 1/x$, precisamente aquele que corresponde ao caso de x ser positivo.

2.5. Raiz quadrada de um número positivo

Nesta atividade vamos definir a raiz quadrada de um número positivo no GeoGebra. Para tal, é dado um segmento de reta, de medida de comprimento a, e pretende-se determinar a sua raiz quadrada. Na Figura 7 mostra-se a construção geométrica que define o segmento de reta correspondente a $\sqrt{a}$.

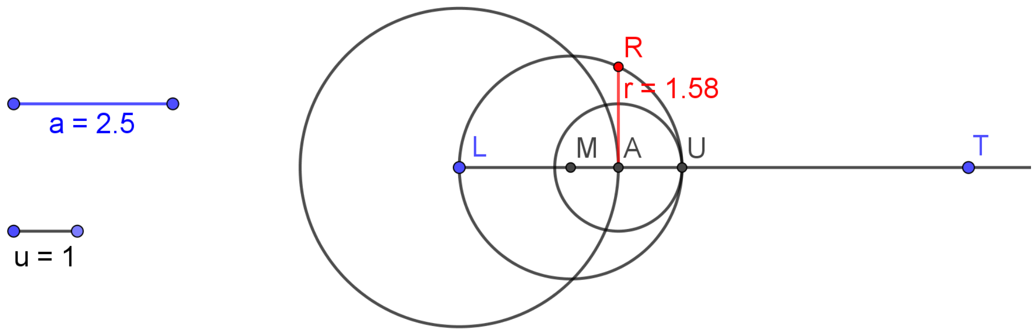

FIGURA 7: Construção geométrica que define a raiz quadrada do número positivo a
FONTE: Elaboração do autor

Neste caso, são dados os números positivos a e u e construímos uma semirreta com origem em L e que passa por T, a semirreta $\dot{L}T$. Tal como nas operações anteriores, o número u corresponde a um segmento de reta que tem por medida do comprimento a unidade.

De seguida, com a ferramenta compasso, transportamos os segmentos de reta de medidas a e u para a semirreta $\dot{L}T$, de modo que um esteja na continuação do outro, sendo que $[LA]$ corresponde a a e $[AU]$ corresponde a u. De seguida, consideramos o segmento de reta $[LU]$ como sendo o diâmetro da circunferência de centro em M (ponto médio de $[LU]$) e conduzimos por A uma reta perpendicular à semirreta $\dot{L}T$. Deste modo, definiu-se o triângulo retângulo $[LUR]$ (está inscrito numa semicircunferência), retângulo em R, e em que $[AR]$ é a sua altura relativa à hipotenusa.

Ora, a altura $[AR]$ divide o triângulo retângulo $[LUR]$ em dois triângulos, $[LAR]$ e $[AUR]$, que são também retângulos. Como estes dois triângulos são semelhantes, da proporcionalidade entre os comprimentos dos seus lados homólogos, tem-se:

$$\frac{\overline{LA}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{AU}}.$$

Substituindo na proporção os comprimentos dos segmentos de reta dados, a e u, tem-se: $a/\overline{AR} = \overline{AR}/1 \Leftrightarrow \overline{AR}^2 = a \times 1$, ou seja, $\overline{AR} = \sqrt{a}$. Portanto, a medida do segmento de reta $[AR]$ corresponde à raiz quadrada pretendida ($r = \sqrt{a}$), que neste caso concreto toma o valor $r = 1{,}58$. Por arrastamento do segmento de reta, dado inicialmente, podemos verificar que a medida de $[AR]$ é sempre a raiz quadrada de a.

A variação da medida a, do comprimento do segmento de reta dado, permite definir a representação gráfica da função $f(a) = \sqrt{a}$, em que a é um número não negativo, como se mostra na Figura 8.

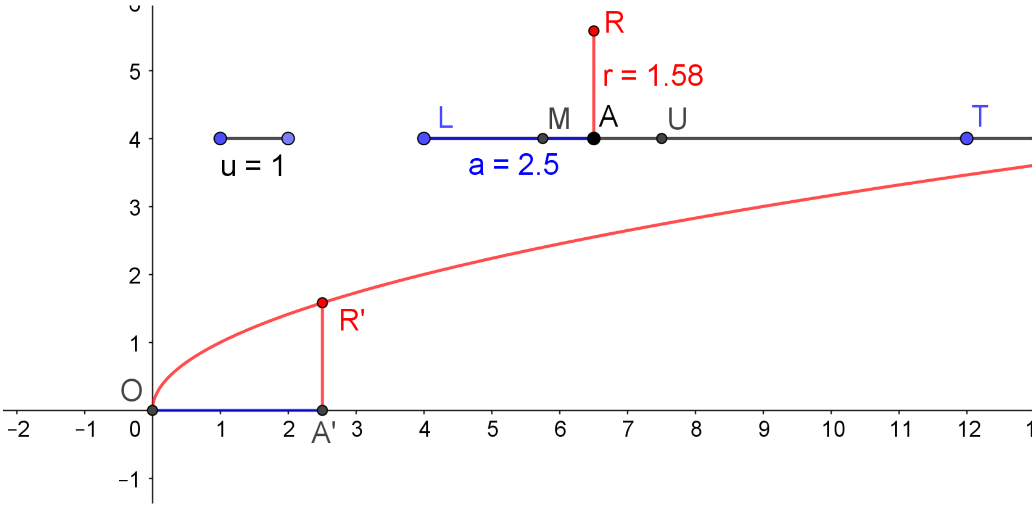

FIGURA 8: Construção geométrica que define graficamente a função $\sqrt{a}$, com $a \geq 0$
FONTE: Elaboração do autor

Na construção da figura começamos por definir o segmento de reta de medida a sobre a semirreta $\dot{L}T$, que na figura corresponde ao segmento $[LA]$, de modo que o ponto A se possa mover livremente sobre a semirreta. Em seguida, recorrendo à operação de raiz quadrada, definimos $\sqrt{a}$, que na figura corresponde à medida do segmento $[AR]$, ou seja, r. Depois, com a ferramenta compasso, transportamos os segmentos de reta $[LA]$ e $[AR]$ para o sistema de eixos cartesianos, sendo que a distância da origem do sistema de eixos ao ponto A' é a medida a, a distância entre os pontos A' e R' é a medida r e o segmento de reta $[A'R']$ deve ser desenhado na vertical, ou seja, perpendicularmente ao segmento de reta $[OA']$.

Uma vez concluída a construção, ativamos a ferramenta Lugar Geométrico do GeoGebra e selecionamos os pontos R' e A, por esta ordem, obtendo-se, assim, a representação gráfica da função $f(a) = \sqrt{a}$. Note-se que, na construção da representação gráfica, para cada valor de a, definido pela distância entre o ponto L e o ponto A, é registada graficamente a sua raiz quadrada através do ponto R'.

3. Conexões entre as operações

No Quadro 1 encontram-se registados os objetos matemáticos envolvidos em cada uma das operações antes estudadas com o GeoGebra.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th colspan="3">Operações</th></tr>
<tr><th>Adição/Subtração</th><th>Multiplicação/Divisão</th><th>Raiz quadrada</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Objetos matemáticos</td><td colspan="3">Segmento de reta
Semirreta
Circunferência
Medida de uma grandeza
Representação verbal, numérica, algébrica e geométrica
Utilização das ferramentas do GeoGebra
Justificação das resoluções e conclusões usando argumentos verbais</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Reta
Unidade de medida
Semelhança de triângulos
Proporcionalidade
Operações algébricas
Justificação das resoluções e conclusões usando raciocínio lógico-dedutivo</td></tr>
<tr><td></td><td>Paralelismo</td><td>Perpendicularidade
Semelhança de triângulos retângulos
Propriedades de triângulos retângulos</td></tr>
</table>

Quadro 1. Objetos matemáticos intervenientes nas diferentes operações

Pelo Quadro 1 verificamos que, na perspetiva de Godino et al. (2007), são muitos e variados os objetos matemáticos que intervêm nas diferentes operações com números positivos, efetuadas com recurso ao GeoGebra.

Em qualquer das operações estudadas, adição, subtração, multiplicação, divisão e raiz quadra, as linguagens consistem em representações verbais, numéricas, algébricas e geométricas. Já as definições/conceitos, comuns às operações, incluem as noções de segmento de reta, semirreta, circunferência e medida de uma grandeza. No que se refere aos procedimentos destaca-se a seleção e aplicação das ferramentas do GeoGebra para representar os entes geométricos implicados nas diferentes operações com números positivos. Por fim, é também comum a todas as operações a justificação das resoluções e conclusões através de argumentos verbais e de natureza mais informal.

Diferentemente das operações de adição e subtração, no caso das operações de multiplicação, divisão e raiz quadrada são mais os objetos matemáticos envolvidos nessas operações. Concretamente, acrescem-se as definições/conceitos de reta, unidade de medida, semelhança de triângulos e proporcionalidade, bem como o procedimento operações algébricas. No caso das operações de multiplicação e divisão desempenha um papel importante a definição/conceito de paralelismo. Também em todas as três operações se salienta uma argumentação mais desenvolvida, recorrendo-se a argumentos lógico-dedutivos nos processos de justificação das resoluções e conclusões de tais operações.

Finalmente, no caso da operação de raiz quadrada são ainda mais os objetos matemáticos implicados nessa operação. Relativamente às outras operações, nesta acrescentam-se as definições/conceitos de perpendicularidade, semelhança de triângulos retângulos e propriedades de triângulos retângulos. De entre as propriedades, consequência da semelhança de triângulos, salienta-se que "a altura relativa à hipotenusa é meio proporcional aos segmentos de reta por ela determinados na hipotenusa", a qual é determinante para a determinação da raiz quadrada de um número positivo por processos geométricos.

Conclui-se, assim, que são múltiplos e variados os objetos matemáticos que intervêm em cada uma das operações matemáticas estudadas. Constata-se, ainda, existir uma hierarquia do número desses objetos nas diferentes operações. Concretamente, envolvem menos objetos as operações de adição e subtração, seguem-se as operações de multiplicação e divisão com mais objetos e, por último, a raiz quadrada com o maior número de objetos. Associando o maior número de objetos envolvidos a uma operação mais complexa, podemos dizer que as operações de adição e subtração são as menos complexas, as operações de multiplicação e divisão são mais complexas e, por fim, a operação de raiz quadrada é a mais complexa daquelas que aqui foram estudadas.

Por outro lado, entre as várias operações, aqui estudadas, existem múltiplas conexões dos objetos matemáticos nelas intervenientes, observando-se que certos objetos que intervêm nalgumas delas também surgem em outras operações, o que traduz os seus atributos inclusivos. Na Figura 9 ilustram-se as relações entre os objetos matemáticos das diferentes operações.

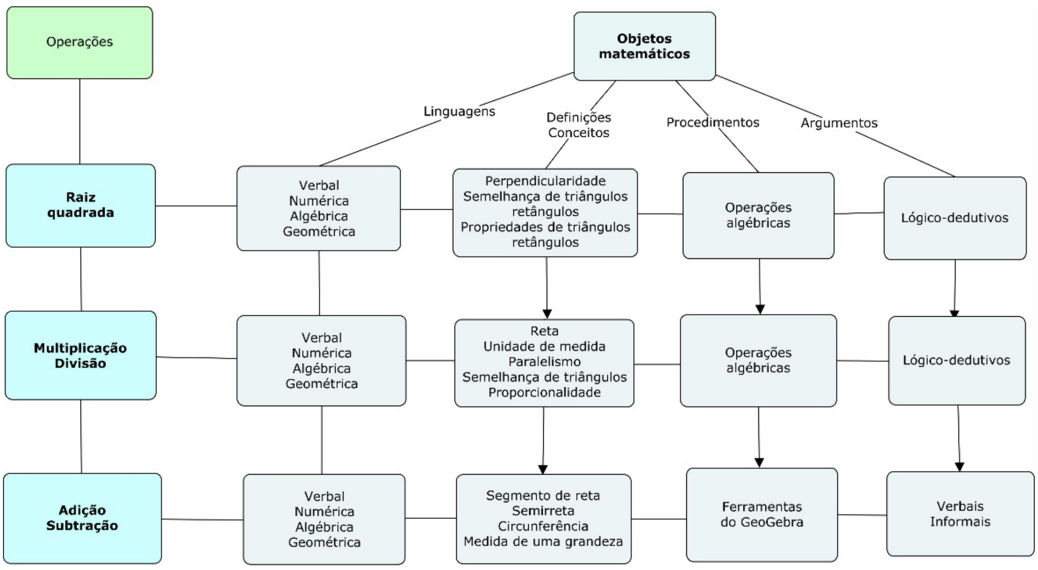

FIGURA 9: Relações entre os objetos matemáticos intervenientes nas diferentes operações
FONTE: Elaboração do autor

Observando a Figura 9, constata-se que os objetos matemáticos das operações têm um caráter inclusivo, isto é, o conjunto dos objetos de qualquer operação está contido ou contém o conjunto dos objetos de qualquer das outras operações. Assim, tendo em conta que a generalidade e inclusão dos conceitos vão diminuindo à medida que se vai descendo na rede, tem-se na categoria:

- *linguagens*: os objetos matemáticos são comuns a todas as operações;
- *definições/conceitos*: são acrescentados novos objetos quando passamos das operações de adição e subtração para as operações de multiplicação e divisão (reta, unidade de medida, paralelismo, semelhança de triângulos e proporcionalidade) e quando passamos das operações de multiplicação e divisão para a operação de raiz quadrada (perpendicularidade, semelhança de triângulos retângulos, propriedades de triângulos retângulos);
- *procedimentos*: são acrescentados novos objetos quando passamos das operações de adição e subtração para as operações de multiplicação, divisão e raiz quadrada (operações algébricas);
- *argumentos*: são acrescentados novos objetos quando passamos das operações de adição e subtração para as operações de multiplicação, divisão e raiz quadrada (argumentos lógico-dedutivos).

Conclui-se, portanto, que as conexões entre as operações de números positivos, abordadas através de uma representação geométrica, são bem patentes nas resoluções aqui exploradas, observando-se mesmo um caráter inclusivo entre os conjuntos de objetos matemáticos nelas intervenientes.

Conclusões e implicações

No presente estudo explorámos as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e raiz quadrada de números positivos recorrendo a representações geométricas construídas com o GeoGebra. Adicionalmente, aplicamos algumas delas à construção da representação gráfica de funções restringidas aos números não negativos ou positivos, concretamente: a função $f(a) = a^2$ (operação de multiplicação), definida no conjunto dos números reais não negativos; $f(a) = 1/a$ (operação de divisão), definida no conjunto dos números reais positivos; e $f(a) = \sqrt{a}$ (operação de raiz quadrada), definida no conjunto dos números reais não negativos.

As representações gráficas de que falámos antes, porque envolvem apenas números não negativos ou positivos, referem-se apenas a parte das representações gráficas correspondentes a essas funções de domínio real, não incluindo a parte das representações gráficas relativas aos números negativos ou não positivos, respetivamente. No entanto, essa limitação pode ser minimizada sobrepondo uma reta ou curva adequada, uma reta (para as funções afins), uma parábola (para as funções quadráticas) ou uma hipérbole (para as funções do tipo $f(x) = a/(bx)$, com a e b constantes).

Das várias operações aqui exploradas numa vertente geométrica, com recurso ao GeoGebra, e da análise detalhada, produzida subsequentemente, constata-se que são muitos e variados os objetos matemáticos que intervêm nessas operações, os quais, por sua vez, formam conjuntos de natureza inclusiva para as diferentes operações. Por outro lado, tais objetos interconectam-se entre as várias operações (ver Figura 9).

Ora, a diversidade de objetos matemáticos em jogo nas operações e as relações entre as operações são aspetos educacionais muito relevantes ao permitir ao aluno rever, consolidar e relacionar tais objetos, contribuindo, portanto, para uma aprendizagem mais significativa e profunda (Ausubel et al., 1980). Complementarmente, as conexões entre as operações favorecem a retenção e a evocação desses objetos matemáticos (Novak & Gowin, 1996).

O principal interesse para os alunos explorarem as atividades aqui trabalhadas não resulta da possibilidade de introduzir, pela primeira vez, as operações numéricas, o que já aconteceu nos primeiros anos de escolares, mas, sobretudo, do desenvolvimento de novos significados dessas operações e das representações gráficas de funções obtidas por aplicação das mesmas operações.

Face ao que foi referido anteriormente, as atividades aqui exploradas sobre as diversas operações e suas aplicações à construção de representações gráficas afiguram-se como tendo muito interesse para a aprendizagem de alunos do 3.º ciclo do ensino básico (do 7.º ao 9.º ano) e do ensino secundário (do 10.º ao 12.º ano). Em termos da sua exploração, integrada na elaboração de um trabalho, os alunos poderiam organizar-se em pequenos grupos para explorarem algumas ou todas as atividades, podendo o trabalho ser realizado, em parte, na escola e fora da escola. Esta estratégia permitiria responder a um duplo propósito: reduzir o tempo escolar necessário à sua realização, que normalmente é escasso para cumprir os programas escolares, e desenvolver competências de trabalhar em grupo (Petocz & Reid, 2007).

As representações gráficas aqui tratadas foram obtidas através de uma única operação, mas o recurso a mais do que uma operação permite, facilmente, obter representações gráficas de outras funções, como sejam partes de funções afins e quadráticas. No caso de funções afins e quadráticas, que são do tipo $f(a) = ax + b$ e $f(a) = ax^2 + bx + c$, respetivamente, com a, b e c números não negativos, as suas representações gráficas podem ser obtidas recorrendo, conjuntamente, às operações de adição e multiplicação.

Pois bem, o estudo das funções afins e quadráticas, a partir das suas representações gráficas, é uma extensão do estudo aqui efetuado e dá aos alunos a oportunidade de consolidarem as operações numéricas e combiná-las para obter essas representações. Nesse processo, os alunos podem efetuar as construções no GeoGebra ou ser construídas por outrem e ser-lhes disponibilizadas de antemão. Nas construções, os alunos terão de aplicar e relacionar os diversos objetos matemáticos nelas intervenientes, enquanto a manipulação das construções lhes permite obter as representações gráficas e descobrir o significado dos parâmetros das respetivas funções.

Referências

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1980). *Psicologia educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana.

Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Fernandes, J. A. (2022). Exploração de uma propriedade do triângulo retângulo usando o GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, *11*(1), 85-100.

Fernandes, J. A., & Vaz, O. (1998). Porquê usar tecnologia nas aulas de matemática? *Boletim da SPM*, *39*, 43-55.

Fernandes, J. A., Alves, M. P., Viseu, F. & Lacaz, T. M. (2006). Tecnologias de informação e comunicação no currículo de Matemática do ensino secundário após a reforma curricular de 1986. *Revista de Estudos Curriculares*, *4*(2), 291-329.

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(2), 227-252.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127- 135.

Henriques, A., & Fernandes, J. A. (2015). O ensino da Estatística nas recentes orientações curriculares. In A. Borralho, E. Barbosa, I. Vale, H. Jacinto, J. Carvalho e Silva, & J. Latas (Orgs.), *ProfMat2015: Matemática, currículo e desenvolvimento curricular* (pp. 48-67). Évora: Associação de Professores de Matemática.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and* *procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

MEC (2018). *Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base*. Brasília: Ministério da Educação.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática: ensino básico*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação e Ciência (2014). *Programa e Metas Curriculares de Matemática A: ensino secundário*. Lisboa: Autor.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: Autor.

Novak, J. D., & Gowin, D. B. (1996). *Aprender a aprender*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

Petocz, P., & Reid, A. (2007). Learning and assessment in statistics. In B. Phillips, & L. Weldon (Eds.), *The Proceedings of the ISI/IASE Satellite on Assessing Student Learning in Statistics*. Voorburg: International Statistical Institute.

Skemp, R. R. (1993). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Soares, L. H. (2009). *Aprendizagem significativa na educação matemática: uma proposta para a aprendizagem de Geometria Básica*. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Brasil.

Viseu, F., Fernandes, J. A., Fernandes, M. C., Faria, M. S., & Duarte, P. (2009). Os mapas de conceitos na aprendizagem de Estatística por alunos do 10º ano do ensino profissional. In P. Dias, & A. Osório (Eds.), *VI Conferência Internacional de TIC na Educação: Challenges 2009* (pp. 873-885). Braga: Centro de Competência da Universidade do Minho.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-248.